МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Курсовая работа
студента 532 группы
Караваева П.Н.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Научный руководитель:
профессор Магарил-Ильяев Г. Г.

Москва – 2016

Содержание

1 Введение

В данной курсовой работе рассматривается следующая задача. Нам известен некий конечный набор коэффициентов Фурье функции, заданной на двумерном торе. Необходимо узнать, какой минимальный набор из имеющихся в нашем расположении коэффициентов достаточно знать для восстановления самой функции, а какие данные не несут важного значения, и ими можно пренебречь. Таким образом, нашей задачей является поиск погрешности оптимального восстановления функции и нахождение оптимального метода, который мы избавим от лишних входящих данных, при этом не теряя точности восстановления.

Пусть $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$ - двумерный тор. Обозначим через $L_2(\mathbb{T}^2)$ пространство функций $f(\cdot)$, для которых конечна норма

$$||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Далее, рассмотрим пространство Соболева $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}^2)$ функций, имеющих кусочно-непрерывные частные производные по каждой переменной. Через $W_2^1(\mathbb{T}^2)$ обозначим функции $f(\cdot)$ из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}^2)$ с дополнительным условием:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} \left(a_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 \leqslant 1, \qquad \text{где } a_1, a_2 > 0.$$

Для каждой функции из указанного пространства справедливо разложение в ряд Фурье:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1, k_2} \cdot e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)},$$

где коэффициенты Фурье выражаются формулами

$$c_{k_1, k_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $f(\cdot)$ из пространства $W_2^1(\mathbb{T}^2)$ по заданному набору значений ее коэффициентов Фурье: $c_{k_1,k_2}(f)$ в метрике $L_2(\mathbb{T}^2)$. Пусть C - набор векторов $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ и $card(C)=N$. О каждой функции $f(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}^2)$ нам известны ее коэффициенты Фурье $c_{k_1,k_2}(f),$ где $(k_1,k_2)\in C$. По этой информации мы хотим восстановить функцию $f(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Методом восстановления назовем произвольное отображение $m:\mathbb{R}^N\to L_2(\mathbb{T}^2)$. Погрешностью такого метода назовем следующую величину:

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2),I_C,m)=\sup_{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{T}^2)}||f(\cdot)-m(I_Cf)(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)},$$

где $(I_Cf)(\cdot)=\{c_{k_1,k_2}(f)\}_{(k_1,k_2)\in C}$. Ищется такой метод, чтобы эта погрешность была минимальной, то есть чтобы она совпадала с погрешностью оптимального восстановления:

$$E(W_2^1,I_C)=\inf_{m:\mathbb{R}^N\to L_2(\mathbb{T}^2)}e(W_2^1(\mathbb{T}^2),I_C,m).$$

Метод $\widetilde{m}$, на котором достигается нижняя грань назовем оптимальным:

$$e(W_1^2(\mathbb{T}^2),I_C,\widetilde{m})=\inf_{m:\mathbb{R}^N\to L_2(\mathbb{T}^2)}e(W_2^1(\mathbb{T}^2),I_C,m).$$

3 Оценка снизу

Сначала найдем оценку снизу на погрешность оптимального восстановления. Пусть $m : \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T}^2)-$ произвольный метод восстановления и $f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2)$. Имеем

$$2||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} = ||f(\cdot) - m(0) - (-f(\cdot) - m(0))||_{L_2(\mathbb{T}^2)} \leqslant$$
$$\leqslant ||f(\cdot) - m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} + || - f(\cdot) - m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} \leqslant 2e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m).$$

По определению погрешность $e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m)$ метода m не меньше, чем $||f(\cdot)-m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)}$ и $|| - f(\cdot) - m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)}$, то есть:

$$2e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m) \geqslant ||f(\cdot) - m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} + || - f(\cdot) - m(0)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} \geqslant 2\,||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Исходя из того, что предыдущее неравенство справедливо для любой $f(\cdot)$ из $W_2^1(\mathbb{T}^2)$, у которой коэффициенты Фурье равны 0, для произвольного метода m получаем:

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C, m) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}^2),\\ I_C f=0}} ||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Неравенство выполнено для любого метода, а значит также будет верно:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}^2),\\ I_C f=0}} ||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)}.$$

Для нахождения искомой оценки снизу остается найти значение верхней грани в правой части неравенства, для чего рассмотрим экстремальную задачу:

$$||f(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^2)} \to \max,\ f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2),\ I_C f = 0.$$

Выражение,

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} \left(a_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \right) dx_1 dx_2 \leqslant 1$$

согласно равенству Парсеваля равносильно следующему

$$\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2)|c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant 1.$$

Тогда можем переписать экстремальную задачу следующим образом:

$$\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} |c_{k_1,k_2}|^2 \to \max,\ \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2)|c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant 1,\ I_C f = 0,\ f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2).$$

Рассмотрим свободный член ряда Фурье $c_{0,0}$. Предположим, что его значение нам не дано, то есть $(0,0) \notin C$. В этом случае на этот коэффициент нет никаких ограничений, соответственно, взяв $f(\cdot) = const$ и максимизируя $c_{0,0}$, приходим к тому, что значение экстремальной задачи, а следовательно, и погрешности оптимального восстановления равно $+\infty$.

Иными словами, если $(0,0) \notin C$, то любой произвольный метод m будем оптимальным и $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = +\infty$.

В дальнейшем будем рассматривать те случаи, когда коэффициент $c_{0,0}$ нам известен.

Тогда экстремальную задачу можно переписать в виде:

$$\sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} |c_{k_1,k_2}|^2 \to \max, \quad \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2)|c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant 1, \ f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2).$$

Найдем минимальное значение выражения $a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2$ на множестве $\mathbb{Z}^2 \setminus C$. Пусть оно достигается при $k_1 = \widetilde{k_1}, \ k_2 = \widetilde{k_2}$, также обозначим $p = a_1 \widetilde{k_1}^2 + a_2 \widetilde{k_2}^2$. Следовательно, $p \leqslant a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2$ для любого $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus C$.

Тогда имеем следующую оценку:

$$\sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} |c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2) \, |c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant \frac{1}{p}.$$

Найденная оценка достигается на функции $\widetilde{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{p}} \, e^{i(\widetilde{k_1} x_1 + \widetilde{k_2} x_2)}$, так как $||\widetilde{f}(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \frac{1}{\sqrt{p}}$. То есть значение экстремальной задачи равно $\frac{1}{\sqrt{p}}$.

С учетом предыдущего оценка снизу для погрешности оптимального восстановления найдена:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \geqslant \frac{1}{\sqrt{a_1 \widetilde{k_1}^2 + a_2 \widetilde{k_2}^2}}.$$

4 Оценка сверху

Выберем для рассмотрения следующее семейство методов:

$$m(I_C)(x_1, x_2) = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2, \\ a_1k_1^2+a_2k_2^2<p}} c_{k_1,k_2} e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$$

Для всех $f(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}^2)$ получаем:

$$||f(\cdot) - m(I_C f)(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^2)} = \sum_{a_1k_1^2+a_2k_2^2\geqslant p} |c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant \frac{1}{p} \sum_{a_1k_1^2+a_2k_2^2\geqslant p} (a_1k_1^2 + a_2k_2^2)|c_{k_1,k_2}|^2 \leqslant \frac{1}{p}$$

Отсюда следует, что

$$e(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Следовательно,

$$E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{a_1\widetilde{k_1}^2 + a_2\widetilde{k_2}^2}}$$

и доказана следующая теорема.

5 Теорема

Пусть C - конечное подмножество $\mathbb{Z}^2$. Если $(0,0) \notin C$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = +\infty$ и любой метод является оптимальным. Если $(0,0) \in C$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}^2), I_C) = \frac{1}{\sqrt{a_1 \widetilde{k_1}^2 + a_2 \widetilde{k_2}^2}}$, где $a_1 \widetilde{k_1}^2 + a_2 \widetilde{k_2}^2 = \min_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus C} (a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2)$. При этом в качестве оптимального метода можно взять $m(I_C)(x_1, x_2) = \sum\limits_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2, \\ a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 < a_1 \widetilde{k_1}^2 + a_2 \widetilde{k_2}^2}} c_{k_1,k_2} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$.

6 Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. "Элементы теории функций и функционального анализа"

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. "Выпуклый анализ и его приложения"

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление операторов по неточной информации"