# О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций*

**Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ**
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН*
e-mail: magaril@mech.math.msu.su

**К. Ю. ОСИПЕНКО**
*МАТИ — Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского,
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН*
e-mail: kosipenko@yahoo.com

УДК 517.984.64

**Ключевые слова:** оптимальное восстановление, периодическая функция, экстремальная задача, коэффициенты Фурье.

**Аннотация**

В работе строятся оптимальные методы восстановления периодических функций по известному (точно или приближённо) конечному набору их коэффициентов Фурье. Предлагаемый подход к построению таких методов сравнивается с подходом к решению подобных задач, основанным на методе регуляризации по А. Н. Тихонову.

**Abstract**

*G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, On best harmonic synthesis of periodic functions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 155—174.

In this paper, we construct optimal methods of recovery of periodic functions from a known (exact or inexact) finite family of their Fourier coefficients. The proposed approach to constructing recovery methods is compared with the approach based on the Tikhonov regularization method.

Работа посвящена построению наилучших (оптимальных) методов восстановления функций по их приближённо заданным коэффициентам Фурье. Такие методы строятся сразу для целого класса функций, что определят их важную специфику: используются, вообще говоря, не все доступные для измерения (точного или неточного) коэффициенты Фурье, используемые же подвергаются некоторому «сглаживанию». Это полностью согласуется с тем, что происходит

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12447 и № 14-01-92004).

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 5, с. 155—174.

в инженерной практике, связанной с цифровой обработкой сигналов: высокие частоты отбрасываются, а низкие тем или иным способом фильтруются.

Предлагаемый подход к определению оптимального метода идейно восходит к работам А. Н. Колмогорова о нахождении наилучшего подпространства среди всех подпространств фиксированной размерности, аппроксимирующего данный класс функций. Этот подход можно было бы назвать колмогоровской регуляризацией. Он является определённой альтернативой регуляризации по А. Н. Тихонову, где рассматриваются индивидуальные объекты и при этом не учитывается конкретное значение погрешности измерения (которое может быть и не близким к нулю) и не обсуждается вопрос о наилучших методах.

Структура статьи следующая. Мы начинаем с рассмотрения одного примера тихоновской регуляризации в задаче восстановления функции в точке по её неточно заданным коэффициентам Фурье. Пример взят из классического университетского учебника по математическому анализу [1]. Затем мы даём свой вариант решения данной задачи, основанный на колмогоровской регуляризации. После этого приводятся точные решения ряда задач оптимального восстановления функций и их производных в среднеквадратической метрике по точно или неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье. Отметим, что в [2—8] изучались задачи, близкие к изложенным здесь, а именно задачи оптимального восстановления функций (периодических и заданных на $\mathbb{R}^d$) и операторов от них по неточно заданному спектру.

## 1. Об одной задаче восстановление функции по неточно заданным коэффициентам Фурье

В [1] рассматривается следующая задача. Пусть $2\pi$-периодическая функция $x(\cdot)$ такова, что её ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= a_k\big(x(\cdot)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_k &= b_k\big(x(\cdot)\big) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

сходится к $x(\cdot)$ равномерно.

Вместо точных значений коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$ известны их приближённые значения $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, такие что

$$\frac{(a_0-\tilde{a}_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big((a_k-\tilde{a}_k)^2+(b_k-\tilde{b}_k)^2\big)\leqslant\delta^2,$$

где $\delta>0$. По этой информации требуется восстановить значение функции $x(\cdot)$ в некоторой точке $\tau$.

Нетрудно доказать, что как бы быстро ни сходился исходный ряд к $x(\tau)$ и как бы ни было мало $\delta>0$, можно указать такие числа $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, что сумма ряда

$$\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k\cos kt+\tilde{b}_k\sin kt)$$

будет отличаться от $x(\tau)$ на любое наперёд заданное число или даже ряд будет расходиться.

Для решения проблемы восстановления функции $x(\cdot)$ в точке $\tau$ предлагается следующая процедура. В качестве приближённого значения $x(\tau)$ рассматривается ряд

$$\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha k^2}(\tilde{a}_k\cos k\tau+\tilde{b}_k\sin k\tau),$$

где $\alpha$ того же порядка малости, что и $\delta$ (например, можно положить $\alpha=\delta$). Доказывается, что если $x(\cdot)\in L_2(\mathbb{T})$ (здесь и далее под $\mathbb{T}$ понимается отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами) и $x(\cdot)$ непрерывна в $\tau$, то данный ряд сходится к $x(\tau)$ при $\alpha\to 0$.

В заключительном замечании авторы [1] пишут: «...должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при *имеющейся точности* измерения частотных характеристик извлечь *максимальную* информацию об изучаемом процессе» (курсив наш).

Подход, который мы называем колмогоровской регуляризацией, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции $x(\cdot)$. Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся фиксированную точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных.

Перейдём к точной постановке задачи. Обозначим через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ пространство абсолютно непрерывных $2\pi$-периодических функций $x(\cdot)$, у которых производная $\dot{x}(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. Норма функции $x(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{T})$ определяется следующим образом:

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то в каждой точке $t \in \mathbb{T}$ функция $x(\cdot)$ разлагается в ряд Фурье, который сходится к ней равномерно.

В пространстве $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^1(\mathbb{T}) = \bigl\{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \colon \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\bigr\}.$$

Обозначим через $l_2$ пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением

$$\langle y, y' \rangle = \frac{a_0 a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k y_k',$$

где $y = (y_0, y_1, \ldots)$, $y' = (y_0', y_1', \ldots)$, и с соответствующей нормой

$$\|y\|_{l_2} = \biggl(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\biggr)^{1/2}.$$

Если функция $x(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то её коэффициенты Фурье принадлежат $l_2$. Пусть $F \colon \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}) \to l_2$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$, т. е. $Fx(\cdot) = \bigl(a_0\bigl(x(\cdot)\bigr), a_1\bigl(x(\cdot)\bigr), b_1\bigl(x(\cdot)\bigr), \ldots\bigr)$ — набор коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$.

Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны приближённо её коэффициенты Фурье, а именно известен вектор

$$y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1 \ldots) \in l_2,$$

такой что

$$\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$.

Любой метод восстановления $x(\tau)$ должен ставить в соответствие вектору (наблюдению) $y$ число, являющееся некоторым приближением к $x(\tau)$. Таким образом, любой метод — это некоторая функция $\varphi \colon l_2 \to \mathbb{R}$. *Погрешностью* данного метода назовём величину

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}),\ y \in l_2 \\ \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = \inf_{\varphi \colon l_2 \to \mathbb{R}} e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\hat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т. е. такой метод $\hat{\varphi}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \hat{\varphi}).$$

**Теорема 1.** *Для любого $\delta > 0$*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\hat{a} + \delta^2)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1 + \hat{a}k^2)^2}\biggr)^{1/2},$$

*где $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения*

$$\frac{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+ak^2)^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{(1+ak^2)^2}} = \delta^2.$$

*Метод $\hat{\varphi}$, действующий по правилу*

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\hat{a}k^2}(\tilde{a}_k \cos k\tau + \tilde{b}_k \sin k\tau),$$

*является оптимальным.*

Как видно из формулировки теоремы, для любого $\delta > 0$ метод регуляризации, предложенный в [1], является оптимальным на классе $W_2^1(\mathbb{T})$ при $\alpha = \hat{a}(\delta)$. Кроме того, минимальная ошибка оценивания $x(\tau)$ даётся величиной $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$, которая стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Заметим ещё, что информация о функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$, заключающаяся в том, что известен вектор $y \in l_2$, такой что $\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \delta$, равносильна в силу равенства Парсеваля тому, что известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, такая что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \delta$.

**Доказательство теоремы 1.** Покажем сначала, что погрешность оптимального восстановления $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$ не меньше значения задачи

$$x(\tau) \to \max, \quad x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T}), \quad \|Fx(\cdot)\|_{l_2} \leqslant \delta, \tag{2}$$

т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть $\varphi\colon l_2 \to \mathbb{R}$ — произвольный метод восстановления, $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ (тогда и $-x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$) и $\|Fx(\cdot)\|_{l_2} \leqslant \delta$. Имеем

$$2x(\tau) \leqslant \bigl|x(\tau) - \varphi(0) - \bigl(-x(\tau) - \varphi(0)\bigr)\bigr| \leqslant |x(\tau) - \varphi(0)| + |-x(\tau) - \varphi(0)| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\\ \|Fx(\cdot)\|_{l_2}\leqslant\delta}} |x(\tau) - \varphi(0)| \leqslant 2 \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_2,\\ \|Fx(\cdot)-y\|_{l_2}\leqslant\delta}} |x(\tau) - \varphi(y)| = 2e(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta, \varphi).$$

Переходя слева к верхней грани по всем указанным $x(\cdot)$, а затем справа по всем методам $\varphi$, получаем требуемое.

Теперь найдём значение задачи (2) (и тем самым получим оценку снизу для погрешности оптимального восстановления). Для этого удобно переписать задачу в терминах коэффициентов Фурье. Если $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то согласно равенству Парсеваля

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \|Fx(\cdot)\|^2_{l_2} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

$$\|\dot{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \|F\dot{x}(\cdot)\|^2_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2),$$

где $a_k = a_k\bigl(x(\cdot)\bigr)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $b_k = b_k\bigl(x(\cdot)\bigr)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда задача (2) перепишется в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) \leqslant 1, \\ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \delta^2. \tag{3}$$

Заметим, что эта задача как задача на последовательностях $(a_0, a_1, b_1, \dots)$ (всюду далее такую последовательность обозначаем $\{a_k, b_k\}$) из $l_2$, для которых последовательность $\{ka_k, kb_k\}$ также принадлежат $l_2$ (обозначим пространство таких последовательностей через $l_2^1$), равносильна задаче (2) в том смысле, что если $\{a_k, b_k\} \in l_2^1$, то существует единственная функция $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, для которой $\{a_k, b_k\}$ — последовательность её коэффициентов Фурье. Ограничения в (3) переходят в ограничения в (2), $x(\tau)$ — это максимизируемый функционал в (3).

Если мы найдём решение задачи (3), то тем самым найдём и её значение. Эта задача является выпуклой. Воспользуемся достаточными условиями существования решения. Функция Лагранжа задачи (3) имеет вид

$$\mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) + \\ + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) + \lambda_2\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Если найдётся допустимая в (3) (т. е. удовлетворяющая ограничениям) последовательность $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ и множители Лагранжа $\hat{\lambda}_1 \geqslant 0$, $\hat{\lambda}_2 \geqslant 0$, такие что

(a) $\displaystyle\min_{\{a_k, b_k\} \in l_2^1} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$,

(b) $\displaystyle\hat{\lambda}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2(\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - 1\right) = 0, \quad \hat{\lambda}_2\left(\frac{\hat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) - \delta^2\right) = 0$,

то $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ — решение задачи (3).

Проверка этого достаточно проста. Действительно, для любой допустимой последовательности $\{a_k, b_k\}$, используя условия (a) и (b), получаем, что

$$-\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \geqslant -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) + \\ + \hat{\lambda}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) - 1\right) + \hat{\lambda}_2\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) - \delta^2\right) = \\ = \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2\delta^2 \geqslant \mathcal{L}(\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2\delta^2 =$$

$$= \frac{\hat a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(\hat a_k \cos k\tau + \hat b_k \sin k\tau) + \hat\lambda_1\biggl(\sum_{k+1}^{\infty} k^2(\hat a_k^2 + \hat b_k^2) - 1\biggr) + \\ + \hat\lambda_2\biggl(\frac{\hat a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat a_k^2 + \hat b_k^2) - \delta^2\biggr) = -\frac{\hat a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(\hat a_k \cos k\tau + \hat b_k \sin k\tau),$$

т. е. $\{\hat a_k, \hat b_k\}$ — решение задачи (3).

Далее рассуждаем эвристически, пытаясь понять, какой вид должна иметь последовательность $\{\hat a_k, \hat b_k\}$ и множители Лагранжа $\hat\lambda_1 \geqslant 0$, $\hat\lambda_2 \geqslant 0$, если они удовлетворяют условиям (a) и (b). Функция Лагранжа как функция последовательности $\{a_k, b_k\}$ является гладкой, и из условия (a) следует, что производная этой функции в точке $\{\hat a_k, \hat b_k\}$ равна нулю. Формально вычисляя эту производную, приходим к тому, что для любой последовательности $\{a_k, b_k\}$ должно выполняться тождество

$$-\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) + 2\hat\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\hat a_k a_k + \hat b_k b_k) + \\ + 2\hat\lambda_2\biggl(\frac{\hat a_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat a_k a_k + \hat b_k b_k)\biggr) = 0. \quad (4)$$

Беря последовательности вида $(1,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),\ldots$, получаем, что

$$\hat a_0 = \frac{1}{2\hat\lambda_2}, \quad \hat a_k = \frac{\cos k\tau}{2(\hat\lambda_1 k^2 + \hat\lambda_2)}, \quad \hat b_k = \frac{\sin k\tau}{2(\hat\lambda_1 k^2 + \hat\lambda_2)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Если считать, что $\hat\lambda_1 > 0$ и $\hat\lambda_2 > 0$, то для выполнения условия (b) необходимо, чтобы выражения в скобках в этом условии равнялись нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(\hat a_k^2 + \hat b_k^2) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(\hat\lambda_1 k^2 + \hat\lambda_2)^2} = 1$$

и

$$\frac{\hat a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat a_k^2 + \hat b_k^2) = \frac{1}{4}\biggl(\frac{1}{2\hat\lambda_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\hat\lambda_1 k^2 + \hat\lambda_2)^2}\biggr) = \delta^2.$$

Обозначая $a = \hat\lambda_1/\hat\lambda_2$ и деля второе уравнение на первое, получаем, что

$$\frac{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+ak^2)^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(1+ak^2)^2}} = \delta^2. \quad (6)$$

Теперь рассуждаем точно. Выражение в левой части (6) определяет функцию $f$ (переменного $a$) на $(0,\infty)$. Покажем, что для любого $\delta > 0$ существует единственное $\hat a = \hat a(\delta) > 0$, такое что $f(\hat a) = \delta^2$. Для этого сначала докажем, что $\lim\limits_{a\to 0} f(a) = 0$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = +\infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $n \geqslant 6$ таково, что $1/n < \varepsilon$. Так как, очевидно,

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+ak^2)^2}\right)=\frac{1}{2}+n<2n+1$$

и

$$\lim_{a\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2}=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}>n(2n+1),$$

то существует такое $a_0>0$, что для всех $0<a<a_0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+ak^2)^2}<2n+1,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2}>n(2n+1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+ak^2)^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Ясно, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(1+ak^2)^2}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2}.$$

Складывая полученные неравенства и затем деля одно на другое, получаем, что для всех $0<a<a_0$

$$f(a)=\frac{\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+ak^2)^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(1+ak^2)^2}}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{a\to 0}f(a)=0$.

С другой стороны, для любого $a>0$

$$f(a)=\frac{\dfrac{a^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a^{-1}+k^2)^2}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(a^{-1}+k^2)^2}}>\frac{a^2}{2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}},$$

откуда сразу следует, что $\lim\limits_{a\to+\infty}f(a)=+\infty$.

Для доказательства единственности покажем, что $f$ строго монотонно возрастает на $(0,\infty)$. Для этого достаточно показать, что она строго монотонно возрастает на любом отрезке $[a_0,a_1]$, где $0<a_0<a_1<\infty$. На каждом таком отрезке выполнены стандартные условия о почленном дифференцировании рядов, входящих в определение $f$, и мы имеем для $a\in[a_0,a_1]$

$$f'(a)=\frac{2g(a)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2}{(1+ak^2)^2}\right)^2},$$

где

$$g(a) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2} + \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+ak^2)^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{(1+ak^2)^3} >$$

$$> -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+ak^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+ak^2)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{(1+ak^2)^3} =$$

$$= -\sum_{j,k=1}^{\infty}\alpha_{jk} + \sum_{j,k=1}^{\infty}\beta_{jk}$$

и

$$\alpha_{jk} = \frac{j^2k^2}{(1+aj^2)^3(1+ak^2)^2}, \quad \beta_{jk} = \frac{k^4}{(1+aj^2)^2(1+ak^2)^3}.$$

Отсюда следует, что

$$-\alpha_{jk} + \beta_{kj} = \frac{j^2(j^2-k^2)}{(1+aj^2)^3(1+ak^2)^2}, \quad \alpha_{kj} + \beta_{jk} = \frac{k^2(k^2-j^2)}{(1+ak^2)^3(1+aj^2)^2},$$

и тогда получаем, что

$$- \alpha_{jk} + \beta_{kj} - \alpha_{kj} + \beta_{jk} =$$

$$= \frac{j^2-k^2}{(1+aj^2)^2(1+ak^2)^2}\left(\frac{j^2}{1+aj^2} - \frac{k^2}{1+ak^2}\right) = \frac{(j^2-k^2)^2}{(1+aj^2)^3(1+ak^2)^3} \geqslant 0.$$

Тем самым $g(a) > 0$, и значит, $f'(a) > 0$ для любого $a \in (0,\infty)$. Единственность доказана.

Пусть $\delta > 0$ и $\hat{a} = \hat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения $f(a) = \delta^2$. Полагаем

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_2(\hat{a}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+\hat{a}k^2)^2}\right)^{1/2},$$

$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1(\hat{a}) = \hat{a}\hat{\lambda}_2$, и пусть с данными $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ числа $\hat{a}_0$, $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$, $k \in \mathbb{N}$, определены формулами (5).

Последовательность $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$, как легко убедиться, принадлежит $l_2^1$, и элементарный подсчёт показывает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) = 1, \quad \frac{\hat{a}_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) = \delta^2, \tag{7}$$

так что эта последовательность допустима в задаче (3).

Вторая и третья суммы в выражении (4) являются скалярными произведениями соответственно последовательностей $\{k\hat{a}_k, k\hat{b}_k\}$, $\{ka_k, kb_k\}$ и $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$, $\{a_k, b_k\}$ и поэтому имеют смысл. Подставляя в (4) выражения для $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $\hat{a}_0$, $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$, $k \in \mathbb{N}$, после элементарных преобразований видим, что это верное равенство для любой последовательности $\{a_k, b_k\} \in l_2^1$.

Пусть функция $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ такова, что $\{\hat{a}_k, \hat{b}_k\}$ — последовательность её коэффициентов Фурье. Тогда (4) и равенство Парсеваля дают, что для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ справедливо равенство

$$x(\tau) = 2\hat{\lambda}_1 \langle F\dot{\hat{x}}(\cdot), F\dot{x}(\cdot)\rangle + 2\hat{\lambda}_2 \langle F\hat{x}(\cdot), Fx(\cdot)\rangle. \tag{8}$$

Если подставить сюда вместо $x(\cdot)$ функцию $\hat{x}(\cdot)$, то получим

$$\hat{x}(\tau) = (\hat{a} + \delta^2)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\hat{a}k^2)^2}\biggr)^{1/2}.$$

Величина слева — значение максимизируемого функционала в задаче (2) на функции $\hat{x}(\cdot)$, и поэтому значение самой задачи не меньше этой величины.

По доказанному погрешность оптимального восстановления $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$ не меньше значения задачи (2), и значит,

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) \geqslant (\hat{a} + \delta^2)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\hat{a}k^2)^2}\biggr)^{1/2}. \tag{9}$$

Заметим, что на самом деле функция $\hat{x}(\cdot)$ является решением задачи (2), но нам это не нужно, поэтому на этом не будем останавливаемся.

Оценим теперь сверху величину $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$ и проверим, что метод $\hat{\varphi}$ из формулировки теоремы является оптимальным. Оценим погрешность этого метода. Пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$, $y = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \ldots) \in l_2$ и $\|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \delta$. Нетрудно убедиться, что $\hat{\varphi}(y) = 2\hat{\lambda}_2\langle F\hat{x}(\cdot), y\rangle$. Тогда ввиду тождества (8), неравенства Коши—Буняковского, равенства Парсеваля, равенств (7) и условий на $x(\cdot)$ и $y$ имеем

$$\begin{aligned}
|x(\tau) - \hat{\varphi}(y)| &= |2\hat{\lambda}_1 \langle F\dot{\hat{x}}(\cdot), F\dot{x}(\cdot)\rangle + 2\hat{\lambda}_2 \langle F\hat{x}(\cdot), Fx(\cdot) - y\rangle| \leqslant \\
&\leqslant 2\hat{\lambda}_1 \|F\dot{\hat{x}}(\cdot)\|_{l_2} \|F\dot{x}(\cdot)\|_{l_2} + 2\hat{\lambda}_2 \|F\hat{x}(\cdot)\|_{l_2} \|Fx(\cdot) - y\|_{l_2} \leqslant \\
&\leqslant 2\hat{\lambda}_2 \hat{a} + 2\hat{\lambda}_2 \delta^2 = (\hat{a} + \delta^2)\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\hat{a}k^2)^2}\biggr)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (9) следует оптимальность метода $\hat{\varphi}$ и нужное выражение для величины $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$. □

## 2. Оптимальное восстановление функций и их производных по конечному набору коэффициентов Фурье

В предыдущем разделе информация о коэффициентах Фурье состояла в том, что все они были приближённо известны в метрике $l_2$. С практической точки зрения более естественной представляется ситуация, когда имеется возможность измерить приближённо каждый из некоторого конечного набора коэффициентов Фурье функции. В данном разделе рассматривается именно этот случай, причём восстанавливать функцию и её производные мы будем не в точке, а «целиком» в метрике $L_2(\mathbb{T})$. При этом возникает интересный эффект, заключающийся в том, что не все приближённо измеренные коэффициенты Фурье используются в оптимальном методе восстановления. Для того чтобы показать, что этот эффект связан не только с наличием погрешности в исходных данных, мы сначала рассмотрим случай, когда известен конечный набор точно измеренных коэффициентов Фурье.

## 2.1. Восстановление в среднеквадратической метрике по точным значениям коэффициентов Фурье

Пусть $n$ натуральное. Обозначим через $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$ пространство $2\pi$-периодических функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. В пространстве $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$ рассмотрим класс функций

$$W_2^n(\mathbb{T}) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}) \mid \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\}.$$

Мы ставим следующую задачу. Пусть $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $B \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — конечные множества (одно из них может быть пустым) и для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ нам известны её коэффициенты Фурье $\{a_k\}_{k\in A}$ и $\{b_k\}_{k\in B}$, т. е. функции $x(\cdot)$ соответствует набор $F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k\in A}, \{b_k\}_{b\in B})$ из $N$ чисел, где $N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$. Как наилучшим образом восстановить функции из $W_2^n(\mathbb{T})$ и их $r$-е производные, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, в метрике $L_2(\mathbb{T})$, используя данную информацию? Поступаем следующим образом. Любой метод $\varphi$, призванный восстановить $x^{(r)}(\cdot)$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ по набору $F_{A,B}x(\cdot)$, ставит в соответствие этому набору функцию $\varphi\big(F_{A,B}x(\cdot)\big)(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, т. е. $\varphi$ — это отображение из $\mathbb{R}^N$ в $L_2(\mathbb{T})$.

Погрешностью метода $\varphi$ назовём величину

$$e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi) = \sup_{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T})} \big\|x^{(r)}(\cdot) - \varphi\big(F_{A,B}x(\cdot)\big)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

($D^r$ обозначает оператор $r$-кратного дифференцирования, $D^0$ — тождественный оператор), представляющую собой максимальное на классе $W_2^n(\mathbb{T})$ уклонение функции $x^{(r)}(\cdot)$ от функции, которая её «восстанавливает» согласно данному методу.

Нас, как и раньше, интересует тот метод, погрешность которого минимальна. Точнее говоря, нас интересует величина

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T})} e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi),$$

которую мы называем *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы, на которых нижняя грань достигается, т. е. такие методы $\hat{\varphi}$, что

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \hat{\varphi}).$$

Подобные методы будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Свяжем со множествами $A$ и $B$ число

$$k_0 = k_0(A,B) = \min\Big\{ \min_{k\in\mathbb{N}\setminus A} k,\ \min_{k\in\mathbb{N}\setminus B} k \Big\}.$$

Обозначим через $\chi_r$ функцию на $\mathbb{Z}_+$, равную единице в нуле и нулю в остальных точках.

**Теорема 2.** *Если* $0 \notin A$, *то*

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty.$$

*Если* $1 \leqslant r \leqslant n-1$ *или* $r = 0$ *и* $0 \in A$, *то*

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \frac{1}{k_0^{n-r}}$$

*и для любых наборов чисел* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\in A}$ *и* $\beta = \{\beta_k\}_{k\in B}$, *таких что*

$$|\alpha_k - 1| \leqslant \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in A, \quad |\beta_k - 1| \leqslant \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n-r}, \quad k \in B,$$

*метод*

$$\hat{\varphi}_{\alpha,\beta}\big(F_{A,B}x(\cdot)\big)(t) = \\ = \frac{a_0}{2}\chi_r + \sum_{k\in A\setminus\{0\}} k^r \alpha_k a_k \cos\left(kt + \frac{\pi r}{2}\right) + \sum_{k\in B} k^r \beta_k b_k \sin\left(kt + \frac{\pi r}{2}\right)$$

*является оптимальным.*

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Условие, что $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty$, если $0 \notin A$, означает, что никаким способом нельзя восстановить функции из класса $W_2^n(\mathbb{T})$, и в этом смысле любой метод оптимален.
2. Все оптимальные методы линейны и существует оптимальный метод, который использует коэффициенты Фурье только с номерами до $k_0 - 1$ (нетрудно проверить, что при $k \geqslant k_0$ коэффициенты $\alpha_k$ и $\beta_k$ можно положить равными нулю). При этом если $k_0 = 1$ и $r \geqslant 1$, то оптимальный метод нулевой.
3. Среди оптимальных методов есть «естественные», когда $\alpha_k = \beta_k = 1$, т. е. в ряд Фурье подставляются известные коэффициенты Фурье.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, начнём с оценки снизу величины $E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B})$. Фактически те же рассуждения, что и раньше приводят к соотношению

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}),\\ F_{A,B}x(\cdot)=0}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \tag{10}$$

Пусть $r = 0$. Если $0 \notin A$, то любая функция $x(\cdot)$, являющаяся константой, удовлетворяет условиям, что $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ и $F_{A,B}x(\cdot) = 0$, а величина

$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$ может быть сделана сколь угодно большой. Тогда из (10) следует, что $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) = +\infty$.

Пусть теперь $0 \in A$. Если $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus A\}$, то рассмотрим функцию $t \mapsto x_0(t) = k_0^{-n} \cos k_0 t$. Легко проверить, что $x_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$, $F_{A,B} x_0(\cdot) = 0$ и $\|x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = k_0^{-n}$. Если же $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus B\}$, то надо рассмотреть функцию $t \mapsto k_0^{-n} \sin k_0 t$, которая обладает теми же свойствами. Таким образом, правая часть (10) не меньше $k_0^{-n}$, и значит,

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geqslant \frac{1}{k_0^n}. \tag{11}$$

Оценим теперь сверху величину $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B})$ и проверим оптимальность методов $\hat{\varphi}_{\alpha,\beta}$ из формулировки теоремы.

Пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$. Используя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\begin{aligned}\big\|x(\cdot) - \varphi_{\alpha,\beta}\big(F_{A,B}x(\cdot)\big)(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{T})} &= \sum_{k \in A \setminus \{0\}} (1-\alpha_k)^2 a_k^2 + \sum_{k \in B} (1-\beta_k)^2 b_k^2 + \\ &+ \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A} a_k^2 + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B} b_k^2 \leqslant \max_{k \in A \setminus \{0\}} \frac{(1-\alpha_k)^2}{k^{2n}} \sum_{k \in A \setminus \{0\}} k^{2n} a_k^2 + \\ &+ \max_{k \in B} \frac{(1-\beta_k)^2}{k^{2n}} \sum_{k \in B} k^{2n} b_k^2 + \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A} k^{2n} a_k^2 + \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus B} k^{2n} b_k^2.\end{aligned}$$

Учитывая условия на векторы $\alpha$ и $\beta$, получаем, что для любого метода $\hat{\varphi}_{\alpha,\beta}$ с такими наборами $\alpha$ и $\beta$

$$\big\|x(\cdot) - \hat{\varphi}_{\alpha,\beta}\big(F_{A,B}x(\cdot)\big)(\cdot)\big\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{k_0^{2n}} \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{k_0^{2n}}$$

для всех $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$e(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \hat{\varphi}_{\alpha,\beta}) \leqslant \frac{1}{k_0^n}.$$

Сравнивая это с оценкой (11), получаем утверждения теоремы для случая, когда $r = 0$ и $0 \in A$.

Пусть теперь $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Беря те же функции $t \mapsto k_0^{-n} \cos k_0 t$ и $t \mapsto k_0^{-n} \sin k_0 t$, что и выше, получаем, что величина справа в (10) не меньше $k_0^{-(n-r)}$, и значит,

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}) \geqslant \frac{1}{k_0^{n-r}}. \tag{12}$$

Оценка погрешности метода $\hat{\varphi}_{\alpha,\beta}$ получается совершенно аналогично тому, как это сделано выше для $r = 0$. □

## 2.2. Восстановление в среднеквадратической метрике по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью

В этом разделе рассматривается задача восстановления функции и её производных на том же классе $W_2^n(\mathbb{T})$ с теми же множествами $A$ и $B$, но вместо точных значений коэффициентов Фурье $a_k = a_k\big(x(\cdot)\big)$, $k \in A$, и $b_k = b_k\big(x(\cdot)\big)$, $k \in B$, функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ известны их приближённые значения, т. е. такие числа $\{\tilde a_k\}_{k\in A}$ и $\{\tilde b_k\}_{k\in B}$, что

$$|a_k - \tilde a_k| \leqslant \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \tilde b_k| \leqslant \delta, \quad k \in B.$$

Удобно записать это по-другому. Обозначим через $l_\infty^N$ пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой $\|y\|_\infty = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant N-1} |y_j|$, где $y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$. Будем считать, для определённости, что

$$F_{A,B}x(\cdot) = (a_{k_0}, a_{k_1}, \dots, a_{k_{N_1}}, b_{l_1}, \dots, b_{l_{N_2}}),$$

где $k_0 < \dots < k_{N_1}$ и $l_1 < \dots < l_{N_2}$, $N_1 + 1 + N_2 = N$. Тогда можно сказать, что нам известен вектор $y = (y_0, \dots, y_N)$, такой что $\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_\infty \leqslant \delta$.

*Погрешностью* метода $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T})$ в рассматриваемом случае называется величина

$$e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N,\\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_\infty\leqslant\delta}} \|x^{(r)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

*Погрешностью оптимального восстановления* назовём величину

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N \to L_2(\mathbb{T})} e(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi),$$

а метод $\hat\varphi$, на котором достигается нижняя грань, будем по-прежнему называть *оптимальным методом восстановления*.

Положим

$$\hat p = \hat p(\delta) = \max\left\{p \in \mathbb{Z}_+ \colon 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p} k^{2n} < 1\right\}$$

и $p_0 = p_0(A, B, \delta) = \min\{\hat p,\ k_0 - 1\}$, где $k_0 = k_0(A, B)$ определено перед теоремой 2. Функция $\chi_r$ на $\mathbb{Z}_+$ также определена перед теоремой 2.

**Теорема 3.** *Если $0 \notin A$, то*

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty.$$

*Если $1 \leqslant r \leqslant n-1$ или $r = 0$ и $0 \in A$, то*

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \\ = \sqrt{\frac{1}{(p_0+1)^{2(n-r)}} + \frac{\delta^2}{2}\chi_r + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} k^{2r}\left(1 - \left(\frac{k}{p_0+1}\right)^{2(n-r)}\right)}$$

*и метод*

$$\hat{\varphi}(\{\tilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\tilde{b}_k\}_{k\in B})(t) = \\ = \frac{\tilde{a}_0}{2}\chi_r + \sum_{k=1}^{p_0}\left(1-\left(\frac{k}{p_0+1}\right)^{2(n-r)}\right)k^r\left(\tilde{a}_k\cos\left(kt+\frac{\pi r}{2}\right)+\tilde{b}_k\sin\left(kt+\frac{\pi r}{2}\right)\right)$$

*является оптимальным.*

Важно отметить, что если $\hat{p} \leqslant k_0 - 1$, то коэффициенты Фурье с номерами, большими $\hat{p}$, можно отбросить — оптимальный метод их не использует.

Заметим ещё, что при $\delta = 0$ формально получается значение погрешности оптимального восстановления из предыдущей теоремы, так как в этом случае естественно считать, что $p_0 = k_0 - 1$. Кроме того, при $\delta = 0$ получается один из методов, указанных в теореме 2, а именно когда

$$\alpha_k = \beta_k = 1 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^{2(n-r)}, \quad k = 1, \ldots, k_0 - 1,$$

а остальные $\alpha_k$ и $\beta_k$ равны нулю.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Пользуясь тем же приёмом, что и при доказательстве теоремы 1, нетрудно показать, что справедлива следующая оценка для погрешности оптимального восстановления:

$$E(D^r, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}),\\ \|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty\leqslant\delta}} \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \tag{13}$$

Пусть $r = 0$. Заметим, что если $0 \notin A$, то для любой функции $x(\cdot)$, являющейся константой, выполняются условия $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ и $\|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta$ ($F_{A,B}x(\cdot)$ — нулевой вектор), и тем самым правая часть в (13) может быть сделана сколь угодно большой, т. е. $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = +\infty$.

Пусть теперь $0 \in A$. Найдём значение величины справа в (13). Рассмотрим для этого следующую экстремальную задачу:

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \to \max, \quad x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), \quad \|F_{A,B}x(\cdot)\|_\infty \leqslant \delta. \tag{14}$$

Мы найдём решение этой задачи, а тем самым и значение указанной величины.

Переходя к коэффициентам Фурье, используя равенство Парсеваля, получаем, что квадрат значения задачи (14) равен значению задачи

$$\begin{gathered} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2) \to \max, \quad \sum_{k=1}^\infty k^{2n}(a_k^2+b_k^2) \leqslant 1, \\ a_k^2 \leqslant \delta^2, \quad k \in A, \quad b_k^2 \leqslant \delta^2, \quad k \in B, \end{gathered} \tag{15}$$

где $a_k = a_k\big(x(\cdot)\big)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $b_k = b_k\big(x(\cdot)\big)$, $k \in \mathbb{N}$, и $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T})$.

Заметим, аналогично тому как это было сделано относительно задач (2) и (3), что задача (15) как задача на последовательностях $\{a_k, b_k\}$ из $l_2$, таких что последовательность $\{k^n a_k, k^n b_k\}$ также принадлежит $l_2$ (обозначим множество таких последовательностей через $l_2^n$), равносильна задаче (14) с заменой $\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$ на $\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}$.

Задача (15) является выпуклой. Её функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \lambda, \{\lambda_k\}_{k\in A}, \{\mu_k\}_{k\in B}) = \\ = -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k\in A}\lambda_k a_k^2 + \sum_{k\in B}\mu_k b_k^2.$$

Если найдётся допустимая в задаче (15) последовательность $\{\hat a_k, \hat b_k\}$ и множители Лагранжа $\hat\lambda \geqslant 0$, $\hat\lambda_k \geqslant 0$, $k \in A$, и $\hat\mu_k \geqslant 0$, $k \in B$, такие что

$$\text{(a)} \quad \min_{\{a_k,b_k\}\in l_2^n} \mathcal{L}(\{a_k, b_k\}, \hat\lambda, \{\hat\lambda_k\}_{k\in A}, \{\hat\mu_k\}_{k\in B}) = \\ = \mathcal{L}(\{\hat a_k, \hat b_k\}, \hat\lambda, \{\hat\lambda_k\}_{k\in A}, \{\hat\mu_k\}_{k\in B}),$$

$$\text{(b)} \quad \hat\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(\hat a_k^2 + \hat b_k^2) - 1\right) = 0, \\ \hat\lambda_k(\hat a_k^2 - \delta^2) = 0, \quad k \in A, \quad \hat\mu_k(\hat b_k^2 - \delta^2) = 0, \quad k \in B,$$

то $\{\hat a_k, \hat b_k\}$ — решение задачи (15). Проверка это факта проводится точно так же, как и в предыдущем разделе.

Предъявим теперь последовательность $\{\hat a_k, \hat b_k\}$, допустимую в (15), и множители Лагранжа $\hat\lambda \geqslant 0$, $\hat\lambda_k \geqslant 0$, $k \in A$, и $\hat\mu_k \geqslant 0$, $k \in B$, такие что выполнены условия (a) и (b).

Пусть $p_0 = \hat p < k_0 - 1$. Положим $\hat a_k = \delta$, $k = 0, 1, \dots, p_0$, $\hat b_k = \delta$, $k = 1, \dots, p_0$, $\hat a_{p_0+1} = \hat b_{p_0+1} = \alpha$, где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \delta^2 \sum\limits_{k=0}^{p_0} k^{2n}}}{(p_0 + 1)^n}$$

и $\hat a_k = \hat b_k = 0$, если $k > p_0 + 1$.

Проверим, что $\alpha \leqslant \delta$. Если это не так, то мы имели бы неравенство

$$1 - 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0} k^{2n} > 2\delta^2 (p_0 + 1)^{2n},$$

или

$$2\delta^2 \sum_{k=0}^{p_0+1} k^{2n} < 1,$$

противоречащее тому, что $p_0 = \hat p$.

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(\hat{a}_k^2+\hat{b}_k^2)=2\delta^2\sum_{k=1}^{p_0}k^{2n}+\frac{1-2\delta^2\sum\limits_{k=0}^{p_0}k^{2n}}{(p_0+1)^{2n}}(p_0+1)^{2n}=1,$$

и тем самым $\{\hat{a}_k,\hat{b}_k\}$ — допустимая последовательность в задаче (15).

Пусть теперь $p_0=k_0-1$. Если $k_0=\min\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus A}k$ ($k_0=\min\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus B}k$), то полагаем $\hat{a}_k=\delta$, $k=0,1,\ldots,p_0$, $\hat{b}_k=\delta$, $k=1,\ldots,p_0$, $\hat{a}_{p_0+1}=\sqrt{2}\alpha$ ($\hat{b}_{p_0+1}=\sqrt{2}\alpha$), а остальные коэффициенты полагаем нулевыми.

Эти последовательности допустимы в задаче (15). Проверка осуществляется так же, как в предыдущем случае, но в данной ситуации $p_0+1=k_0\notin A$, и поэтому неравенство $|\sqrt{2}\alpha|\leqslant\delta$ не обязано выполняться.

Положим теперь $\hat{\lambda}=(p_0+1)^{-2n}$, $\hat{\lambda}_0=1/2$, $\hat{\lambda}_k=\hat{\mu}_k=1-\hat{\lambda}k^{2n}$, $k=1,\ldots,p_0$, и $\hat{\lambda}_k=\hat{\mu}_k=0$, $k>p_0$. Легко убедиться, что все множители Лагранжа неотрицательны. Проверим, что выполнено условие (a). Для всех последовательностей $\{a_k,b_k\}\in l_2^n$ имеем

$$\mathcal{L}(\{a_k,b_k\},\hat{\lambda},\{\hat{\lambda}_k\}_{k\in A},\{\hat{\mu}_k\}_{k\in B})=\sum_{k=1}^{p_0}(-1+\hat{\lambda}k^{2n}+\hat{\lambda}_k)a_k^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{p_0}(-1+\hat{\lambda}k^{2n}+\hat{\mu}_k)b_k^2+\sum_{k=p_0+1}^{\infty}(-1+\hat{\lambda}k^{2n})(a_k^2+b_k^2)=$$
$$=\sum_{k=p_0+1}^{\infty}(-1+\hat{\lambda}k^{2n})(a_k^2+b_k^2)=\sum_{k=p_0+2}^{\infty}(-1+\hat{\lambda}k^{2n})(a_k^2+b_k^2).$$

Выражение справа неотрицательно по определению $\hat{\lambda}$. С другой стороны, рассмотренные выше последовательности $\{\hat{a}_k,\hat{b}_k\}$ начиная с номера $p_0+2$ нулевые и поэтому функция Лагранжа на этих последовательностях равна нулю. Это доказывает, что условие (a) выполнено.

Справедливость условия (b) проверяется элементарно.

Итак, последовательности $\{\hat{a}_k,\hat{b}_k\}$ являются решениями задачи (15) (для соответствующих случаев) и её значение для любого из этих случаев таково:

$$\frac{\hat{a}_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\hat{a}_k^2+\hat{b}_k^2)=\frac{\delta^2}{2}+2\delta^2p_0+\frac{1-2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{p_0}k^{2n}}{(p_0+1)^{2n}}=$$
$$=\frac{\delta^2}{2}+\hat{\lambda}+2\delta^2\sum_{k=1}^{p_0}(1-\hat{\lambda}k^{2n})=\hat{\lambda}+\delta^2\left(\hat{\lambda}_0+2\sum_{k=1}^{p_0}\hat{\lambda}_k\right).$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \geqslant \sqrt{\hat\lambda + \delta^2\Big(\hat\lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{p_0}\hat\lambda_k\Big)}. \tag{16}$$

Займёмся теперь оценкой сверху и построением оптимальных методов. Если метод $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T})$ оптимален, то это означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \to \max, \quad \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_\infty \leqslant \delta, \qquad y \in l_\infty^N, \quad x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), \tag{17}$$

равна $E(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta)$.

Каждому из наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_0})$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{p_0})$ поставим в соответствие метод $\varphi_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T})$, действующий по правилу

$$\varphi_{\alpha,\beta}(y)(t) = \frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}(\alpha_k y_k \cos kt + \beta_k y_{N_1+k}\sin kt),$$

где $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$. Будем искать оптимальные методы среди методов именно такого вида (если $p_0 = 0$, то сумма в определении метода нулевая).

При переходе к коэффициентам Фурье квадрат значения задачи (17) для метода $\varphi_{\alpha,\beta}$ согласно равенству Парсеваля равен значению задачи

$$\frac{(a_0 - y_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}\big((a_k - \alpha_k y_k)^2 + (b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2\big) + \sum_{k=p_0+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \to \max,$$

$$y = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in \mathbb{R}^N, \quad \|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_\infty \leqslant \delta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant 1, \tag{18}$$

где $\{a_k, b_k\} \in l_2^n$.

Оценим по неравенству Коши—Буняковского слагаемые под знаком первой суммы в максимизируемом функционале, учитывая, что $\hat\lambda > 0$ и $\hat\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, p_0$:

$$(a_k - \alpha_k y_k)^2 = \left(\frac{1-\alpha_k}{\sqrt{\hat\lambda}\,k^n}\sqrt{\hat\lambda}\,k^n a_k + \frac{\alpha_k}{\sqrt{\hat\lambda_k}}\sqrt{\hat\lambda_k}\,(a_k - y_k)\right)^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{(1-\alpha_k)^2}{\hat\lambda k^{2n}} + \frac{\alpha_k^2}{\hat\lambda_k}\right)\left(\hat\lambda k^{2n} a_k^2 + \hat\lambda_k (a_k - y_k)^2\right)$$

и аналогично

$$(b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2 \leqslant \left(\frac{(1-\beta_k)^2}{\hat\lambda k^{2n}} + \frac{\beta_k^2}{\hat\lambda_k}\right)\left(\hat\lambda k^{2n} b_k^2 + \hat\lambda_k (b_k - y_{N_1+k})^2\right).$$

Складывая полученные оценки и обозначая

$$S_{\alpha,\beta} = \max_{1\leqslant k\leqslant p_0} \left( \frac{(1-\alpha_k)^2}{\hat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\alpha_k^2}{\hat{\lambda}_k}, \ \frac{(1-\beta_k)^2}{\hat{\lambda} k^{2n}} + \frac{\beta_k^2}{\hat{\lambda}_k} \right),$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{p_0} \bigl((a_k - \alpha_k y_k)^2 + (b_k - \beta_k y_{N_1+k})^2\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant S_{\alpha,\beta} \left( \hat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k \bigl((a_k - y_k)^2 + (b_k - y_{N_1+k})^2\bigr) \right) \leqslant$$
$$\leqslant S_{\alpha,\beta} \left( \hat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k \right).$$

Далее, если $k \geqslant p_0 + 1$, то $k^{-2n} \leqslant (p_0+1)^{-2n} = \hat{\lambda}$, и поэтому

$$\sum_{p_0+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{p_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} k^{2n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \hat{\lambda} \sum_{p_0+1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Если для наборов $\alpha$ и $\beta$ справедливо $S_{\alpha,\beta} \leqslant 1$, то из полученных оценок вытекает, что максимизируемый функционал в (18) не превосходит величины

$$\frac{\delta^2}{2} + \hat{\lambda} \sum_{k=1}^{p_0} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k + \hat{\lambda} \sum_{p_0+1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) =$$
$$= \frac{\delta^2}{2} + \hat{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n}(a_k^2 + b_k^2) + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta^2}{2} + \hat{\lambda} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k = \hat{\lambda} + \delta^2 \left( \hat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k \right),$$

т. е.

$$e(D^0, W_2^n(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi_{\alpha,\beta}) \leqslant \sqrt{\hat{\lambda} + \delta^2 \left( \hat{\lambda}_0 + 2 \sum_{k=1}^{p_0} \hat{\lambda}_k \right)}.$$

Вместе с оценкой (16) это означает, что метод $\varphi_{\alpha,\beta}$ оптимален.

Покажем, что наборы $\alpha$ и $\beta$, для которых $S_{\alpha,\beta} \leqslant 1$, существуют. Для каждого $k = 1, \ldots, p_0$ выберем $\alpha_k$ и $\beta_k$ так, чтобы они доставляли минимум выражениям в скобках в определении $S_{\alpha,\beta}$. Легко подсчитать, что минимум достигается в точках

$$\alpha_k = \beta_k = \frac{\hat{\lambda}_k}{\hat{\lambda}_k + \hat{\lambda} k^{2n}} = 1 - \left( \frac{k}{p_0+1} \right)^{2n}, \quad k = 1, \ldots, p_0. \tag{19}$$

Тогда для таких $\alpha$ и $\beta$

$$S_{\alpha,\beta} = \max_{1\leqslant k\leqslant p_0} \frac{1}{\hat{\lambda}_k + \hat{\lambda} k^{2n}} = 1.$$

Итак, если векторы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p_0})$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{p_0})$ определены равенством (19), то соответствующий метод является оптимальным. Это в точности тот метод, который указан в теореме, если перейти к обозначениям $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$. Утверждения теоремы для $r = 0$ доказаны.

Если $1 \leqslant r \leqslant n-1$, то схема доказательства та же, что и для случая $r = 0$, поэтому мы ограничимся лишь несколькими короткими замечаниями. Для нахождения величины справа в (13) рассматриваем аналог задачи (14), но с максимизируемым функционалом $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$, квадрат которого в терминах коэффициентов Фурье имеет вид $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k^{2r}(a_k^2 + b_k^2)$. Затем естественным образом определяется функция Лагранжа аналога задачи (15). Далее пользуемся достаточными условиями минимума, причём соответствующие множители Лагранжа имеют следующий вид: $\hat{\lambda} = (p_0+1)^{-2(n-r)}$, $\hat{\lambda}_0 = 0$ (если $0 \in A$), $\hat{\lambda}_k = \hat{\mu}_k = k^{2r} - \hat{\lambda}k^{2n}$, $k = 1, \ldots, p_0$, и $\hat{\lambda}_k = \hat{\mu}_k = 0$, $k > p_0$. Оценка сверху погрешности оптимального восстановления и построение оптимальных методов проходит по той же схеме, что и выше, и оптимальные методы ищутся среди методов вида

$$\varphi_{\alpha,\beta}(y)(t) = \sum_{k=0}^{p_0} k^r \left(\alpha_k y_k \cos\left(kt + \frac{\pi r}{2}\right) + \beta_k y_{N_1+k} \sin\left(kt + \frac{\pi r}{2}\right)\right). \qquad \square$$

# Литература


[1] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. II. — М.: Наука, 1973.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 3. — С. 79—100.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближённой информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. — 2003. — Т. 37. — С. 51—64.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 10. — С. 67—82.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44. — С. 76—79.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру // Мат. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 59—67.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по её неточно заданному спектру // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 119—130.

[8] Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по её неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавказ. мат. журн. — 2012. — Т. 14, № 4. — С. 63—72.