**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА**
**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Курсовая работа
студента 432 группы
Караваева П.Н.

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПРИБЛИЖЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ В ВЕСОВОЙ НОРМЕ

Научный руководитель:
профессор Магарил-Ильяев Г. Г.

Москва – 2015

## Содержание

# 1 Постановка задачи

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}, t^2)$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{R}$, для которых

$$||x(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R},t^2)} = (\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|x(t)|^2dt)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ обозначим пространство функций из $L_2(\mathbb{R}, t^2)$, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$W_2^1(\mathbb{R}, t^2) = x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2) : ||x'(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

На классе $W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x(\cdot)$ по информации о ее приближенным значениям в норме пространства $L_2(\mathbb{R}, t^2)$. Мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, такая, что

$$||x(\cdot) - y(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \leqslant \delta. \tag{1}$$

Здесь в качестве информационного оператора $F_\delta$ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ ставит в соответствие множество функции $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, удовлетворяющих условию (1). Нас интересует погрешность оптимального восстановления

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{R},t^2) \to L_2(\mathbb{R})} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R},t^2), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R},t^2), \\ ||x(\cdot)-y(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \leqslant \delta}} ||x(\cdot) - m(y)(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R})},$$

а также оптимальный метод восстановления.

Для любого метода $m$ имеем

$$2||x(\cdot)|| \leqslant ||x(\cdot) - m(0)|| + || - x(\cdot) - m(0)|| \leqslant 2e(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta, m)$$

Откуда

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geqslant \sup_{\substack{||x(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \leqslant \delta, \\ ||x'(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1}} ||x(\cdot)||_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Для решения экстремальной задачи

$$||x(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, ||x(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \leqslant \delta^2, ||x(\cdot)'||^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1, \tag{2}$$

рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\int\limits_{\mathbb{R}} x^2(t)dt + \lambda_1 \int\limits_{\mathbb{R}} t^2x^2(t)dt + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt.$$

По теореме Каруша-Куна-Таккера для того чтобы функция $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ была решением задачи (2) достаточно, чтобы нашлись $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geqslant 0$, для которых

$$\min_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)} (x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$$

и

$$\widehat{\lambda}_1(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2 \widehat{x}^2(t)dt - \delta^2) = 0, \widehat{\lambda}_2(\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{x}'^2(t)dt - 1) = 0.$$

Положим $\widehat{\lambda}_1 = \delta^{-1}$ и $\widehat{\lambda}_2 = \delta$. Интегрируя по частям первое слагаемое в функции Лагранжа, получим

$$(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \frac{1}{\delta} \int\limits_{\mathbb{R}} (tx(t) + \delta x'(t))^2 dt.$$

Очевидно, что на функции

$$\widehat{x}(t) = \sqrt{2}(\frac{\delta}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2\delta}}$$

функция Лагранжа обращается в ноль, то есть на этой функции достигается минимум. В силу того, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t)dt = \delta^2, \int\limits_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt = 1,$$

$\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (2). Тем самым

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geqslant (\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}^2(t)dt)^{1/2} = \sqrt{2\delta}.$$

Из аналогичных соображений достаточности вытекает, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является также решением экстремальной задачи

$$\| x(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \to \max, \quad \delta^{-1} \| x(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)}^2 + \delta \| x'(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \geqslant 2\delta. \tag{3}$$

## 2 Построение метода

Перейдем к построению оптимального метода восстановления. Положим

$$\psi_n(t) = H_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $H_n(\cdot)$ – полиномы Чебышева-Эрмита ( $H_n(\cdot)_{n=0}^{\infty}$ – ортогональная на $\mathbb{R}$ система полиномов для веса $e^{-x^2}$ со старшими коэффициентами $a_n = 2^n$). Функции $\psi_n(\cdot), n = 0, 1, \dots,$ образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$ и $ty(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\psi_n(t)$.

Положим $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{x}_n\psi_n(t)$, где

$$\widehat{x}_0 = \frac{y_1}{\sqrt{\delta}}, \widehat{x}_n = \frac{(n+1)y_{n+1} + y_{n-2}/2}{\sqrt{\delta}(2n+1)}, n = 1, 2, \dots.$$

Пользуясь свойствами полиномов Чебышева-Эрмита, покажем, что для всех $z(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t))z(t)dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{x}'(t)z'(t)dt = 0. \tag{4}$$

Интегрируем по частям

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{x}'(t)z'(t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{x}'(t)dz(t) = \widehat{x}'(t)z(t)|_{\mathbb{R}} - \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{x}''(t)z(t)dt$$

Пусть $z(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n\psi_n(t)$, тогда $\widehat{x}'(t)z(t)|_{\mathbb{R}} = \widehat{x}'(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n\psi_n(t) = 0$, так как $\psi_n(t) \to 0$, при $t \to \infty$.

Получили то, что нужно доказать $\int\limits_{\mathbb{R}}(\frac{t^2}{\delta}(\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)) - \delta\widehat{x}''(t))z(t)dt = 0$, то есть достаточно показать что $\frac{t^2}{\delta}(\widehat{x}(t) - \widehat{y}(t)) - \delta\widehat{x}''(t) = 0$.

$$\psi_n''(t) = \frac{1}{\delta}H_n''(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}} - \frac{2t}{\delta\sqrt{\delta}}H_n'(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}} - (\frac{1}{\delta} - \frac{t^2}{\delta^2})H_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}}$$

Воспользуемся свойством полиномов Чебышева-Эрмита

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Отсюда $H_n''(\frac{t}{\sqrt{\delta}}) = \frac{2t}{\sqrt{\delta}}H_n'(\frac{t}{\sqrt{\delta}}) - 2nH_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})$, тогда

$$\psi_n''(t) = (\frac{t^2}{\delta^2} - \frac{2n+1}{\delta})\, H_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}} = (\frac{t^2}{\delta^2} - \frac{2n+1}{\delta})\psi_n(t)$$

Откуда вытекает, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(x(t)-\widehat{x}(t))^2dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}}(x'(t)-\widehat{x}'(t))^2dt + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(\widehat{x}(t)-y(t))^2dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{x}'^2(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(x(t)-y(t))^2dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(\widehat{x}-y)(2\widehat{x}-2x)dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{x}'(2\widehat{x}'-2x')dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(x(t)-y(t))^2dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt.$$

Если $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ и $\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \leqslant \delta$, то, положив $z(\cdot) = x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)$, будем иметь

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2z^2(t)dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}} z'^2(t)dt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{\mathbb{R}} t^2(x(t)-y(t))^2dt + \delta\int\limits_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt \leqslant 2\delta.$$

Отсюда

$$\|x(\cdot)-\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant$$
$$\leqslant \sup \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} : \frac{1}{\delta}\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R},t^2)} + \delta\|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 2\delta.$$

Квадрат значения экстремальной задачи в правой части совпадает со значениями задачи (3) и тем самым со значением задачи (2). Следовательно, для погрешности оптимального восстановления получена оценка сверху, совпадающая с оценкой снизу. Таким образом,

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_{\mathbb{R}}) = \sqrt{2\delta}, \tag{5}$$

а метод

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{x}_n\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nH_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{(2n+1)2^nn!}\int_{\mathbb{R}} y(t)H_n(\frac{t}{\sqrt{\delta}})e^{-\frac{t^2}{2\delta}}t^2dt,$$

является оптимальным.

Кроме того, из доказанного следует, что значение задачи (2) равно $\sqrt{2\delta}$. Функция $x(\cdot)/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$ для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ является допустимой в задаче (2) с $\delta = \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)}/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$. Следовательно, для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\frac{\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}{\|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \leqslant 2\frac{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)}}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}},$$

то есть

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t)dt \leqslant 2(\int_{\mathbb{R}} t^2x^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Если рассматривать функции $x(\cdot)$, нормированные условием

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t)dt = 1,$$

то из (6) вытекает неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} t^2x^2(t)dt \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)dt \geqslant \frac{1}{4},$$

которое известно как принцип неопределенности Гейзенберга.

# 3 Список литературы

[1] Б. П. Демидович, "Математические основы квантовой механики".

[2] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "Выпуклый анализ и его приложения".