На правах рукописи

Балова Елена Александровна

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01—математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва—2009

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика"МАТИ-Российского государственного технологического университета им. К. Э. Циолковского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор К. Ю. Осипенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов М. Л. Гольдман;
	кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник кафедры общих проблем управления Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова А. А. Васильева.
Ведущая организация:	Центральный экономико- математический институт РАН.

Защита диссертации состоится 22 декабря 2009г. в 16ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан   2009г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент   Л.Е. Россовский

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При решении многих задач математической физики и особенно при их численной реализации часто возникают проблемы, связанные с дискретизацией функций, восстановлением функций, функционалов или операторов от них по неполной и неточной исходной информации. Такого рода задачи, интенсивно изучающиеся в последнее время, привели к появлению нового направления в математике, называемого оптимальным восстановлением. Сюда входят такие задачи, как построение оптимальных методов восстановления функций, заданных точно или приближённо в конечном числе точек, построение квадратурных формул, восстановление производных, аппроксимация функции по её известным неточно коэффициентам или преобразованию Фурье и др.

При классическом подходе, как правило, задаются средства приближения (алгебраические или тригонометрические полиномы, сплайны и др.) В задачах оптимального восстановления вид метода восстановления заранее не определяется, и в качестве потенциальных претендентов изначально рассматриваются все возможные методы восстановления, использующие исходную информацию. Таким образом, при фиксированной исходной информации выбирается наилучший способ приближения интересующего нас объекта.

Цель работы

Целью данной диссертационной работы было построение оптимальных методов восстановления решений уравнений с частными производными эллиптического типа по неточным исходным данным.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в том, что впервые в подобной постановке рассмотрены задачи оптимального восстановления решений уравнений с частными производными эллиптического типа. Задача о восстановлении решения уравнения Пуассона рассмотрена для случая произвольного набора неточно известных коэффициентов Фурье правой части уравнения.

Практическая ценность

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что для ряда задач эллиптического типа были построены оптимальные методы восстановления решений уравнений с частными производными, когда погрешности исходных данных известны в метриках l_2 и l_∞. Показано, что для построения оптимального метода в общем случае требуется лишь часть известных приближённо коэффициентов Фурье функций, задающих правую часть уравнения или граничные условия.

Апробация работы и публикации

По материалам диссертации опубликовано 5 работ [1—5].

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на:

Международной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования", Владикавказ, 14-18 июня 2006г.;

Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.;

Международной конференции "Extremal Problems in Complex and Real Analysis EPCaRA-2007", Москва, 2007 г.;

3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2008 г.;

научном семинаре кафедры "Высшая математика" МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского;

научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ.

Структура и объём диссертации

Работа состоит из четырёх глав, включая введение, и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 82 страницы. Список литературы содержит 22 наименования.

Краткое содержание работы

В 1-й главе дан краткий исторический обзор, связанный с возникновением раздела анализа, названного теорией оптимального восстановления и восходящего к задаче, получившей название задачи Адамара о трёх кругах. Также приводится краткое содержание работы.

Во 2-й главе рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора, сформулированы и доказаны две леммы, дающие решения двух экстремальных задач линейного програмирования, а также приводится ряд предварительных сведений, обосновывающих правомерность тех подходов, которые использованы в третьей и четвёртой главах при решении задач оптимального восстановления.

В 3-й главе рассматриваются три задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по неточной исходной информации — о восстанавлении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном единичном шаре на сфере радиуса r по следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, заданным приближённо, $0 < R_1 < r < R_2 \leq 1,\ (d \geq 2)$, а также задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном шаре $B^d(d > 2)$ и в d-мерном шаровом поясе $(d \geq 2)$ по неточно заданным граничным функциям. Для каждой из задач предложены оптимальные методы восстановления и вычислены погрешности оптимального восстановления.

В 4-й главе решается задача об оптимальном восстановлении решения обобщённого уравнения Пуассона. Рассмотрена задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона в ограниченной области Q с нулевым граничным условием на границе области ∂Q по неточно заданной правой части уравнения. Рассмотрены два случая задания погрешности— в евклидовой и равномерной метриках, предложены оптимальные методы восстановления для этих случаев. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрена задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием для уравнения Пуассона в единичном d-мерном шаре.Также рассмотрена задача восстановления решения уравнения Пуассона на единичной $(d-1)$-мерной сфере с левой частью, представляющей из себя обобщённый оператор Бельтрами-Лапласа.

Рассмотрим более подробно содержание глав 2—4. Нумерация теорем соответствует нумерации в диссертационной работе.

Во 2-й главе рассматривается общая постановка задачи оптимального восстановления линейного оператора: для векторного пространства X, нормированного пространства Z и линейного оператора T требуется восстановить значения T на некотором множестве $W \subset X$ по неточной информации о каждом элементе $x \in W$, задаваемой с помощью некоторого информационного отображения $I(x)$, вообще говоря, многозначного, из W в векторное пространство Y. Даются определения понятий погрешности восстановления для данного метода φ, погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления. Описывается метод оптимального восстановления линейного оператора по информации, заданной с погрешностью, разработанный в работах Г.Г. Магарил-Ильяева и К.Ю. Осипенко. Сформулирован ряд результатов этих авторов, показывающий, что существенной частью построения оптимального метода является решение экстремальных задач типа теоремы о трёх кругах Адамара, а выражение для погрешности оптимального метода является значением задачи такого типа. Сформулированы и доказаны две вспомогательные леммы, а также приводится ряд предварительных сведений, связанных с решением эллиптических уравнений с частными производными. Эти результаты были использованы при решении задач, рассмотренных в **главах** 3 и 4.

В 3-й главе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, $R_1 < r < R_2$. Изучаются также задачи оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d-мерном шаре и d-мерном шаровом слое по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках, при этом предполагается, что граничные функции принадлежат соболевскому классу $W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1})$.

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\}$$

— единичный d-мерный шар,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1 \right\}$$

-единичная $(d-1)$-мерная сфера.

Рассмотрим в шаре $\mathbb{B}^d$ задачу Дирихле

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f(x'), \end{gathered} \tag{1}$$

где $u(x) \in L_2(\mathbb{B}^d)$—искомая функция, $f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Известно, что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, где $\mathcal{H}_k$ — множество сферических гармоник порядка k. Выберем в $\mathcal{H}_k$ ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}, k = 0, 1, \dots$. Если функция $f(x')$ задана своим рядом Фурье

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

то решение задачи (1) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где $x = rx',\ 0 \le r \le 1,\ x' \in \mathbb{S}^{d-1},\ a_k$—размерность $\mathcal{H}_k$. Будем считать, что известны две функции $y_1(x'), y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такие, что

$$\|u(R_i x') - y_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i,\ \delta_i > 0,\ i = 1, 2, \quad 0 < R_1 < R_2 \le 1.$$

Требуется по информации о функциях $y_1(x')$ и $y_2(x')$ наилучшим образом восстановить решение $u(x)$ задачи (1) на сфере радиуса r, где $R_1 < r < R_2$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(x'),\ y_1(x'),\ y_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_i x') - y_i(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Для данной задачи восстановления имеет место

Теорема 10. *Пусть* $0 < R_1 < r < R_2 < 1$, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. *Положим*

(2)
$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \dfrac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}\,, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases}$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \dfrac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\,, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases}$$

где m*—натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}\,,$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x')\, dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

В этой же главе рассматривается оптимальное восстановление решения задачи Дирихле в d-мерном шаровом поясе по неточно заданным граничным условиям ($d \geq 2$).

Пусть имеется область D_1, представляющая из себя d-мерный шаровой пояс

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 0 < R < |x| < 1\},$$

и

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' \in \mathbb{R}^d : \ |x'| = 1\}$$

– единичная $(d-1)$-мерная сфера, $d \geq 2$.

Выберем в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(x')\}_{j=1}^{a_k}$, $k = 0, 1, \ldots$, состоящий из сферических функций, и рассмотрим в области D_1 задачу Дирихле

(3)
$$\Delta u = 0,$$
$$u\Big|_{|x|=R} = f_1(x'), \quad u\Big|_{|x|=1} = f_2(x'), \quad 0 < R < 1,$$

где функции $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и заданы своими рядами Фурье

(4)
$$f_1(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \quad f_2(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} d_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Известно, что решение этой задачи может быть записано в виде

$$(5)\qquad \begin{aligned} u(x) = A(r)Y_1^{(0)}(x') + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigg(&\frac{c_{kj}R_2^{2-d-k} - d_{kj}R_1^{2-d-k}}{R_1^kR_2^{2-d-k} - R_2^kR_1^{2-d-k}}\ r^k + \\ &+\frac{d_{kj}R_1^k - c_{kj}R_2^k}{R_1^kR_2^{2-d-k} - R_2^kR_1^{2-d-k}}\ r^{2-d-k}\Bigg)Y_j^{(k)}(x'), \end{aligned}$$

где R_1 и R_2 суть внутренний и внешний радиусы шарового пояса, $x = rx', r = |x|,\ x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, и

$$A(r) = \begin{cases} \dfrac{c_{01}R_2^{2-d} - d_{01}R_1^{2-d}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}} + \dfrac{d_{01} - c_{01}}{R_2^{2-d} - R_1^{2-d}}\ r^{2-d}, & d \geq 3, \\ \dfrac{d_{01} - c_{01}}{\ln R_2 - \ln R_1}\ln r + \dfrac{c_{01}\ln R_2 - d_{01}\ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}\ , & d = 2. \end{cases}$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче $R_1 = R,\ R_2 = 1$, после небольшой перегруппировки слагаемых выражение для $u(x)$ можно представить в виде

$$(6)\qquad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\big(F_{1k}(r)c_{kj} + F_{2k}(r)d_{kj}\big)Y_j^{(k)}(x'),$$

где коэффициенты $F_{1k}(r)$ и $F_{2k}(r)$ задаются формулами:

1) если $d = 2$ и $k = 0$, то

$$F_{10}(r) = \frac{\ln r}{\ln R}\ ,\ F_{20}(r) = 1 - \frac{\ln r}{\ln R}\ ;$$

2) в остальных случаях

$$F_{1k}(r) = \frac{r^k - r^{2-k-d}}{R^k - R^{2-k-d}}\ , \quad F_{2k}(r) = \frac{R^kr^{2-k-d} - R^{2-k-d}r^k}{R^k - R^{2-k-d}}\ .$$

Теперь сформулируем задачу оптимального восстановления. Нам надо восстановить решение задачи (3), когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничных функций. Более точно, предположим, что для любых функций $f_1(x'), f_2(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известны векторы

$$\widetilde{f}_i^N = \{y_{kj}^{(i)}\},\ \ k = 0,1,\ldots,k_0,\ \ j = 1,\ldots,a_k,\ \ N = \sum_{k=0}^{k_0}a_k,\ \ i = 1,2$$

такие, что

$$\|\widetilde{f}_i^N - f_i^N\|_{l_p^N} \leq \delta_i,\ i = 1,2,$$

где $\|(a_1,\ldots,a_N)\|_{l_p^N}$ определена соотношениями

$$(7)\qquad \|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{k=1,\ldots,N}|a_k|, & p = \infty, \end{cases}$$

$\delta_i > 0$ —произвольные числа, $k_0 \geq 0$—фиксированное целое число,

$$f_1^N = \{c_{kj}\},\ f_2^N = \{d_{kj}\},\ k = 0,1,\ldots,k_0,\ j = 1,\ldots,a_k,$$

c_{kj}, d_{kj} — коэффициенты Фурье функций $f_1(x'), f_2(x')$.

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторах $\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N$ восстановить решение задачи (3). Будем предполагать, что функции $f_i(x'),\ i = 1, 2$, принадлежат обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1 \right\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ и функции $g(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, заданной своим рядом Фурье

$$g(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} g(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} g_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

$\Lambda_k = k(k + d - 2)$ — собственные числа оператора Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi\colon l_p^N \times l_p^N \to L_2(D_1)$. Назовем погрешностью восстановления метода φ величину

$$e_{N,\,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f_i(x') \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\\ i=1,2}} \sup_{\substack{\widetilde{f}_i^N \in\ l_p^N,\\ \|f_i^N - \widetilde{f}_i^N\|_{l_p^N} \le \delta_i,\ i=1,2}} \|u(x) - \varphi(\widetilde{f}_1^N, \widetilde{f}_2^N)(x)\|_{L_2(D_1)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,\,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \times l_p^N \to L_2(D_1)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным. Положим

$$\alpha_k = \int_R^1 F_{1k}^2(r) r^{d-1} dr,\ \ \beta_k = \int_R^1 F_{2k}^2(r) r^{d-1} dr,$$

$$\gamma_k = \int_R^1 F_{1k}(r) F_{2k}(r) r^{d-1} dr,$$

$$N = \sum_{k=0}^{k_0} a_k.$$

В случае $p = 2$ имеет место следующая

Теорема 13. *Пусть δ_1, δ_2—произвольные положительные числа. Положим*

$$\widehat{\mu}_1 = \alpha_0 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\gamma_0,\ \ \widehat{\mu}_2 = \beta_0 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\gamma_0,$$

$$\widehat{\zeta}_1 = \frac{\alpha_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta},\ \ \widehat{\zeta}_2 = \frac{\beta_{k_0+1} + \gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta},$$

Тогда

(8) $E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta_1,\delta_2)=$

$$=\sqrt{\alpha_0\delta_1^2+\beta_0\delta_2^2+2\gamma_0\delta_1\delta_2+\frac{\alpha_{k_0+1}+\beta_{k_0+1}+2\gamma_{k_0+1}}{\Lambda_{k_0+1}^\beta}},$$

а метод

(9) $\varphi(\widetilde{f}_1^N,\widetilde{f}_2^N)(x)=$

$$=\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{j=1}^{a_k}\left(\frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{\mu}_1+\widehat{\zeta}_1\Lambda_k^\beta}\;y_{kj}^{(1)}F_{1k}(r)+\frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{\mu}_2+\widehat{\zeta}_2\Lambda_k^\beta}\;y_{kj}^{(2)}F_{2k}(r)\right)Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

В случае равномерной метрики ($p=\infty$) положим

$$k^*=\max\left(k:\delta^2\sum_{l=1}^{k-1}a_l\Lambda_l^\beta<1,\ 1\le k\le k_0+1\right).$$

Теорема 14. *Пусть $\delta>0$—произвольное число. Тогда*

$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta,\delta)=$

$$=\sqrt{\delta^2\sum_{k=0}^{k^*-1}a_k(\alpha_k+\beta_k+2\gamma_k)+\frac{\alpha_{k^*}+\beta_{k^*}+2\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\big(1-\delta^2\sum_{k=1}^{k^*-1}a_k\Lambda_k^\beta\big)},$$

а метод

$\varphi(\widetilde{f}_1^N,\widetilde{f}_2^N)(x)=$

$$=\sum_{k=0}^{k^*-1}\sum_{j=1}^{a_k}\left(\frac{\widehat{\mu}_{kj}}{\widehat{\mu}_{kj}+\widehat{\eta}_1\Lambda_k^\beta}\;y_{kj}^{(1)}F_{1k}+\frac{\widehat{\zeta}_{kj}}{\widehat{\zeta}_{kj}+\widehat{\eta}_2\Lambda_k^\beta}\;y_{kj}^{(2)}F_{2k}\right)Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$\widehat{\eta}_1=\frac{\alpha_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\ ,\ \widehat{\eta}_2=\frac{\beta_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\ ,$$

$$\widehat{\mu}_{kj}=\alpha_k+\gamma_k-\frac{\alpha_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\Lambda_k^\beta,\ \widehat{\zeta}_{kj}=\beta_k+\gamma_k-\frac{\beta_{k^*}+\gamma_{k^*}}{\Lambda_{k^*}^\beta}\Lambda_k^\beta,$$

является оптимальным.

Третья задача, рассмотренная в этой главе, это задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном единичном шаре, $d>2$, по неточно заданной граничной функции, когда для этой функции известно конечное число её коэффициентов Фурье, заданных с погрешностью. Получены оптимальные методы восстановления, вычислены величины погрешностей оптимального восстановления для двух случаев задания погрешностей—в метриках l_2 и l_∞. Аналогичная задача для $d=2$ была рассмотрена К.Ю. Осипенко.

<u>В 4-й главе</u> решается задача об оптимальном восстановлении решения обобщённого уравнения Пуассона в ограниченной области Q с нулевыми граничными условиями, когда правая часть уравнения задана неточно. Предполагается, что правая часть уравнения принадлежит обобщённому классу Соболева $W_2^\beta(Q)$ и известно конечное число коэффициентов Фурье правой части уравнения, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках. Рассматривается случай произвольного выбора коэффициентов.

Пусть Q—область в пространстве $\mathbb{R}^d$, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой $(d-1)$—мерной поверхностью ∂Q, $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q$, $f(x) \in L_2(Q)$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(Q)$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-(\mathrm{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x), \tag{10}$$

с нулевым граничным условием

$$u\,|_{\partial Q} = 0. \tag{11}$$

Известно, что если $k(x) \geq k_0 > 0$, $a(x) \geq 0$, то существует полная в $L_2(Q)$ ортонормированная система $\{\varphi_s(x)\}_1^\infty$ из собственных функций первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} = -(\mathrm{div}(k(x)\nabla - a(x)).$$

Собственные значения этой задачи обладают следующими свойствами: $\lambda_s > 0$, $s = 1, 2, \dots$, $\lambda_s \to \infty$, $l \to \infty$. При этом различным собственным значениям соответствует конечное (равное кратности собственного значения) число функций из системы $\{\varphi_s(x)\}_1^\infty$. Если

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \varphi_s(x),$$

где

$$a_s = \int_Q f(x)\varphi_s(x)dx$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то решение задачи (10)—(11) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{-1} a_s \varphi_s(x).$$

Пусть функция $g(x) \in L_2(Q)$,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \varphi_s(x),$$

где g_s—коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Положим по определению

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^{\alpha/2} g_s \varphi_s(x),$$

где α—произвольное положительное число. Рассмотрим, так называемое, обобщённое уравнение Пуассона

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} u(x) = f(x) \tag{12}$$

с нулевым граничным условием

(13) $$u\mid_{\partial Q}=0.$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (12)—(13) можно записать в виде

$$u(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-\alpha/2}a_s\varphi_s(x).$$

В связи с тем, что среди собственных значений оператора $\mathfrak{L}$ могут быть кратные, введем новые обозначения. Обозначим через $\widetilde{\lambda}_k$ различные значения $\lambda_s, 0<\widetilde{\lambda}_1<\widetilde{\lambda}_2<\ldots<\widetilde{\lambda}_k\ldots$. Положим

$$t_k=\sum_{i=1}^{k}r_i,$$

где r_i—кратность $\widetilde{\lambda}_i$. Перенумеруем функции $\varphi_{t_{k-1}+1}(x),\ldots,\varphi_{t_k}(x)$, относящиеся к $\widetilde{\lambda}_k$, следующим образом:

$$\varphi_{t_{k-1}+1}=\widetilde{\varphi}_{k1},\ \varphi_{t_{k-1}+2}=\widetilde{\varphi}_{k2},\ldots,\ \varphi_{t_{k-1}+r_k}=\widetilde{\varphi}_{kr_k},$$

где r_k—кратность $\widetilde{\lambda}_k$. Аналогично проводится перенумерация коэффициентов Фурье a_s функции $f(x)$:

$$a_{t_{k-1}+j}=\widetilde{a}_{kj},\ j=1,\ldots,r_k$$

Теперь выражение для $f(x)$ принимает вид

(14) $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x),$$

а решение задачи (12)—(13) можно записать в виде

(15) $$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_k^{-\alpha/2}\sum_{j=1}^{r_k}\widetilde{a}_{kj}\widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Перейдем к задаче восстановления. Рассмотрим задачу (12)—(13). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x)$, когда правая часть уравнения (12) задана с погрешностью. Будем считать, что для любой функции $f(x)\in L_2(Q)$ известен вектор $\widetilde{f}^N\in l_p^N$, задаваемый следующим образом. Пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0\geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k, где $J_k=\{1,\ldots,r_k\},\ k=1,\ldots,k_0,\ A_k\subseteq J_k,\ k=1,\ldots,k_0$—произвольные подмножества J_k, q_k—число элементов множества A_k, и

$$N=\sum_{k=1}^{k_0}q_k.$$

Предполагается, что для произвольного вектора

$$\widetilde{f}^N=\{y_{kj}\},k=1,\ldots,k_0,j\in A_k$$

и для произвольного фиксированного $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\|\widetilde{f}^N-f^N\|_{l_p^N}\leq\delta\ ,$$

где $\|a\|_{l_p^N} = \|(a_1, \dots, a_N)\|_{l_p^N}$ определена формулой (7), а

$$\widetilde{f}^N = \{\widetilde{a}_{kj}\}\ , \quad k = 1, ..., k_0, \quad j \in A_k.$$

Задача оптимального восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (12),(13) в метрике $L_2(Q)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(Q) = \left\{ f(x) \in L_2(Q) : \ \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} \le 1 \right\},$$

$\beta > 0$—фиксированное действительное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\psi : l_p^N \to L_2(Q)$.

Назовем погрешностью восстановления метода ψ величину

$$e_{N,\,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) =$$

$$= \sup_{f \in W_2^\beta(Q)} \ \sup_{\substack{\widetilde{f}^N \in\ l_p^N : \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(x) - \psi(\widetilde{f}_N)(x)\|_{L_2(Q)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,\,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\psi :\ l_p^N \to L_2(Q)} e_{N,\,p}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Положим

$$A = \{k : A_k = J_k,\ 1 \le k \le k_0\},$$

$$k^* = \begin{cases} \min\bigl(k :\ k \in \mathbb{N} \backslash A\bigr), & \delta^2 < \widetilde{\lambda}_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \ge \widetilde{\lambda}_1^{-\beta}. \end{cases}$$

Тогда имеет место

Теорема 15. *Пусть δ, α и β—произвольные положительные числа. Тогда*

$$E_{N,\,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta}} + \frac{\delta^2}{\widetilde{\lambda}_1^{\alpha}} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_{k^*}} \right)^{(\alpha+\beta)} \right]}\ ,$$

а метод $\widehat{\psi}(x)$, задаваемый соотношениями

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & k^* = 1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha/2}} \left[1 + \frac{\widetilde{\lambda}_k^\beta \widetilde{\lambda}_1^\alpha}{\widetilde{\lambda}_{k^*}^{\alpha+\beta} - \widetilde{\lambda}_1^{\alpha+\beta}} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x), & k^* > 1 \end{cases}$$

является оптимальным.

Рассмотрим теперь случай равномерной метрики $p = \infty$. Положим

$$A_{k_0+1} = \emptyset,\ J_{k_0+1} = \{1, \dots, r_{k_0+1}\},$$

$$k^* = \min(k :\ J_k \ne A_k,\ 1 \le k \le k_0 + 1),$$

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \delta^2 \geq (\widetilde{\lambda}_1^{\beta} r_1)^{-1}, \\ \max(k : \delta^2 \sum\limits_{l=1}^{k} \widetilde{\lambda}_l^{\beta} r_l < 1, 1 \leq k), & \delta^2 < (\widetilde{\lambda}_1^{\beta} r_1)^{-1}, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \widetilde{k}+1, & \widetilde{k}+1 < k^*, \\ k^*, & \widetilde{k}+1 \geq k^*. \end{cases}$$

Теорема 16. *Пусть α, β и δ—произвольные положительные числа. Тогда*

1) *если $m = 1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{(\alpha+\beta)/2}}$$

и метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) \equiv 0,$$

является оптимальным;

2) *если $m > 1$, то*

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}_k^{\alpha}} - \frac{\widetilde{\lambda}_k^{\beta}}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}} \right) r_k + \frac{1}{\widetilde{\lambda}_m^{\alpha+\beta}}}\ ,$$

а метод

$$u(x) \approx \widehat{\psi}(\widetilde{f}^N)(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{r_k} \left[1 - \left(\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\widetilde{\lambda}_m} \right)^{\alpha+\beta} \right] y_{kj}\, \widetilde{\varphi}_{kj}(x)$$

является оптимальным.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{a}_{kj} \widetilde{\varphi}_{kj}(x).$$

Назовем k—пачкой группу коэффициентов $\widetilde{a}_{kj},\ j = 1, \ldots, r_k$, где r_k—размерность подпространства $\Phi_k \in L_2(Q)$, базисом которого являются функции $\widetilde{\varphi}_{k1}(x), \ldots, \widetilde{\varphi}_{kr_k}(x)$, соответствующие собственному значению $\widetilde{\lambda}_k$.

Пусть $\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\},\ k = 1, \ldots, k_0,\ j \in A_k$—вектор, приближённо описывающий функцию $f(x)$ из правой части уравнения (12). Из результатов, полученных в теоремах 15 и 16, следует:

1) Если в k-пачке среди коэффициентов $y_{kj},\ 1 \leq k \leq k_0,\ j \in A_k$, отсутствует хотя бы один коэффициент y_{kj}, (что соответствует выполнению условия $A_k \neq J_k$), то ни один из коэффициентов этой пачки, равно как и ни один из коэффициентов всех следующих пачек (по возрастанию k), входящих в вектор $\widetilde{f}^N$, при построении оптимального метода не используются.

2) В случае, когда $p = \infty$, количество коэффициентов, необходимых для построения оптимального метода, может быть еще уменьшено, если $\widetilde{k} < k^* - 1$, где k^*—номер первой по порядку неполной пачки. Тогда в построении оптимального метода участвуют только k-пачки с номерами от 1 до $\widetilde{k}$ включительно. Здесь присутствует эффект так называемого информационного насыщения.

В качестве примера применения результатов, полученных в приведённой выше теореме, рассмотрена задача об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в d-мерном единичном шаре $\mathbb{B}^d$, когда левая часть уравнения есть обобщённый оператор Бельтрами-Лапласа $(-\Delta_S)^{\beta/2}$.

Кроме этого, в данной главе рассматривается аналогичная задача восстановления обобщённого уравнения Пуассона на $(d-1)$-мерной единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Здесь предполагается, что функция $f(x)$, описывающая правую часть уравнения, ортогональна 1 и принадлежит классу $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ (теоремы 17 и 18.)

Для каждой из рассмотренных задач найдены значения погрешностей оптимального восстановления и предложены методы оптимального восстановления, имеющие линейную структуру.

Основные результаты работы

В диссертационной работе были получены методы для восстановления решений уравнений с частными производными эллиптического типа. Основные результаты работы:

1. Построен оптимальный метод восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном единичном шаре, $d \geq 2$, на сфере радиуса r по неточно известным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2, $0 < R_1 < r < R_2 \leq 1$.

2. Построены оптимальные методы восстановления решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в d-мерном единичном шаре, $d > 2$, и d-мерном шаровом поясе $D_1 = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d,\ 0 < R \leq\mid x \mid\leq 1\}$, $d \geq 2$, по неточно заданным граничным условиям.

3. Построен оптимальный метод восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями в d-мерной области, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью, по неточно заданной правой части уравнения.

4. Решена задача об оптимальном восстановлении решения уравнения Пуассона, где левая часть уравнения есть обобщённый оператор Бельтрами-Лапласа, на $(d-1)$-мерной единичной сфере по неточно известной правой части уравнения, предложен оптимальный метод восстановления.

Во всех рассмотреных задачах вычислены значения погрешностей оптимального восстановления.

Публикации

1. Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2, С. 15–23.

2.Балова Е. А. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточно заданной информации на сферах радиусов R_1 и R_2 // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Ростов-на-Дону, 2006, С. 215–216.

3. Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Математические заметки, 2007. Т. 82, вып. 3. С. 323–334.

4. Балова Е. А. О восстановлении решения задачи Дирихле в d-мерном шаровом поясе по неточным граничным условиям // Тезисы докладов третьей международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, МФТИ, 2008, С. 226–227.

5. Elena Balova Optimal recovery of the solution of the Poisson equation from inaccurate information // Международная конференция "Extremal Problems in Complex and Real Analysis EPCaRA-2007", Book of Abstracts, Moscow, Russia, 2007, С. 10.

Балова Е. А.

Экстремальные задачи интерполяционного типа и восстановление решений эллиптических уравнений

Аннотация

В работе рассматриваются задачи восстановления решений уравнений с частными производными эллиптического типа. Исследуется задача восстановления следа решения уравнения Лапласа на сфере радиуса r по известным неточно следам этого решения на сферах радиусов $R1$ и $R2$. Вычисляется погрешность оптимального восстановления и предлагается оптимальный метод восстановления, имеющий линейную структуру. Рассматриваются задачи оптимального восстановления уравнения Лапласа в d-мерном шаре и d-мерном шаровом поясе по конечному набору коэффициентов Фурье граничных функций, заданных с погрешностью. Рассмотрены аналогичные задачи для уравнения Пуассона в ограниченной замкнутой d-мерной области с нулевыми граничными условиями и для $(d-1)$-мерной единичной сферы, когда правая часть уравнения известна с погрешностью. Во всех рассмотренных случаях вычислены погрешности оптимального восстановления и предложены оптимальные методы восстановления.

Balova E. A.

Extremal problems of interpolation type and the recovery of the solutions of elliptic equations

Abstract

Recovery problems for solutions of partial differential equations of elliptic type from inaccurate initial information are considered. Recovery problems for traces of solutions of Laplace's equations on sphere of radius r from inaccurate information about traces on spheres of radii R1 and R2 are investigated. The error of optimal recovery is found and an optimal method with linear structure is constructed. For the d-dimensional unit ball and d-dimensional spherical zone optimal recovery of solution of Laplace's equation from inaccurate information of Fourier coefficients of boundary function is considered. The similar problems were considered for the Poisson equation in a closed bounded d-dimensional domain with zero boundary values and for (d-1)-dimensional sphere when the right-hand side of the equation is known with an error. In the all considered cases the error of optimal recovery is calculated and optimal methods of recovery are constructed.