

УДК 517.51

Оптимальное восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона на классах, задаваемых степенью оператора Лапласа

Тигран Баграмян

23 ноября 2012 г.

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального восстановления функции из пространства Шварца по неточно заданному (в средне квадратичной метрике) преобразованию Радона. Получены явные выражения для погрешности оптимального восстановления и семейства оптимальных методов. В качестве следствия, приведено одно неравенство для функций из пространства Шварца.

Ключевые слова: Преобразование Радона, пространство Шварца, оптимальное восстановление.

В общем случае задача оптимального восстановления, исследуемая в работах [1]-[3], состоит в восстановлении значения линейного оператора на некотором множестве (классе) в линейном пространстве по значениям другого линейного оператора (называемого информационным), возможно заданным неточно, с погрешностью в той или иной метрике. В конкретных задачах (начиная с [4] и недавних [5]-[8]) в качестве информации обычно рассматриваются линейные функционалы и операторы, сопоставляющие функции ее значения на наборе точек, ее коэффициенты Фурье или преобразование Фурье. В данной работе рассматривается преобразование Радона - оператор, переводящий функцию на \mathbb{R}^d в множество ее интегралов по гиперплоскостям в \mathbb{R}^d . Этот оператор подробно изучается в теории компьютерной томографии, которая занимается численным восстановлением функций по их линейным или плоскостным интегралам. Для функций из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ в случае, если преобразование Радона известно точно, существует формула обращения,

позволяющая произвести однозначное восстановление (см. [9]). Мы рассматриваем случай, когда преобразование Радона измерено неточно, но с известной погрешностью δ в средне квадратичной метрике. В теории оптимального восстановления подобные операторы рассматривались ранее в [10] (пример 3.2), где для функции на \mathbb{R}^2 известны интегралы вдоль прямых, проходящих в некотором конечном числе направлений, а также в работе [11], где рассматривается оператор радиального интегрирования, значение которого известно с погрешностью.

Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ состоит из гладких функций, вместе со своими производными убывающих на бесконечности быстрее любой степени $|x|$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Рассмотрим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2} : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$, задаваемый формулой

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2} f}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

где \widehat{f} - преобразование Фурье f ,

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Определим класс W ,

$$W = \{f \in S(\mathbb{R}^d) : \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}.$$

Преобразованием Радона называется интегральный оператор

$$Rf(\theta, s) = \int_{x\theta=s} f(x) dx, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Функция Rf определена на единичном цилиндре $Z = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Гильбертово пространство $L_2(Z)$ задается скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} g(\theta, s) \overline{h(\theta, s)} ds d\theta.$$

Предположим, что функция Rf известна с погрешностью δ , т.е. дана функция $g \in L_2(Z)$, такая что

$$\|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leq \delta, \quad \delta > 0.$$

Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции $f \in W$ по информации g . Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f \in W, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m: L_2(Z) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим функции

$$x(\sigma) = (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1+2\alpha} \chi_{[0, \infty)}(\sigma), \quad y(\sigma) = (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1} \chi_{[0, \infty)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \frac{(d-1)}{d-1+2\alpha} \delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \frac{2\alpha}{d-1+2\alpha} \delta^{\frac{2(1-d)}{d-1+2\alpha}}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2} \delta^2 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \delta^{\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}}.$$

Методы

$$\widehat{m}_a(g)(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma),$$

где

$$g_\theta(s) = g(\theta, s),$$

$$a(\sigma) = \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon(\sigma) \frac{\sigma^\alpha \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{x(\sigma) \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)} \right) \chi_{[0, \infty)}(\sigma), \quad (3)$$

$\epsilon(\sigma) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и принимает значения на отрезке $[-1, 1]$, являются оптимальными.

Доказательство. Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 1, \quad \|Rf\|_{L_2(Z)}^2 \leq \delta^2.$$

Ее решение дает оценку снизу для квадрата погрешности оптимального восстановления в силу следующей цепочки неравенств (в которой m — произвольный метод)

$$E(\delta) \geq \sup_{\substack{f \in W, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geq \sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} \|f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geq$$

$$\sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} \frac{\|f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|-f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{2} \geq \sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Найдем решение двойственной задачи. Известно следующее соотношение, связывающее преобразование Радона функции и ее преобразование Фурье ([9]).

$$\widehat{(R_\vartheta f)}(\sigma) = (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\vartheta), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

где $R_\vartheta f(s) = Rf(\vartheta, s)$. Используя его, перепишем двойственную задачу.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_0^\infty \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\theta d\sigma. \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|(-\Delta)^{\alpha/2} \widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\theta d\sigma. \\ \|Rf\|_{L_2(Z)}^2 &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |Rf(\theta, s)|^2 ds d\theta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{R_\theta f}(\sigma)|^2 d\sigma d\theta \\ &= (2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta. \end{aligned}$$

Положим $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 d\theta d\sigma = d\mu(\sigma)$ и рассмотрим следующую задачу на мерах

$$\int_0^\infty \sigma^{d-1} d\mu \rightarrow \max, \quad \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} d\mu \leq 1, \quad (2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} d\mu \leq \delta^2. \quad (4)$$

Запишем ее функцию Лагранжа,

$$\begin{aligned} L(\mu, \lambda_1, \lambda_2) &= -\lambda_1 - \lambda_2 \delta^2 + \\ &+ (2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} (\lambda_1 (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1+2\alpha} \chi_{[0, \infty)}(\sigma) + \lambda_2 - (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1} \chi_{[0, \infty)}(\sigma)) d\mu. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию, заданную параметрически уравнениями (1) или

$$y(x) = (2\pi)^{\frac{1-d+(d-1)^2}{(d-1+2\alpha)}} x^{\frac{(d-1)}{(d-1+2\alpha)}}.$$

Она является вогнутой при $\alpha \geq 0$. Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке $1/\delta^2$ (соответствующее значение σ равно $\sigma^* = [(2\pi)^{d-1} \delta^{-2}]^{1/(d-1+2\alpha)}$) имеет вид $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ определены в (2). Отсюда имеем $\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma) \geq 0$ и $L(\mu, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2$. Рассмотрим меру

$$d\mu^* = \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D \left(\sigma - (2\pi)^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}} (\delta^{-2})^{\frac{1}{d-1+2\alpha}} \right) d\sigma,$$

где D - дельта-функция. Она допустима в задаче (4), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} d\mu^* - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left((2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} d\mu^* - \delta^2 \right) = 0$$

и минимизирует функцию Лагранжа, т.к. $L(\mu^*, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2$. Отсюда следует, что она доставляет экстремум в задаче (4), решение которой равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2$.

Рассмотрим дельта-образную последовательность функций из $S(\mathbb{R}^d)$: $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(n\sigma)^2} \rightarrow D(\sigma)$. Обозначим $g_n(\sigma) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(n(\sigma-\sigma^*))^2}$, тогда $g_n(\sigma) \rightarrow \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*)$. Обозначим $c_n = \max(1, \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma)$ и $u_n(\sigma) = \frac{g_n(\sigma)}{c_n}$. В силу того, что

$$\int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma \rightarrow \int_{-\infty}^\infty \chi_{[0, \infty)}(\sigma) \sigma^{d-1+2\alpha} \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*) d\sigma = 1,$$

имеем $u_n(\sigma) \rightarrow \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*)$. Положим $\widehat{f}_n(\sigma\theta) = \frac{u_n(\sigma)}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$, тогда последовательность $\{f_n\}$ допустима в двойственной задаче, т.к.

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{L_2(Z)}^2 &= (2\pi)^{d-1} \int_{-\infty}^\infty u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} (2\pi)^{d-1} \int_{-\infty}^\infty g_n(\sigma) d\sigma = \\ &= \frac{1}{c_n} \delta^2 \leq \delta^2. \end{aligned}$$

Значение двойственной задачи на последовательности $\{f_n\}$ совпадает с решением задачи (4)

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_0^\infty \sigma^{d-1} u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} \int_0^\infty \sigma^{d-1} g_n(\sigma) d\sigma \\ &\rightarrow (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}} = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что на $\{f_n\}$ достигается решение двойственной задачи.

Рассмотрим метод

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma).$$

Запишем его погрешность

$$\|f - m_a(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|\widehat{f} - \widehat{m_a(g)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \sigma^{d-1} |\widehat{f}(\sigma\theta) - (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma)|^2 d\sigma d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \sigma^{d-1} \left| a(\sigma) (2\pi)^{(1-d)/2} \left(\widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right) + \widehat{f}(\sigma\theta) (a(\sigma) - 1) \right|^2 d\sigma d\theta.
\end{aligned}$$

Применим неравенство Коши-Буняковского $|xy|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ к векторам

$$\begin{aligned}
x &= \left((2\pi)^{(1-d)/2} \frac{a(\sigma)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \sigma^{\frac{1-d-2\alpha}{2}} \frac{(a(\sigma) - 1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \right), \\
y &= \left(\left(\widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right) \sqrt{\widehat{\lambda}_2}, \sigma^{\frac{d-1+2\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{\lambda}_1} \widehat{f}(\sigma\theta) \right).
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\|f - m_a(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty A(\sigma) \left(\sigma^{d-1+2\alpha} \widehat{\lambda}_1 |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 + \left| \widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right|^2 \widehat{\lambda}_2 \right) d\sigma d\theta,
\end{aligned}$$

где

$$A(\sigma) = \sigma^{d-1} \left((2\pi)^{(1-d)} \frac{a^2(\sigma)}{\widehat{\lambda}_2} + \sigma^{1-d-2\alpha} \frac{(a(\sigma) - 1)^2}{\widehat{\lambda}_1} \right).$$

Условие (3) эквивалентно $A(\sigma) \leq 1$, $\sigma \in [0, \infty)$, откуда

$$\|f - m_a(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

■

Следствие 1. В условиях теоремы 1 методы

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma),$$

где

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \sigma \in [0, 2\pi \widehat{\lambda}_2^{(1-d)}], \\ \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon(\sigma) \frac{\sigma^\alpha \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{x(\sigma) \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)} \right) & , \sigma \in (2\pi \widehat{\lambda}_2^{(1-d)}, \widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}), \\ 0 & , \sigma \in [\widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}, \infty). \end{cases}$$

$\epsilon(\sigma) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и принимает значения на отрезке $[-1, 1]$, являются оптимальными.

Доказательство. Положим $a(\sigma) = 1$ в неравенстве $A(\sigma) \leq 1$, получим, что оно выполнено при $\sigma \leq 2\pi\hat{\lambda}_2^{(1-d)}$. Аналогично, положим $a(\sigma) = 0$, тогда $A(\sigma) \leq 1$ выполнено при $\sigma \geq \hat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}$. ■

Функция a выполняет роль фильтра, определяющего соотношение между объемом полезной информации и погрешностью, с которой она задана. Из следствия видно, что при достаточно малых σ информация \hat{g} не нуждается в фильтрации, а при достаточно больших σ фильтр можно выбрать равным 0, т.е. соответствующий объем информации не влияет на погрешность оптимального восстановления. Таким образом, выбрав фильтр a как в следствии 1, получим, что восстановленная функция будет иметь ограниченный спектр.

Следствие 2. Для функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$ имеет место точное неравенство

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \delta^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}}$, при ограничениях $\|Ru\|_{L_2(Z)} = \delta$ и $\|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Положив $u(x) = \frac{f(x)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$, $f \neq 0$, получим

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}.$$

■

Список литературы

- [1] Michelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Michelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press. New York.—1977.—P. 1–54.
- [2] Michelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Numerical Analysis Lancaster 1984. Springer Berlin/Hidelberg.—1984.—P. 21–93.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу". Владикавказ.—2009.—С. 158–192.
- [4] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, № 4.—С.465–476.

- [5] *Osipenko K. Yu., Stessin M.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // *Constr. Approx.*—2010.—Vol. 31, № 1.—P. 37-67.
- [6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // *Тр. МИАН.*—Т. 269.—М.: МАИК, 2010.—С. 181–192.
- [7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // *Функ. анализ. и его прил.*—2010.—Е. 44, № 3.—С. 76–79.
- [8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди-Литтлвуда-Поля и восстановление производных по неточной информации // *Докл. РАН.*—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.
- [9] *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography.— Stuttgart: John Wiley & Sons. 1986.
- [10] *Logan B.F., Shepp L.A.* Optimal reconstruction of a function from its projections // *Duke mathematical journal.*—1975.—Vol. 42, № 4.—P. 645-659.
- [11] *Баграмян Т. Э.* Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // *Владикавказский математический журнал.*—2012.—Т. 14, № 1.—С. 22–36.