ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

© **Е. В. Абрамова**

Хорошо известно (см.,напр., [1]), что если задана функция $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, то существует единственная гармоническая функция $u(\cdot,\cdot)$ в полуплоскости $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\,\}$ такая, что $u(\cdot,y)\to f(\cdot)$ при $y\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$, и эта функция есть интеграл Пуассона

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} P(x-t,y)f(t)\,dt,$$

где $P(x,y)=y/\pi(x^2+y^2)$.

Ставится следующая задача, аналогичная задаче Адамара о трех кругах: по приближенно известным функциям $u(\cdot,y_1)$ и $u(\cdot,y_1)$ ($0<y_1<y_2$) восстановить функцию $u(\cdot,y)$, где $y_1<y<y_2$. Точная постановка задачи такова.

Пусть известны функции $z_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, $i=1,2$, такие, что $\|u(\cdot,y_i)-z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_i$, где $\delta_i>0$, $i=1,2$. Под оптимальным восстановлением функции $u(\cdot,y)$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по данной информации будем понимать следующее. Любое отображение $m\colon L_2(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ называем методом восстановления и погрешность этого метода оцениваем величиной

$$e(y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2,m)=\sup_{\substack{z_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\ i=1,2\\ \|u(\cdot,y_i)-z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_i,\ i=1,2}}\|u(\cdot,y)-m(z_1(\cdot),z_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E(y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2)=\inf_{m\colon L_2(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} e(y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2,m),$$

которую называют *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления.*

Т е о р е м а.

$$E(y,y_1,y_2,\delta_1,\delta_2)=\delta_1^{\frac{y_2-y}{y_2-y_1}}\delta_2^{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

Метод $\widehat{m}$, *определенный равенством*

$$\widehat{m}(z_1(\cdot),z_2(\cdot))(\cdot)=(K_1*z_1)(\cdot)+(K_2*z_2)(\cdot),$$

где $K_1(\cdot)$ *и* $K_2(\cdot)$ *— функции из* $L_2(\mathbb{R})$, *преобразования Фурье которых имеют вид*

$$FK_1(\xi)=\frac{(y_2-y)\delta_2^2e^{-|\xi|(y-y_1)}}{(y_2-y)\delta_2^2+(y-y_1)\delta_1^2e^{-2|\xi|(y_2-y_1)}},$$

$$FK_2(\xi)=\frac{(y-y_1)\delta_1^2e^{-|\xi|(y+y_2-2y_1)}}{(y_2-y)\delta_2^2+(y-y_1)\delta_1^2e^{-2|\xi|(y_2-y_1)}},$$

является оптимальным.

Отметим, что оптимальный метод оказывается линейным, «сглаживает» наблюдаемые функции $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$, сворачивая их с быстроубывающими функциями $K_1(\cdot)$ и $K_2(\cdot)$.

Доказательство этой теоремы опирается на общие методы теории оптимального восстановления линейных операторов, разработанных в работах [1,2]. Укажем здесь некоторые этапы доказательства. Нетрудно проверить, что величина погрешности оптимального восстановления не меньшее значения следующей задачи

$$\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|u(\cdot,y_i)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_i,\quad i=1,2,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}).\tag{1}$$

Переходя к образам Фурье, получим по теореме Планшереля (учитывая, что для каждого $y > 0$ функция $\xi \mapsto e^{-y|\xi|}$ есть преобразование Фурье функции $x \mapsto P(x, y)$), что квадрат значения задачи (1) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2y|\xi|}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \to \max, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2y_i|\xi|}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \le \delta_i^2, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}). \qquad (2)$$

Относительно переменной $|Ff(\cdot)|^2$ данная задача является задачей выпуклого программирования (см. [3]). Однако решение этой задачи не существует и поэтому рассматривается более общая задача (также выпуклого программирования), которая имеет то же значение, но решение которой уже существует. Это позволяет, с одной стороны, найти значение задачи (2) (и тем самым получить оценку снизу для погрешности оптимального восстановления), а с другой, найти множители Лагранжа, которые участвуют в построении оптимального метода восстановления. Если такие множители Лагранжа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ найдены, то оптимальный метод строится следующим образом. Для любых $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\lambda_1\|u(\cdot, y_1) - z_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \lambda_2\|u(\cdot, y_2) - z_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \min, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Пусть $\widehat{f}(\cdot, z_1(\cdot), z_2(\cdot))$ — ее решение. Тогда оптимальный метод находится по формуле

$$\widehat{m}(z_1(\cdot), z_2(\cdot))(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} P(x - t, y)\widehat{f}(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot))\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва, Мир, 1974.

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Математический сборник. Москва, 2002. Т. 193. № 3. С. 79-100.

3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. Москва, 2003. Т. 37. Вып. 3. С. 51-64.

4. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. Москва, Эдиториал УРСС, 2003 (2-ое изд).