Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический Факультет

Кафедра общих проблем управления

Курсовая работа
студента 532 группы
Сугробова П.Е.

Оптимальное восстановление k-ой производной на сумме класса Харди и пространства полиномов

Научный руководитель:
профессор Осипенко К.Ю.

Москва - 2017

1. Введение

В данной курсовой работе рассматривается задача оптимального восстановления k-ой производной на классе Харди-Соболева по информации о коэффициентах степенного ряда самой функции, заданных с погрешностью. При решении данной задачи возникают оптимальные методы, которые остаются оптимальными на более широком классе, являющимся суммой исходного класса и подпространства полиномов определенного порядка. В связи с этим ставится и решается общая задача восстановления на сумме класса Харди-Соболева и пространства полиномов, не превосходящих фиксированного порядка. Таким образом, нашей задачей является поиск погрешности оптимального восстановления функции и нахождение оптимального метода, а также исследование минимального объема информации, необходимого для достижения той же точности восстановления.

Похожие задачи восстановления по неточно заданным коэффициентам Фурье на классе Харди-Соболева рассматривались Магарилом-Ильяевым Г. Г. и Осипенко К. Ю. [1], а более общий результат, применимый и в нашем случае был сформулирован и доказан Осипенко К.Ю. [2].

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами. Через $\mathcal{H}_2(D)$ обозначим пространство аналитических в $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих условию:

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}=\sup_{0<\rho<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T}|x(\rho e^{it})|^2dt\right)^{1/2}<\infty.$$

Через $H_2^n(D)$ обозначим множество функций x$(\cdot)$, аналитических в D, для которых $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}\le 1$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой производной на некотором классе аналитических в единичном круге функций W таких, что для любой функции из $x(\cdot)\in W$ ее k-ая производная лежит в $\mathcal{H}_2(D)$ пространстве. Восстановление производится по информации о коэффициентах степенного ряда самой функции, заданных с погрешностью δ в норме пространства l_2. Иными словами, мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot)\in H_2^n(D)$ такой, что

$$x(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}a_jz^j,$$

известны числа $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ такие, что
$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|a_j-y_j|^2\le\delta^2.$$

Погрешностью данного метода $\varphi\colon l_2\to\mathcal{H}_2(D)$ называется величина
$$e(x^{(k)}(\cdot),W,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y\in l_2\\ \|\Lambda x(\cdot)-y\|_{l_2}\le\delta}}\|x^{(k)}(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)},$$
где $\Lambda x(\cdot)=\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ — коэффициенты степенного ряда $x(\cdot)$. Задача заключается в нахождении величины
$$E(x^{(k)}(\cdot),W(D),\delta)=\inf_{m\colon l_2\to\mathcal{H}_2(D)}e(x^{(k)}(\cdot),W,\delta,\varphi)$$
и соответствующего оптимального метода, т.е. метода, на котором эта нижняя грань достигается.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 1.
$$E(x^{(k)}(\cdot),W,\delta)\ge\sup_{\substack{x(\cdot)\in W\\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2}\le\delta}}\|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}.\tag{1}$$

Доказательство. Для любого метода φ при всех $x(\cdot)\in H_2^n+\mathcal{P}_m$ таких, что $\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2}\le\delta$, имеем
$$\begin{aligned}2||x^{(k)}(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)}\le||x^{(k)}(\cdot)+\varphi(0)||_{\mathcal{H}_2(D)}+||x^{(k)}(\cdot)-\varphi(0)||_{\mathcal{H}_2(D)}\\ \le 2e(x^{(k)}(\cdot),W,\delta,\varphi).\end{aligned}$$
Следовательно, для любого метода φ
$$e(x^{(k)}(\cdot),W,\delta,m)\ge\sup_{\substack{x(\cdot)\in W\\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2}\le\delta}}||x^{(k)}(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)},$$
откуда сразу вытекает требуемая оценка.

□

Из определения нормы в $\mathcal{H}_2(D)$ вытекает, что
$$\|x(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2(D)}=\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2.$$

Пусть X — некоторое множество и на нем заданы функции $f_j\colon X\to\mathbb{R}$, $j=0,1,\dots,n$. Рассмотрим задачу
$$f_0(x)\to\max,\quad f_j(x)\le 0,\quad x\in X.\tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть $\widehat{x}\in X$ - допустимый элемент в задаче (2) и $\overline{\lambda}=(\lambda_1,...,\lambda_n)$, $\lambda_j\ge 0$, $j=1,\dots,n$, таковы, что*

1)
$$\min_{x\in X}\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=\mathcal{L}(\widehat{x},\overline{\lambda}),$$
2)
$$\lambda_j f_j(\widehat{x})=0,\quad j=1,\dots,n,$$
где
$$\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=-f_0(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(x),$$
— называется функцией Лагранжа задачи (2)*. Тогда* $\widehat{x}$ *— решение* (2).

Доказательство. Имеем
$$-f_0(x)=\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(x).$$
Так как
$$\min_{x\in X}\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=\mathcal{L}(\widehat{x},\overline{\lambda}),\quad \lambda_j f_j(x)\le 0,\quad \lambda_j f_j(\widehat{x})=0,\quad j=1,\dots,n,$$
получаем
$$\sup_{\substack{x\in X\\ f_j(x)\le 0,\, j=1,\dots,n}} f_0(x)=-\inf_{\substack{x\in X\\ f_j(x)\le 0,\, j=1,\dots,n}}(-f_0(x))=$$
$$=-\inf_{\substack{x\in X\\ f_j(x)\le 0,\, j=1,\dots,n}}(\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(x))=-\mathcal{L}(\widehat{x},\overline{\lambda})=f_0(\widehat{x}).$$
Следовательно $\widehat{x}$ — решение (2).

□

4. Восстановление на классе $H_2^n(D)$

Теорема 1. *Пусть* $0<\delta<\dfrac{1}{n!}$, $s=n+1,n+2,...$ *таково, что*
$$\frac{1}{s...(s-n+1)}\le\delta<\frac{1}{(s-1)...(s-n)}.$$
Если $\delta\ge\dfrac{1}{n!}$, *то* s *положим равным* n.
Тогда $E(x^{(k)}(\cdot),H_2^n(D),\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}$, *где*
$$\lambda_1=\frac{s^2...(s-k+1)^2((2s-n)n-(2s-k)k)}{(2s-n)n},$$
$$\lambda_2=\frac{(2s-k)k}{(s-k)^2...(s-n+1)^2(2s-n)n}.$$
а метод
$$\widehat{\varphi}(y)(t)=\sum_{j=k}^{n-1}j...(j-k+1)y_jz^{j-k}+\sum_{j=n}^{\infty}j...(j-k+1)\alpha_jy_jz^{j-k}$$

для всех α_j таких, что

$$(3)\qquad \left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}+\frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)\leq 1,$$

является оптимальным.

Доказательство. Докажем **теорему 1**. Так как x(·) - аналитическая в D, имеем

$$x(z)=\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j, x^{(k)}(z)(\cdot)=\sum_{j=k}^{\infty}j...(j-k+1)a_jz^{j-k-2},$$
$$x^{(n)}(z)(\cdot)=\sum_{j=n}^{\infty}j...(j-n+1)a_jz^{j-n-2}.$$

Тогда экстремальная задача в правой части неравенства (1) на классе $H_2^n(D)$ сводится к следующей

$$\textstyle\sum_{j=k}^{\infty}j^2...(j-k+1)^2|a_j|^2\to\max,\quad \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2\leq\delta^2,$$
$$\sum_{j=n}^{\infty}j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2\leq 1.$$

Выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2(-j^2...(j-k+1)^2+\lambda_1+\lambda_2j^2...(j-n+1)^2).$$

По **Лемме 3**, если $\lambda_1,\lambda_2,\widehat{a_j}$ такие, что

$$1)\min_{a_j}\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2)=\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\},\lambda_1,\lambda_2),$$

$$2)\lambda_1(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2-\delta^2)=0,$$

$$3)\lambda_2(\sum_{j=0}^{\infty}j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2-1)=0,$$

то $\widehat{a_j}$ является решением экстремальной задачи.

Возьмем отличными от 0 только a_s и a_{s-1}, где $s>n$. Из условий 2, 3 имеем

$$\begin{cases}|\widehat{a}_s|^2+|\widehat{a}_{s-1}|^2=\delta^2.\\ s^2...(s-n+1)^2|\widehat{a}_s|^2+(s-1)^2...(s-n)^2|\widehat{a}_{s-1}|^2=1.\end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_{s-1}|^2=\frac{\delta^2s^2...(s-n+1)^2-1}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2},$$

$$|\widehat{a}_s|^2 = \frac{1-\delta^2(s-1)^2...(s-n)^2}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2}.$$

При $\dfrac{1}{s...(s-n+1)} \leq \delta < \dfrac{1}{(s-1)...(s-n)}$, $s = n+1, n+2, ...,$ такие a_s, a_{s-1} существуют.

Получили, что для заданного δ, нам нужно подобрать такое s, чтобы δ попало в заданный выше интервал. При $\delta \geq \dfrac{1}{n!}$ s примем равным n. В этом случае рассмотрим систему

$$\begin{cases} |\widehat{a}_n|^2 + |\widehat{a}_{n-1}|^2 = \delta^2. \\ n^2...1^2|\widehat{a}_n|^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_n|^2 = \frac{1}{n!^2}, |\widehat{a}_{n-1}|^2 = \delta^2 - \frac{1}{n!^2}.$$

Осталось найти такие λ_1, λ_2, удовлетворяющие 1-ому пункту леммы 2. Для этого рассмотрим точки

$$\begin{cases} x_j = j^2...(j-n+1)^2, j = k, k+1, ... \\ y_j = j^2...(j-k+1)^2, j = k, k+1, ... \end{cases}$$

Докажем, что график ломанной, соединяющей эти точки является вогнутым. Для этого докажем, что при $j > n$

$$\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j} < \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}.$$

Распишем отдельно левую и правую часть неравенства.

$$\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j} = \frac{(j+1)^2...(j-k+2)^2 - j^2...(j-k+1)^2}{(j+1)^2...(j-n+2)^2 - j^2...(j-n+1)^2} = \\ = \frac{j^2...(j-k+2)^2 k(2j-k+2)}{j^2...(j-n+2)^2 n(2j-n+2)},$$

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{j^2...(j-k+1)^2 - (j-1)^2...(j-k)^2}{j^2...(j-n+1)^2 - (j-1)^2...(j-n)^2} = \\ = \frac{(j-1)^2...(j-k+1)^2 k(2j-k)}{(j-1)^2...(j-n+1)^2 n(2j-n)}.$$

Подставим полученные значения в изначальное неравенство

$$\frac{j^2...(j-k+2)^2 k(2j-k+2)}{j^2...(j-n+2)^2 n(2j-n+2)} < \frac{(j-1)^2...(j-k+1)^2 k(2j-k)}{(j-1)^2...(j-n+1)^2 n(2j-n)}.$$

Сократив множители, получаем эквивалентное изначальному неравенство

$$\frac{2j-k+2}{2j-n+2} < \frac{(j-k+1)^2(2j-k)}{(j-n+1)^2(2j-n)}.$$

Оно верно, так как $\dfrac{2j-k+2}{2j-n+2} < \dfrac{2j-k}{2j-n}$, а $\dfrac{(j-k+1)^2}{(j-n+1)^2} > 1$.

Проведем прямую через точки, отвечающие параметрам s и $s-1$, где $s \geq n$. Получили прямую $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.
Очевидно, что при таких λ_1 и λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, так как график является вогнутым.

Найдем λ_1, λ_2. Так как прямая проходит через точки, отвечающие параметрам s и $s-1$, получим систему

$$\begin{cases} \lambda_2 s^2 ... (s-n+1)^2 + \lambda_1 = s^2 ... (s-k+1)^2, \\ \lambda_2 (s-1)^2 ... (s-n)^2 + \lambda_1 = (s-1)^2 ... (s-k)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим уравнение на λ_2

$$\lambda_2 s^2 ... (s-n+1)^2 - \lambda_2 (s-1)^2 ... (s-n)^2 = \\ = s^2 ... (s-k+1)^2 - (s-1)^2 ... (s-k)^2.$$

Вынесем λ_2 за скобки и проведем сокращения. Получим

$$\lambda_2 = \frac{(2s-k)k}{(s-k)^2 ... (s-n+1)^2 (2s-n)n}.$$

Подставив λ_2 в изначальное уравнение, найдем λ_1

$$\lambda_1 = \frac{s^2 ... (s-k+1)^2 (n-k)(2s-n-k)}{(2s-n)n}.$$

В итоге получили, что

$$\lambda_1 = \frac{s^2 ... (s-k+1)^2 (n-k)(2s-n-k)}{(2s-n)n},$$

$$\lambda_2 = \frac{(2s-k)k}{(s-k)^2 ... (s-n+1)^2 (2s-n)n}.$$

Осталось подставить $\widehat{a}_{s-1}$ и $\widehat{a}_s$ в $\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|\widehat{a}_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу окончательно.

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & (s-1)^2...(s-k)^2|\widehat{a}_{s-1}|^2 + s^2...(s-k+1)^2|\widehat{a}_s|^2 = \\
&= (s-1)^2...(s-k)^2 \frac{\delta^2 s^2...(s-n+1)^2-1}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2} + \\
&+ s^2...(s-k+1)^2 \frac{1-\delta^2(s-1)^2...(s-n)^2}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2} = \\
&= \frac{\delta^2 s^2...(s-n+1)^2-1}{(s-k-1)^2...(s-n+1)^2 n(2s-n)} + \\
&+ \frac{s^2(1-\delta^2(s-1)^2...(s-n)^2)}{(s-k)^2...(s-n+1)^2 n(2s-n)} = \\
&= \frac{\delta^2(s^2...(s-n+1)^2(s-k)^2 - s^2(s-1)^2...(s-n)^2)}{(s-k)^2...(s-n+1)^2 n(2s-n)} + \\
&+ \frac{s^2-(s-k)^2}{(s-k)^2...(s-n+1)^2 n(2s-n)} = \lambda_1\delta^2+\lambda_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, результатом нашей экстремальной задачи является значение $\lambda_1\delta^2+\lambda_2$.

Теперь займемся построением оптимального метода. Будем искать его в виде

$$
\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{\infty} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k},
$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). Тогда, чтобы найти погрешность данного метода, необходимо решить экстремальную задачу

$$
\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j-\alpha_j y_j|^2 \to \max,
\quad \sum_{j=n}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \le 1,\ \sum_{j=0}^{\infty}|a_j-y_j|^2 \le \delta^2,
$$

где $\alpha_j = 1$ при $k \le j \le n-1$.

Положив $z_j = a_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виде

$$
\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \to \max,
\quad \sum_{j=n}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \le 1, \sum_{j=0}^{\infty}|z_j|^2 \le \delta^2.
$$

Из неравенства Коши-Буняковского при $j \geq n$ имеем

$$\begin{aligned}&|(1-\alpha_j)a_j+\alpha_j z_j|^2\\ &\quad\leq\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}+\frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)\\ &\quad(\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2|a_j|^2+j^{-2}...(j-k+1)^{-2}\lambda_1|z_j|^2).\end{aligned}$$

Выберем α_j так, чтобы

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}+\frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)\leq 1.$$

Докажем, что такие α_j существуют. Для этого выделим в этом неравенстве полный квадрат. Пусть

$$A=\frac{j^2...(j-k+1)^2}{\lambda_1},\quad B=\frac{1}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}.$$

Тогда неравенство выглядит так

$$A|\alpha_j|^2-B|1-\alpha_j|^2\leq 1.$$

Выделяя в нем полный квадрат можно прийти к виду

$$\left|\alpha_j-\frac{B}{A+B}\right|^2\leq\frac{A+B-AB}{(A+B)^2}.$$

Или после подстановки

$$\left|\alpha_j-\frac{B}{A+B}\right|^2\leq\frac{-j^2...(j-k+1)^2+j^2...(j-n+1)^2\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2}.$$

Тогда для существования необходимых α_j достаточно будет доказать, что

$$\frac{-j^2...(j-k+1)^2+j^2...(j-n+1)^2\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2}\geq 0\ \ \forall j\geq n.$$

Но знаменатель ≥ 0, а числитель ≥ 0, потому что график $\begin{cases}x_j=j^2...(j-n+1)^2,\\ y_j=j^2...(j-k+1)^2\end{cases}$
вогнут, а все его точки лежат ниже прямой $\lambda_2 x+\lambda_1=y$.
Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского при $j\geq n$

$$\begin{aligned}&|(1-\alpha_j)a_j+\alpha_j z_j|^2\leq\\ &\quad\leq\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2|a_j|^2+j^{-2}...(j-k+1)^{-2}\lambda_1|z_j|^2.\end{aligned}$$

$$j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2\leq\lambda_2 j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2+\lambda_1|z_j|^2$$

При $j \leq n-1$ возьмем $\alpha_j = 1$. Получим неравенство

$$j^2...(j-k+1)^2|z_j|^2 \leq \lambda_1|z_j|^2,$$

которое необходимо доказать

Докажем, что λ_1 монотонно возрастает. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\frac{s^2...(s-k+1)^2(n-k)(2s-n-k)}{(2s-n)n} <$$
$$< \frac{(s+1)^2...(s-k+2)^2(n-k)(2s-n-k+2)}{(2s-n+2)n}.$$

Сократив множители, получим неравенство

$$\frac{(s-k+1)^2(2s-n-k)}{2s-n} < \frac{(s+1)^2(2s-n-k+2)}{2s-n+2},$$

которое верно, так как $(s-k+1)^2 < (s+1)^2$, а $\dfrac{(2s-n-k)}{2s-n} <$
$< \dfrac{(2s-n-k+2)}{2s-n+2}$.

Таким образом из монотонности получаем, что

$$\min_s \lambda_1 = y_{n-1} \geq y_j = j^2...(j-k+1)^2, k \leq j \leq n-1.$$

Вспоминая нашу экстремальную задачу получаем

$$\textstyle\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_2 j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 + \lambda_1|z_j|^2 \leq \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

Или

$$e(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D), \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Учитывая оценку сверху

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D), \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{\infty} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}$$

является оптимальным. $\square$

Следствие 1. *Положим*

$$n_1 = max\{j : j^2...(j-k+1)^2 \leq \lambda_1\}$$
$$n_2 = min\{j : (j-k)^2...(j-n+1)^2 \geq \frac{1}{\lambda_2}\}$$

Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D)+\mathcal{P}_{n_1}, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n_1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k} \ ,$$

где α_j *удовлетворяют* (3) *является оптимальным.*

Доказательство. Так как $\alpha_j, j \geq n$ из Теоремы 1 мы можем брать любое удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2} + \frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \leq 1.$$

выясним при каких $j \geq n$ можно положить $\alpha_j = 1$. Подставляя $\alpha_j = 1$ в неравенство (4) получаем

$$\frac{j^2...(j-k+1)^2}{\lambda_1} \leq 1$$

или при подстановке λ_1

$$j \leq n_1.$$

Аналогично при подстановке $\alpha_j = 0$ в неравенство (4) получаем

$$\frac{1}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2} \leq 1$$

или

$$j \geq n_2.$$

Тогда при заданных α_j наш оптимальный метод примет такой вид

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n_1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k},$$

где α_j удовлетворяют неравенству (3).

Пусть $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_2^n$, а $x_2 \in \mathcal{P}_{n_1}$. Тогда

$$x_1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \ \ x_2 = \sum_{j=0}^{n_1} b_j z^j.$$

Положим $b_j = 0$ при $j > n_1$. Предположим, что числа $y_j, j \in \mathbb{Z}_+$ таковы, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} |y_j - (a_j + b_j)|^2 \leq \delta^2$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j - (y_j - b_j)|^2 \leq \delta^2.$$

Тогда по ранее решенной задаче восстановления мы знаем оценку снизу для погрешности метода, а именно

$$|x_1^{(k)}(z) - \textstyle\sum_{j=k}^{n_1} j...(j-k+1)(y_j - b_j)z^{j-k} - \\ - \displaystyle\sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Равносильными преобразованиями получаем

$$|x_1^{(k)}(z) + x_2^{(k)}(z) - \textstyle\sum_{j=k}^{n_1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} - \\ - \displaystyle\sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

$$|x^{(k)}(z) - \textstyle\sum_{j=k}^{n_1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} - \\ - \displaystyle\sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}| \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Тогда

$$e(x^{(k)}(\cdot), H_2^n + \mathcal{P}_{n_1}(D), \delta, \varphi) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Следовательно,

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_{n_1}, \delta) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Таким образом мы получили оценку снизу, осталось получить оценку сверху. Из Леммы 1 имеем

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_{n_1}, \delta) \geq \sup_{\substack{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta \\ x(\cdot) \in H_2^n(D) + \mathcal{P}_{n_1}}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} \\ \geq \sup_{\substack{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta \\ x(\cdot) \in H_2^n(D)}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Учитывая оценку снизу получаем

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_{n_1}, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$$

Следствие 1 доказано. □

5. Восстановление на классе $H_2^n(D) + \mathcal{P}_m$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \delta < \dfrac{1}{m!}$, $s = m+1, m+2, ...$ *таково, что*

$$\frac{1}{s...(s-n+1)} \leq \delta < \frac{1}{(s-1)...(s-n)}.$$

Если $\delta \geq \dfrac{1}{m!}$, *то* s *положим равным* m.
Тогда $E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_m, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}$, *где*

$$\lambda_1 = \frac{s^2...(s-k+1)^2((2s-n)n-(2s-k)k)}{(2s-n)n},$$

$$\lambda_2 = \frac{(2s-k)k}{(s-k)^2...(s-n+1)^2(2s-n)n}.$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{\infty} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}$$

для всех α_j *таких, что*

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2} + \frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \leq 1,$$

является оптимальным.

Доказательство. Будем проводить доказательство по той же схеме, как и в доказательстве **теоремы 1**. Сначала сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть* $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, m \in \mathbb{N}, m \geq n, \mathcal{P}_m$ *- многочлены степени* m. *Тогда* $x \in H_2^n(D) + \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \leq 1$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ $\quad x(\cdot) \in H_2^n(D) + \mathcal{P}_m \Leftrightarrow x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$, где $x_1(\cdot) \in H_2^n(D), x_2(\cdot) \in \mathcal{P}_m$. Пусть $x_1(z)(\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, x_2(z)(\cdot) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$. Заметим, что при $j \geq m+1$ $a_j = c_j$. Тогда $x_1(z) \in H_2^n(D) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|c_j|^2 \leq$
$\leq \sum_{j=n}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|c_j|^2 \leq 1$.

2) $\Leftarrow$ $\quad$ Обратно, пусть

$$x(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

и

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n-1)^2|a_j|^2 \leq 1.$$

Тогда $x(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j + \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j z^j$, но $\sum_{j=0}^{m} a_j z^j \in \mathcal{P}_m$, а $\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j z^j \in H_2^n(D)$, так как по условию $\sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \leq 1$. $\square$

По **лемме 3** экстремальная задача в правой части неравенства (1) сводится к следующей

$$\textstyle\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2 \le \delta^2,$$
$$\sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \le 1.$$

Выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2(-j^2...(j-k+1)^2+\lambda_1+\lambda_2\mathcal{X}_{jm}j^2...(j-n+1)^2),$$
$$\mathcal{X}_{jm}=0, j\le m, \quad \mathcal{X}_{jm}=1, j>m.$$

По **лемме 2**, если $\lambda_1, \lambda_2, \widehat{a_j}$ такие, что

$$1)\min_{a_j}\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2)=\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\},\lambda_1,\lambda_2),$$

$$2)\lambda_1(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2-\delta^2)=0,$$

$$3)\lambda_2(\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{X}_{jm}j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2-1)=0,$$

то $\widehat{a_j}$ является решением экстремальной задачи.

Возьмем отличными от 0 только a_s и a_{s-1}, где $s>m$. Из условий 2, 3 имеем

$$\begin{cases}|\widehat{a}_s|^2+|\widehat{a}_{s-1}|^2=\delta^2.\\ s^2...(s-n+1)^2|\widehat{a}_s|^2+(s-1)^2...(s-n)^2|\widehat{a}_{s-1}|^2=1.\end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_{s-1}|^2=\frac{\delta^2 s^2...(s-n+1)^2-1}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2},$$

$$|\widehat{a}_s|^2=\frac{1-\delta^2(s-1)^2...(s-n)^2}{s^2...(s-n+1)^2-(s-1)^2...(s-n)^2}.$$

При $\dfrac{1}{s...(s-n+1)}\le\delta<\dfrac{1}{(s-1)...(s-n)}$, $s=m+1,m+2,...,$ такие a_s, a_{s-1} существуют.

Получили, что для заданного δ, нам нужно подобрать такое s, чтобы δ попало в заданный выше интервал. При $\delta\ge\dfrac{1}{m!}$ s примем равным m. В этом случае рассмотрим систему

$$\begin{cases} |\widehat{a}_m|^2 + |\widehat{a}_{m-1}|^2 = \delta^2. \\ m^2 ... 1^2 |\widehat{a}_m|^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_m|^2 = \frac{1}{m!^2}, |\widehat{a}_{m-1}|^2 = \delta^2 - \frac{1}{m!^2}.$$

Осталось найти такие λ_1, λ_2, удовлетворяющие 1-ому пункту леммы 2. Для этого рассмотрим точки

$$\begin{cases} x_j = j^2 ... (j-n+1)^2 \mathcal{X}_{jm} \\ y_j = j^2 ... (j-k+1)^2 \end{cases}$$

В Доказательстве Теоремы 1 мы показали, что график, соединяющий эти точки будет вогнутым.

Проведем прямую через точки, отвечающие параметрам s и $s-1$, где $s \geq m+1$. Получили прямую $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.
Очевидно, что при таких λ_1 и λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, так как график является вогнутым.

Найдем λ_1, λ_2. Так как прямая проходит через точки, отвечающие параметрам s и $s-1$, получим систему

$$\begin{cases} \lambda_2 s^2 ... (s-n+1)^2 + \lambda_1 = s^2 ... (s-k+1)^2, \\ \lambda_2 (s-1)^2 ... (s-n)^2 + \lambda_1 = (s-1)^2 ... (s-k)^2. \end{cases}$$

Решение данной системы уже проводилось в доказательстве Теоремы 1. В итоге получаем

$$\lambda_1 = \frac{s^2 ... (s-k+1)^2 (n-k)(2s-n-k)}{(2s-n)n},$$

$$\lambda_2 = \frac{(2s-k)k}{(s-k)^2 ... (s-n+1)^2 (2s-n)n}.$$

Осталось подставить $\widehat{a}_{s-1}$ и $\widehat{a}_s$ в $\sum_{j=k}^{\infty} j^2 ... (j-k+1)^2 |\widehat{a}_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу окончательно. Пользуясь цепочкой равенств (3) из доказательства Теоремы 1 получаем

$$(s-1)^2 ... (s-k)^2 |\widehat{a}_{s-1}|^2 + s^2 ... (s-k+1)^2 |\widehat{a}_s|^2 = \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2.$$

Таким образом, результатом нашей экстремальной задачи является значение $\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2$.

Теперь займемся построением оптимального метода. Будем искать его в виде

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} j ... (j-k+1) y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{\infty} j ... (j-k+1) \alpha_j y_j z^{j-k},$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). Тогда, чтобы найти погрешность данного метода, необходимо решить экстремальную задачу

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j-\alpha_j y_j|^2 \to \max,$$
$$\sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \le 1,\ \sum_{j=0}^{\infty}|a_j-y_j|^2 \le \delta^2.$$

Положив $z_j = a_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виде

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \to \max,$$
$$\sum_{j=m+1}^{\infty} j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 \le 1, \sum_{j=0}^{\infty}|z_j|^2 \le \delta^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского при $j \ge m+1$ имеем

$$|(1-\alpha_j)a_j+\alpha_j z_j|^2$$
$$\le \left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}+\frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)$$
$$(\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2|a_j|^2+j^{-2}...(j-k+1)^{-2}\lambda_1|z_j|^2).$$

Выберем α_j так, чтобы

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}+\frac{j^2...(j-k+1)^2|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right) \le 1.$$

Докажем, что такие α_j существуют. Для этого извлечем в этом неравенстве полный квадрат. Пусть

$$A = \frac{j^2...(j-k+1)^2}{\lambda_1},\ \ B = \frac{1}{(j-k)^2...(j-n+1)^2\lambda_2}.$$

Тогда неравенство выглядит так

$$A|\alpha_j|^2 - B|1-\alpha_j|^2 \le 1.$$

Выделяя в нем полный квадрат можно прийти к виду

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \le \frac{A+B-AB}{(A+B)^2}.$$

Или после подстановки

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \le \frac{-j^2...(j-k+1)^2+j^2...(j-n+1)^2\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2}.$$

Тогда для существования необходимых α_j достаточно будет доказать, что

$$\frac{-j^2...(j-k+1)^2 + j^2...(j-n+1)^2\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2} \geq 0 \;\; \forall j \geq m+1.$$

Но знаменатель ≥ 0, а числитель ≥ 0 потому что график
$\begin{cases} x_j = j^2...(j-n+1)^2\mathcal{X}_{jm}, \\ y_j = j^2...(j-k+1)^2 \end{cases}$
вогнут, а все его точки лежат ниже прямой $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.
Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского при $j \geq m+1$

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \leq$$
$$\leq \lambda_2(j-k)^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 + j^{-2}...(j-k+1)^{-2}\lambda_1|z_j|^2.$$

$$j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \leq \lambda_2 j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 + \lambda_1|z_j|^2.$$

При $j \leq m$ возьмем $\alpha_j = 1$. Получим неравенство

$$j^2...(j-k+1)^2|z_j|^2 \leq \lambda_1|z_j|^2,$$

Так как λ_1 монотонно возрастает, получаем

$$\lambda_{1min} = y_m \geq y_j = j^2...(j-k+1)^2, k \leq j \leq m.$$

Вспоминая нашу экстремальную задачу получаем

$$\textstyle\sum_{j=k}^{\infty} j^2...(j-k+1)^2|a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_2 j^2...(j-n+1)^2|a_j|^2 + \lambda_1|z_j|^2 \leq \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

Или

$$e(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_m, \delta, \widehat{\varphi}) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Учитывая оценку сверху

$$E(x^{(k)}(\cdot), H_2^n(D) + \mathcal{P}_m, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} j...(j-k+1)y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{\infty} j...(j-k+1)\alpha_j y_j z^{j-k}$$

является оптимальным. □

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой, Мат. сб., — 2002, 193, 79-100.

[2] К. Ю. Осипенко, Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках, Матем. сб., 2014, 205, 10, 77-106.