

# Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства

**Е. О. СИВКОВА**

Московский государственный технический университет  
радиотехники, электроники и автоматики  
e-mail: sivkova\_elena@inbox.ru

УДК 517.984.64

**Ключевые слова:** оператор Лапласа, оптимальное восстановление, соболевский класс, экстремальная задача, преобразование Фурье, точное неравенство.

## Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального восстановления дробных степеней оператора Лапласа в равномерной метрике на многомерном обобщённом соболевском классе функций по неточной информации о преобразовании Фурье этих функций на шаре радиуса  $r$  с центром в нуле. Построен оптимальный метод восстановления и указано такое число  $\hat{r} > 0$ , что если  $r \leq \hat{r}$ , то метод использует всю информацию о преобразовании Фурье и при этом её сглаживает, а если  $r > \hat{r}$ , то информация о преобразовании Фурье оказывается избыточной — оптимальный метод её не использует. Доказано также точное неравенство для дробных степеней оператора Лапласа, тесно связанное с задачей восстановления и являющееся аналогом неравенств для производных колмогоровского типа.

## Abstract

*E. O. Sivkova, Best recovery of the Laplace operator of a function and sharp inequalities, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 175–185.*

The paper is concerned with the problem of optimal recovery of fractional powers of the Laplace operator in the uniform norm on the multivariate generalized Sobolev class of functions from incomplete data about the Fourier transform of these functions on the ball of radius  $r$  centered at the origin. An optimal recovery method is constructed, and a number  $\hat{r} > 0$  is specified such that for  $r \leq \hat{r}$  the method makes use of all the information about the Fourier transform, smoothing thereof; and if  $r > \hat{r}$ , then the information on the Fourier transform proves superfluous and hence is not used by the optimal method. For fractional powers of the Laplace operator, a sharp inequality is proved. This inequality turns out to be closely related to the recovery problem and is an analogue of Kolmogorov-type inequalities for derivatives.

## 1. Постановки задач и формулировки результатов

Оператор Лапласа  $\Delta$  на  $\mathbb{R}^d$  для функции  $f(\cdot)$ , имеющей вторые частные производные, определяется, как известно, следующим образом:

$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 5, с. 175–185.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

Преобразование Фурье лапласиана  $\Delta f(\cdot)$  достаточно гладкой и быстро убывающей функции  $f(\cdot)$  на  $\mathbb{R}^d$  имеет вид  $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$  для всех  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ , где  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$ . Это даёт повод определить дробную степень оператора Лапласа.

Пусть  $\alpha \geq 0$ . Если функция  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$  такова, что функция  $\psi: \xi \rightarrow |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$  также принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , то через  $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)$  обозначаем функцию, преобразование Фурье которой есть  $\psi(\cdot)$ . Понятно, что при  $\alpha = 2$  это обычный лапласиан и что  $(-\Delta)^0 f(\cdot) = f(\cdot)$ .

*Соболевским пространством*  $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  называется совокупность таких функций  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , что функция  $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (Ff)(\xi)$  также принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$  ( $\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$ ). Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f(\cdot), g(\cdot)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^\alpha (Ff)(\xi) \overline{(Fg)(\xi)} d\xi$$

и соответствующей нормой

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)} = \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^\alpha |(Ff)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Если  $\alpha$  — натуральное число, то функция  $f(\cdot)$  (переменных  $t_1, \dots, t_d$ ) принадлежит  $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  тогда и только тогда, когда все её обобщённые производные  $\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f / \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}$ , где  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$  и  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq \alpha$ , принадлежат  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , и в этом случае норма

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq \alpha} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f(\cdot)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

эквивалентна норме в  $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ . Другими словами, если  $\alpha$  натурально, то  $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  — классическое соболевское пространство функций на  $\mathbb{R}^d$ .

В пространстве  $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим подпространство

$$\mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid (Ff)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)\}$$

и положим

$$W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}.$$

Пусть  $0 \leq \beta < \alpha$ ,  $0 < r \leq \infty$ ,  $B_r = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| \leq r\}$  (считаем, что  $B_\infty = \mathbb{R}^d$ ) и  $\delta > 0$ . Мы ставим задачу о наилучшем восстановлении значений функций  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$  на классе  $W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  в метрике  $L_\infty(\mathbb{R}^d)$  по следующей информации: для каждой функции  $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  известна функция  $y(\cdot) \in L_\infty(B_r)$ , такая что  $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta$ .

Прежде чем перейти к точной постановке задачи восстановления, покажем, что если  $\alpha - \beta > d/2$ , то  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ . Действительно, пусть

$f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  и  $\beta \leq \alpha$ . Тогда из равенства

$$|\xi|^\beta (Ff)(\xi) = \frac{|\xi|^\beta}{(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}} (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (Ff)(\xi)$$

следует, что функция  $\xi \mapsto |\xi|^\beta (Ff)(\xi)$  (преобразование Фурье функции  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$ ) принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , как произведение ограниченной функции на функцию из  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

Покажем теперь, что функция  $\xi \mapsto |\xi|^\beta (Ff)(\xi)$  принадлежит и  $L_1(\mathbb{R}^d)$ . Обозначим  $\psi(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (Ff)(\xi)$ . Тогда

$$|\xi|^\beta (Ff)(\xi) = \frac{|\xi|^\beta}{(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}} \psi(\xi),$$

и поскольку  $\alpha - \beta > d/2$ , то справа стоит произведение двух функций из  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Следовательно, по неравенству Коши—Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta |(Ff)(\xi)| d\xi \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\beta}}{(1 + |\xi|^2)^\alpha} d\xi \right)^{1/2} \|\psi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Таким образом, преобразование Фурье функции  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$  принадлежит  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ , и поэтому справедлива формула обращения (см., например, [5]):

$$(-\Delta)^{\beta/2} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi, \quad (1)$$

верная для почти всех  $x \in \mathbb{R}^d$ . Но выражение справа, как хорошо известно, есть непрерывная ограниченная функция на  $\mathbb{R}^d$ , и значит,  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Перейдём теперь к постановке задачи оптимального восстановления. Пусть  $\alpha - \beta > d/2$ . Любой метод восстановления ставит в соответствие функции (наблюдению)  $g(\cdot) \in L_\infty(B_r)$  функцию из  $L_\infty(\mathbb{R}^d)$  (которая, согласно данному методу, есть некая аппроксимация функции  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$ ). Таким образом, каждый метод — это некоторое отображение  $\varphi: L_\infty(B_r) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$ . Погрешностью метода назовём величину

$$\begin{aligned} e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta, \varphi) &= \\ &= \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), g(\cdot) \in L_\infty(B_r), \\ \|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \varphi(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Нас интересует *погрешность оптимального восстановления*, т. е. величина

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta) = \inf_{\varphi} e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берётся по всем методам  $\varphi: L_\infty(B_r) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$ . Методы  $\hat{\varphi}$ , на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta) = e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta, \hat{\varphi}),$$

называем *оптимальными*.

Перед формулировкой основного результата введём некоторые обозначения. Для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2),$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера.

Для  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ , таких что  $\alpha - \beta > d/2$  и  $\delta > 0$ , положим

$$\hat{r} = \hat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left( \frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha-2\beta-d)}{2\delta^2(2\alpha-\beta)} \right)^{1/(d+2\alpha)}$$

и, если  $0 < r \leq \infty$  и  $r_0 = \min(r, \hat{r})$ , обозначим

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta, r, d) = \frac{r_0^{-2\alpha+\beta}}{\sqrt{2\alpha-2\beta-d}} \left( \frac{\gamma(d)}{r_0^{d+2\alpha}} - \frac{\delta^2}{d+2\alpha} \right)^{-1/2}$$

Из условия  $r_0 \leq \hat{r}$  вытекает, что выражение справа в скобках положительно.

Определим ещё функцию  $a(\cdot)$  на  $\mathbb{R}^d$  по формуле

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \lambda \delta |\xi|^{2\alpha-\beta}, & \xi \in B_{r_0}, \\ 0, & \xi \notin B_{r_0}. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна на  $\mathbb{R}^d$ , что также вытекает из неравенства  $r_0 \leq \hat{r}$ .

Скалярное произведение в  $\mathbb{R}^d$  обозначаем  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha - \beta > d/2$ ,  $0 < r \leq \infty$  и  $\delta > 0$ . Тогда

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta) = \begin{cases} \frac{r^{d+\beta}}{\gamma(d)} \left( \frac{\delta}{d+\beta} + \sqrt{\frac{1}{2\alpha-2\beta-d} \left( \frac{\gamma(d)}{r^{d+2\alpha}} - \frac{\delta^2}{d+2\alpha} \right)} \right), & r \leq \hat{r}, \\ \frac{(d/2+\alpha)^{(d+\beta)/(d+2\alpha)}}{d+\beta} \left( \frac{2\alpha-\beta}{\gamma(d)(2\alpha-2\beta-d)} \right)^{(2\alpha-\beta)/(d+2\alpha)} \delta^{(2\alpha-2\beta-d)/(d+2\alpha)}, & r \geq \hat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор  $\hat{\varphi}: L_\infty(B_{r_0}) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$ , действующий по правилу

$$\hat{\varphi}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

для почти всех  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Прокомментируем утверждения сформулированной теоремы. Как видно из выражения для погрешности оптимального восстановления, она уменьшается с ростом радиуса шара  $B_r$ , но лишь до определённого предела: при  $r \geq \hat{r}$  эта

погрешность постоянна, т. е. за пределами шара  $B_{\hat{r}}$  информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Оптимальный метод есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой на шаре  $B_{r_0}$  представляет собой «сглаженное» наблюдение  $g(\cdot)$ , а вне этого шара оно равно нулю.

Заметим, что неравенство  $r \leq \hat{r}$  равносильно соотношению

$$r^{d+2\alpha} \delta^2 \leq \frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha-2\beta-d)}{2(2\alpha-\beta)},$$

которое можно трактовать как своеобразный «принцип неопределённости», связывающий объём полезной информации (преобразование Фурье на шаре  $B_r$ ) и погрешность её измерения. Если при данном  $\delta$  неравенство нарушается, то информация о преобразовании Фурье избыточна.

Следующее утверждение есть непосредственное следствие теоремы.

**Следствие.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  и  $\alpha - \beta > d/2$ . Тогда для всех функций  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  справедливо точное неравенство

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq K \| (Ff)(\cdot) \|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{(2\alpha-2\beta-d)/(d+2\alpha)} \| (-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{(2d+2\beta)/(d+2\alpha)},$$

где

$$K = \frac{(d/2 + \alpha)^{(d+\beta)/(d+2\alpha)}}{d + \beta} \left( \frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{(2\alpha-\beta)/(d+2\alpha)}.$$

## 2. Доказательства

**Доказательство теоремы.** Покажем сначала, что погрешность оптимального восстановления  $E((-\Delta)^{\beta/2}, \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta)$  не меньше значения задачи

$$\begin{aligned} & \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\ & \| (Ff)(\cdot) \|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta, \quad \| (-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть  $f(\cdot)$  — допустимая функция в (2) (т. е.  $f(\cdot)$  удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция  $-f(\cdot)$  также допустима, и для любого метода  $\varphi: L_\infty(B_r) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$  ( $\varphi(0)(\cdot)$  — значение отображения  $\varphi$  на нулевой функции) мы имеем

$$\begin{aligned} & 2\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \\ & = \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \varphi(0)(\cdot) - ((-\Delta)^{\beta/2}(-f)(\cdot) - \varphi(0)(\cdot))\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} + \|(-\Delta)^{\beta/2}(-f)(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), \\ \|Ff(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), g(\cdot) \in L_\infty(B_r), \\ \|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \varphi(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2), а затем справа к нижней грани по всем методам  $\varphi$ , получаем требуемое утверждение.

Оценим снизу значение задачи (2) и тем самым оценим снизу величину  $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta)$ . Заметим сначала, что в силу доказанного выше (см. формулу (1)) можно считать функцию  $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$  непрерывной (изменяя, если необходимо, её значения на множестве меры нуль).

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(-\Delta)^{\beta/2} f(0) \rightarrow \max, \\ &\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (3)$$

Ясно, что её значение не больше значения задачи (2). Используя теорему Планшереля и учитывая (1), задачу (3) в образах Фурье переписываем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) d\xi \rightarrow \max, \\ &\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff)(\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (4)$$

Для каждого  $x \in \mathbb{R}^d$  рассмотрим на  $\mathbb{R}^d$  функцию

$$h_x(\xi) = \begin{cases} \delta e^{-i\langle \xi, x \rangle}, & \xi \in B_{r_0}, \\ \frac{e^{-i\langle \xi, x \rangle}}{\lambda |\xi|^{2\alpha - \beta}}, & \xi \notin B_{r_0}, \end{cases}$$

где  $\lambda$  определено перед формулировкой теоремы. Эта функция принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Покажем, что функция  $f_x(\cdot) = (F^{-1}h_x)(\cdot)$  ( $F^{-1}$  — обратное преобразование Фурье в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ) допустима в задаче (4). Действительно,  $(Ff_x)(\cdot) = h_x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , и ясно, что функция  $\xi \mapsto |\xi|^\alpha (Ff_x)(\xi)$  также принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Также ясно, что  $(Ff_x)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ , и поэтому  $f_x(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ .

Первому ограничению в задаче (4) функция  $f_x(\cdot)$  удовлетворяет очевидным образом. Используя легко проверяемые формулы

$$\int_{|\xi| \geq r} \frac{d\xi}{|\xi|^s} = \frac{2r^{-(s-d)} \pi^{d/2}}{(s-d)\Gamma(d/2)} \quad \text{для всех } s > d$$

и

$$\int_{|\xi| \leq r} |\xi|^{2s} d\xi = \frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)} r^{d+2s} \quad \text{для всех } s > 0, r > 0$$

и выражение для  $\lambda$ , получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_x)(\xi)|^2 d\xi = \\ & = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^{2\alpha} d\xi + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| > r_0} \frac{d\xi}{|\xi|^{2(\alpha-\beta)}} = \\ & = \frac{\delta^2 r_0^{d+2\alpha}}{\gamma(d)(d+2\alpha)} + \frac{r_0^{-(2\alpha-2\beta-d)}}{\lambda^2 \gamma(d)(2\alpha-2\beta-d)} = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, функция  $f_x(\cdot)$  допустима в задаче (4).

Можно найти значение максимизируемого функционала в (4) на функции  $f_0(\cdot)$  и тем самым получить оценку снизу для значения данной задачи. Но удобнее это сделать другим путём.

Докажем, что для всех  $x \in \mathbb{R}^d$  и всех функций  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi + \lambda \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

где функция  $a(\cdot)$  определена перед формулировкой теоремы.

Действительно, первый интеграл справа, очевидно, существует для любой функции  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Как показано выше, если  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ , то функция  $\xi \mapsto |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$  принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , и так как  $f_x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$  и, более того, справедливо (5), то, применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi \right| \leq \\ & \leq \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_x)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ & = \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

и поэтому второй интеграл справа в (6) имеет смысл для любой функции  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ .

Подставляя в правую часть (6) выражения для  $a(\cdot)$  и  $f_x(\cdot)$ , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi + \lambda \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} (|\xi|^\beta (1 - \lambda \delta |\xi|^{2\alpha - \beta}) e^{i\langle \xi, x \rangle} + \lambda |\xi|^{2\alpha} \delta e^{i\langle \xi, x \rangle}) (Ff)(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| > r_0} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi. \end{aligned}$$

Этим тождество (6) доказано.

Если в (6) положить  $x = 0$  и  $f(\cdot) = f_0(\cdot)$ , то, учитывая равенство (5), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff_0)(\xi) d\xi = \\ & = \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_0)(\xi)|^2 d\xi = \\ & = \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda. \end{aligned}$$

Величина слева — значение максимизируемого функционала в задаче (4) на функции  $f_0(\cdot)$ . Следовательно, значение этой задачи, и тем более значение задачи (2), не меньше величины справа в этом неравенстве. Тогда по доказанному выше

$$E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta) \geq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda. \quad (8)$$

Подставляя сюда выражения для  $a(\cdot)$  и  $\lambda$ , получаем величину, равную погрешности оптимального восстановления соответственно для  $r \leq \hat{r}$  и  $r \geq \hat{r}$ , указанную в формулировке теоремы.

Докажем теперь оптимальность метода  $\hat{\varphi}$  из формулировки теоремы и то, что погрешность оптимального восстановления на самом деле равна величине справа в (8). Для этого оценим погрешность метода  $\hat{\varphi}$ . Пусть  $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ ,  $g(\cdot) \in L_\infty(B_r)$  и  $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta$ . Для каждого  $x \in \mathbb{R}^d$ , используя представление (1) и тождество (6), имеем

$$\begin{aligned} & |(-\Delta)^{\beta/2} f(x) - \hat{\varphi}(g(\cdot))(x)| = \\ & = \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi \right| = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi + \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi \right| = \\
 &= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) ((Ff)(\xi) - g(x)) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi \right| \leq \\
 &\leq \|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \left| \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi \right|.
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \leq \delta$ ,  $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ , и оценку (7), получаем для любого  $x \in \mathbb{R}^d$  соотношение

$$|(-\Delta)^{\beta/2} f(x) - \hat{\varphi}(g(\cdot))(x)| \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda.$$

Следовательно,

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - \hat{\varphi}(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda.$$

Переходя слева к верхней грани по всем указанным  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$ , имеем неравенство

$$e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta, \hat{\varphi}) \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda.$$

Объединяя его с оценкой (8), получаем, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda &\leq E((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta) \leq \\
 &\leq e((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d), B_r, \delta, \hat{\varphi}) \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda,
 \end{aligned}$$

т. е.  $\hat{\varphi}$  — оптимальный метод и доказано требуемое выражение для погрешности оптимального восстановления.  $\square$

**Доказательство следствия.** Найдём значение задачи (2). Пусть функция  $f(\cdot)$  допустима в этой задаче (или, что то же самое, в задаче (4)). Тогда, используя равенство (1) и тождество (6), для любого  $x \in \mathbb{R}^d$  имеем

$$\begin{aligned} |(-\Delta)^{\beta/2} f(x)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi \right| \leq \\ &\leq \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(B_r)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \left| \frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(Ff_x)(\xi)} d\xi \right|. \end{aligned}$$

Учитывая оценку (7) и допустимость  $f(\cdot)$ , получаем, что

$$\left| (-\Delta)^{\beta/2} f(x) \right| \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda$$

для любого  $x \in \mathbb{R}^d$ , и значит,

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\delta}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) d\xi + \lambda.$$

Но при доказательстве теоремы было установлено, что выражение справа не больше значения задачи (2). Таким образом, это выражение — значение задачи (2) и, кроме того, по доказанному оно равно погрешности оптимального восстановления.

При  $r = \infty$  (т. е. когда  $B_r = \mathbb{R}^d$ ) согласно теореме погрешность оптимального восстановления равна величине

$$\frac{(d/2 + \alpha)^{(d+\beta)/(d+2\alpha)}}{d + \beta} \left( \frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{(2\alpha - \beta)/(d+2\alpha)} \delta^{(2\alpha - 2\beta - d)/(d+2\alpha)}.$$

Пусть  $f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$  и  $f(\cdot) \neq 0$  (тогда и  $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot) \neq 0$ ). Функция

$$\frac{f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$$

удовлетворяет ограничениям задачи (2) при  $r = \infty$ , и

$$\delta(f(\cdot)) = \frac{\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq \frac{(d/2 + \alpha)^{(d+\beta)/(d+2\alpha)}}{d + \beta} \left( \frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{(2\alpha - \beta)/(d+2\alpha)} \delta(f(\cdot))^{(2\alpha - 2\beta - d)/(d+2\alpha)}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\delta(f(\cdot))$ , получаем нужное неравенство. Нетрудно проверить, что оно превращается в равенство, например, на функции  $f_0(\cdot)$  (см. доказательство теоремы) и поэтому является точным.  $\square$

## Литература

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // *Мат. сб.* — 2004. — Т. 195, № 10. — С. 67–82.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по её неточно заданному спектру // *Мат. сб.* — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 119–130.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // *Мат. сб.* — 1997. — Т. 188, № 12. — С. 73–106.
- [4] Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по её неточно заданному преобразованию Фурье // *Владикавказ. мат. журн.* — 2012. — Т. 14, № 4. — С. 63–72.
- [5] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

