На правах рукописи

Сивкова Елена Олеговна

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ФУНКЦИИ ПО ЕЕ НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ И НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА

01.01.01—вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва—2013

Работа выполнена на кафедре “Высшая математика-2” Московского государственного технического университета МИРЭА.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Г. Г. Магарил-Ильяев, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор К. Ю. Осипенко, Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, зав. кафедрой Высшей математики;

кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Гасников, Московский физико-технический институт, доцент кафедры Математических основ управления.

Ведущая организация: Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН.

Защита диссертации состоится 26 февраля 2013 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 23 января 2013г.

Учёный секретарь
диссертационного совета — Россовский Леонид Ефимович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда требуется восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой информации (обычно не точной и не полной) о других его характеристиках. Например, необходимо восстановить функцию в точке, или интеграл от нее, или саму функцию целиком (в той или иной метрике) по информации о ее значениях в других точках, о ее преобразовании Фурье, коэффициентах Тейлора и т. п. Существует множество подходов к решению подобных задач. Здесь мы следуем подходу, который предполагает наличие априорной информации об объекте, характеристики которого требуется восстановить. Это позволяет поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди вообще всех возможных методов восстановления. Такой взгляд на задачи восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-годов прошлого века о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. Математическая теория, где изучаются задачи восстановления на основе указанного подхода, активно развивается в последние десятилетия, обнаруживая тесные связи с классическими задачами теории приближений и имея различные приложения к задачам практики.

Цели диссертационной работы

Цели диссертационной работы состоят в построении оптимальных методов восстановления дробной степени оператора Лапласа функции, принадлежащей соболевскому классу функций на $\mathbb{R}^d$, в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по ее преобразованию Фурье, которое известно точно или приближенно на некотором выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^d$, а также в получении точных мультипликативных неравенств для дробных степеней оператора Лапласа функции и ее преобразования Фурье.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Они обобщают и развивают ранее известные результаты, связанные с задачами оптимального восстановления функций и их производных на прямой и соответствующими точными неравенствами для производных функций и их преобразования Фурье.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут иметь применение в математическом анализе, гармоническом анализе функций на $\mathbb{R}^d$ и теории приближений. Но, кроме того, полученные явные выражения для оптимальных методов восстановления лапласиана функции могут служить основой для разработки эффективных численных алгоритмов восстановления функций по неточно заданному преобразованию Фурье.

Апробация работы

Основные результаты работы и отдельные ее части докладывались на семинаре "Теория приближений и экстремальные задачи" механико-математического факультета МГУ под руководством проф. В. М. Тихомирова, на семинаре "Задачи оптимального восстановления линейных операторов" механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Г. Г. Магарил-Ильяева и проф. К. Ю. Осипенко, на научных семинарах Московского государственного технического университета МИРЭА и Международной конференции "Управление и оптимизация динамических систем - CODS-2009", Ташкент, 28-30 сентября 2009.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях и в тезисах доклада на Международной конференции.

Структура диссертации

Работа состоит из введения, предварительных сведений, трех глав и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 70 страниц. Список литературы содержит 26 наименований.

Содержание работы

Введение содержит краткий исторический обзор тематики диссертации, формулировки основных ее результатов и комментарии к ним.

В разделе **Предварительные сведения** собраны необходимые для доказательства утверждений диссертации необходимые сведения о свойствах преобразования Фурье функций на $\mathbb{R}^d$, соболевских пространствах функций на $\mathbb{R}^d$ и методах выпуклой оптимизации.

В **1-ой главе** решается задача об оптимальном восстановлении дробной степени оператора Лапласа функции в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на соболевском классе функций по следующей информации: о каждой функции из класса известно ее преобразование Фурье на некотором измеримом подмножестве $A \subset \mathbb{R}^d$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2(A)$. Приведем точную постановку.

Оператор Лапласа Δ на $\mathbb{R}^d$ для функции $f(\cdot)$, имеющей вторые частные производные, определяется, как известно, следующим образом

$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

Преобразование Фурье лапласиана $\Delta f(\cdot)$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ имеет вид $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$ для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Это позволяет определить дробную степень оператора Лапласа.

Пусть $\alpha \geq 0$. Если функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что функция $\varphi\colon \xi \to |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то через $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)$ обозначаем функцию, преобразование Фурье которой есть $\varphi(\cdot)$. Понятно, что при $\alpha = 2$ это обычный лапласиан и что $(-\Delta)^0 f(\cdot) = f(\cdot)$.

Соболевским пространством $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ называется совокупность таких функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что функция $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}(Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$).

Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$. Положим

$$\mathcal{W}_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid (Ff)(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d) \,\}$$

и

$$W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \,\}.$$

При этом ясно, что $\mathcal{W}_{2,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ (и, соответственно, $W_{2,2}^\alpha(\mathbb{R}^d) = W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$).

Пусть, далее, $0 \leq \beta < \alpha$, $1 \leq q \leq \infty$, A — непустое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$. Задача об оптимальном восстановлении функции $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$ в метрике $L_q(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по информации: о каждой функции $f(\cdot) \in W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(A)$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(A)} \leq \delta$ (если $\delta = 0$, то функция $(Ff)(\cdot)|_A$ — сужение $(Ff)(\cdot)$ на A— известна точно) ставится следующим образом.

Любой метод (отображение) $m\colon L_p(A) \to L_q(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления и его погрешность определяется по формуле

$$e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta, m) =$$

$$= \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot) \in L_p(A) \\ \|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_p(A)} \leq \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то это выражение, очевидно, переписывается так

$$e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), 0, m) = \sup_{f(\cdot)\in W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)} \|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует *погрешность оптимального восстановления*, т. е. величина

$$E_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta) = \inf_m e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_p(A) \to L_q(\mathbb{R}^d)$, и *оптимальные методы восстановления*, т. е. те методы, на которых нижняя грань достигается.

В первой главе рассматривается случай $p = q = 2$. Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $0 < \beta < \alpha$ и $\delta > 0$. Обозначим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Пусть, далее, A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \operatorname{int} A$. Положим $r_A = \sup\{\, r > 0 \mid B(0, r) \subset A\,\}$, где $B(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r > 0$. Ясно, что $0 < r_A < \infty$, если A — собственное подмножество и $r_A = +\infty$, если $A = \mathbb{R}^d$.

Обозначим $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$ и положим

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \beta, r_0) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} r_0^{2\beta}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(\alpha, \beta, r_0) = r_0^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Обозначим еще $\langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^d \xi_i x_i$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ и $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Теорема 1.1. *Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \ge 0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\operatorname{int} A \ne \emptyset$. Тогда*

1) *если $0 \notin \operatorname{int} A$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_2(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если A — собственное подмножество, $0 \in \operatorname{int} A$ и $\delta = 0$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_2(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) = \frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}.$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = (Ff)(\cdot)|_{B(0,r_A)}$, или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_A} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi;$$

3) *если* $0 \in \operatorname{int} A$ *и* $\delta > 0$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d} r_A^{2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \le \widehat{r}, \\ \left(\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}}, & r_A \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Для каждой функции $a(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ *такой, что* $a(\xi) = 0$, *если* $\xi \notin B(0, r_0)$ *и*

$$\left| a(\xi) - \frac{\lambda_1 |\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}} \right| \le \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} |\xi|^\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}} \sqrt{-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}}$$

для п. в. $\xi \in B(0, r_0)$, *оптимальным методом является линейный оператор* $\widehat{m}_a \colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(\cdot) = \varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot) g(\cdot)$ *на* $B(0, r_0)$ *и* $(F\varphi)(\cdot) = 0$ *вне* $B(0, r_0)$, *или, равносильно, для п. в.* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} \, d\xi.$$

В качестве следствия п. 3) теоремы укажем серию оптимальных методов, имеющих явное описание.

Следствие. *В условиях п. 3) теоремы для каждого* r *такого, что*

$$0 \le r \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_0$$

оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}_r \colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}_r(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2} \varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = g(\cdot)$ *на* $B(0, r)$, $(F\varphi)(\cdot) = a_0(\cdot) g(\cdot)$ *на* $B(0, r_0) \setminus B(0, r)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ *вне* $B(0, r_0)$ *и*

$$a_0(\xi) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1}, & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0). \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r} |\xi|^\beta g(\xi)e^{i\langle \xi,x\rangle}\,d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r\le|\xi|\le r_0} |\xi|^\beta a_0(\xi)g(\xi)e^{i\langle \xi,x\rangle}\,d\xi.$$

Прокомментируем утверждения сформулированных теоремы и следствия. Первое утверждение теоремы означает, что если $0 \notin \operatorname{int} A$, то погрешность любого метода восстановления равна бесконечности и значит, никаким способом нельзя восстановить соответствующую дробную степень оператора Лапласа на всем классе.

Если $0 \in \operatorname{int} A$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно точно ($\delta = 0$), то чем больше радиус шара с центром в нуле, который можно вписать в A, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Но знание преобразования Фурье за пределами этого шара оказывается лишним — оптимальный метод эту информацию не использует. При этом сам оптимальный метод есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с преобразованием Фурье функции $f(\cdot)$ на шаре $B(0, r_A)$ и равно нулю вне этого шара.

Если $0 \in \operatorname{int} A$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_2(A)$, то погрешность оптимального восстановления также уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A, но лишь до определенного предела: при $r_A \ge \widehat{r}$ эта погрешность постоянна, т. е. за пределами шара $B(0, \widehat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Любой оптимальный метод, как и в предыдущем случае, есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой на шаре $B(0, r_0)$ представляет собой "сглаженное" наблюдение $g(\cdot)$, а вне этого шара оно равно нулю.

Заметим, что неравенство $r_A \le \widehat{r}$ равносильно соотношению

$$\delta^2 r_A^{2\alpha} \le (2\pi)^d \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}},$$

которое можно трактовать как своеобразный "принцип неопределенности", связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0, r_A)$) и погрешность ее измерения.

Выделенная серия оптимальных методов устроена следующим образом. Если $r > 0$, то на шаре $B(0, r)$ информация не "обрабатывается" (подставляется то, что наблюдается), а на шаровом слое $\{\, \xi \mid r < |\xi| \le r_0 \,\}$ наблюдаемая информация "сглаживается". Это соответствует тому, что обычно происходит на практике. Высокие частоты отбрасываются, а низкие тем или иным способом обрабатываются.

Во **2-ой главе** рассматривается случай $q = 2$, $p = \infty$, т. е. когда дробная степень оператора Лапласа функции восстанавливается в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ по информации о преобразовании Фурье функции, известном точно или приближенно в метрике L_∞ на некотором множестве A. Здесь же, в качестве следствия, их доказанного результата извлекается точное неравенство колмогоровского типа для дробных степеней оператора Лапласа.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Для каждых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \delta, d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}.$$

Если A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \operatorname{int} A$, то пусть r_A обозначает то же, что и в теореме 1.1 и пусть также $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$.

Теорема 2.1. *Пусть $0 \le \beta < \alpha$, $\delta > 0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Тогда*

1) *если $0 \notin \operatorname{int} A$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если $0 \in \operatorname{int} A$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\delta^2(\alpha-\beta)}{\gamma(d)(d+2\alpha)(d+2\beta)} r_A^{d+2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \le \widehat{r}, \\ \sqrt{\dfrac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\dfrac{\delta^2}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}, & r_A \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0, r_0)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0, r_0)$ и

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}, & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Как и в предыдущем случае, прокомментируем утверждения данной теоремы. Ее первое утверждение имеет тот же смысл, что и первое утверждение теоремы **??**. Если же $0 \in \operatorname{int} A$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_\infty(A)$, то снова погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A, но до определенного предела: при $r_A \ge \widehat{r}$ эта погрешность стабилизируется. За пределами шара $B(0, \widehat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Оптимальный метод, как и раньше, есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой на шаре $B(0, r_0)$ представляет собой "сглаженное" наблюдение $g(\cdot)$, а вне этого шара оно равно нулю.

Соотношение, связывающее объем полезной информации с точностью ее измерения (т. е. соотношение $r_A \le \widehat{r}$) в данном случае имеет вид

$$r_A^{d+2\alpha}\delta^2 \le 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha).$$

Следствие. *Для всех функций* $f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ *справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le K \|(Ff)(\cdot)\|^{\frac{2(\alpha-\beta)}{d+2\alpha}}_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|^{\frac{d+2\beta}{d+2\alpha}}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K = \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\frac{1}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

В **3-ей главе** рассматривается случай $q = p = \infty$, т. е. когда дробная степень оператора Лапласа функции восстанавливается в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по информации о преобразовании Фурье функции, известном точно или приближенно в метрике L_∞ на некотором множестве A, и также выводится соответствующее точное неравенство для дробных степеней оператора Лапласа. Снова, перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения.

Пусть $\gamma(d)$ — то же, что и предыдущей теореме. Для $\beta \ge 0$, $\alpha > 0$ таких, что $\alpha - \beta > d/2$ и $\delta > 0$ положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha-2\beta-d)}{2\delta^2(2\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}$$

и если $0 < r \le \infty$ и $r_0 = \min(r, \widehat{r})$, то полагаем

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta, r, d) = \frac{r_0^{-2\alpha+\beta}}{\sqrt{2\alpha - 2\beta - d}} \left(\frac{\gamma(d)}{r_0^{d+2\alpha}} - \frac{\delta^2}{d+2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Определим также функцию $a(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \lambda\delta|\xi|^{2\alpha-\beta}, & \xi \in B(0, r_0), \\ \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases},$$

где, напомним, $B(0, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле радиуса r (считаем, что $0 < r \le \infty$, полагая $B(0, \infty) = \mathbb{R}^d$).

Из условия $r_0 \le \widehat{r}$ следует, что выражение в скобках в определении λ положительно и что функция $a(\cdot)$ неотрицательна.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha - \beta > d/2$, $0 < r \le \infty$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0,r)), \delta) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r^{d+\beta}}{\gamma(d)} \left(\dfrac{\delta}{d+\beta} + \sqrt{\dfrac{1}{2\alpha - 2\beta - d} \left(\dfrac{\gamma(d)}{r^{d+2\alpha}} - \dfrac{\delta^2}{d+2\alpha} \right)} \right), & r \le \widehat{r}, \\ \\ \dfrac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta} \left(\dfrac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}} \delta^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d+2\alpha}}, & r \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_\infty(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0, r_0)$ и $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0, r_0)$, или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Здесь, как и в теоремах предыдущих глав, наблюдается эффект насыщения — информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, \widehat{r})$ оказывается лишней. Соотношение, связывающее объем полезной информации и величину погрешности ее измерения, в данном случае имеет вид

$$r^{d+2\alpha}\delta^2 \le \frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha - 2\beta - d)}{2(2\alpha - \beta)}.$$

Следствие. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha - \beta > d/2$. Тогда для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq K \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2\alpha-2\beta-d}{d+2\alpha}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2d+2\beta}{d+2\alpha}},$$

где

$$K = \frac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta} \left(\frac{2\alpha-\beta}{\gamma(d)(2\alpha-2\beta-d)}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Магарил-Ильяеву Георгию Георгиевичу за постоянную поддержку и полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

1. Сивкова Е. О. Точное неравенство для дробных степеней оператора Лапласа, Вестник Тамбовского университета, 14:4 (2009), 796-798.

2. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру, Матем. сборник, 203:4 (2012), 119-130.

3. Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье, Владикавказский мат. журнал, 14:4, (2012), 63-72.

4. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Выпуклая оптимизация и оптимальное восстановление линейных операторов, Тезисы докладов Международной конференции "Управление и оптимизация динамических систем - CODS-2009", Ташкент, 28-30 сентября 2009, с. 62-64.

Сивкова Е. О.

Восстановление дробных степеней оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру и неравенства колмогоровского типа

Аннотация

В работе получены оптимальные методы восстановления и вычислена погрешность оптимального восстановления дробной степени оператора Лапласа функции, принадлежащей соболевскому классу функций на $\mathbb{R}^d$, в метриках $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по ее преобразованию Фурье, известному точно или приближенно на некотором выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^d$. Найдены точные константы в мультипликативных неравенствах для дробных степеней оператора Лапласа функции и ее преобразования Фурье, являющиеся аналогами неравенств для производных колмогоровского типа.

Sivkova E. O.

Optimal recovery of fractional degrees of Laplace operator of a function from its inaccurate spectral data and Kolmogorov-type inequalities

Abstract

In work optimal methods of recovery are obtained and the error of optimal recovery of fractional degree of Laplace operator of function is calculated (belonging to Sobolev class of functions on $\mathbb{R}^d$) in metrics $L_2(\mathbb{R}^d)$ and $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ from its Fourier transform, known exact or approximately on some convex subset $\mathbb{R}^d$. Exact constants are found in the multiplicative inequalities for fractional degrees of Laplace operator of function and its Fourier transform, being analogs of Kolmogorov-type inequalities for derivatives.