РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

СИВКОВА Елена Олеговна

Восстановление дробных степеней оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру и неравенства колмогоровского типа

(01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Г. Магарил-Ильяев

Москва—2013

Оглавление

Введение

1. Работа посвящена вопросам оптимального восстановления дробных степеней оператора Лапласа функций на $\mathbb{R}^d$ по информации о преобразовании Фурье самой функции, известном точно или приближенно (в той или иной метрике) на некотором подмножестве $\mathbb{R}^d$, а также тесно связанным с этим вопросам существования точных неравенств для дробных степеней оператора Лапласа, являющихся аналогами неравенств колмогоровского типа для производных.

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда требуется восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой информации (которая обычно не точна и не полна) о других его характеристиках. Например, необходимо восстановить функцию в точке, или интеграл от нее, или саму функцию целиком (в той или иной метрике) по информации о ее значениях в других точках, о ее преобразовании Фурье, коэффициентах Тейлора и т. п. Существует множество подходов к решению подобных задач. Здесь мы следуем подходу, который предполагает наличие априорной информации об объекте, характеристики которого требуется восстановить. Это позволяет поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди вообще всех возможных методов восстановления. Такой взгляд на задачи восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова [**1**] 30-годов прошлого века о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. Математическая теория, где изучаются задачи восстановления на основе указанного подхода, активно развивается в последние десятилетия.

Предшественником тематики, связанной с оптимальным восстановлением функционалов, можно считать задачу Колмогорова–Никольского о наилучших квадратурах (см. [**2**]). Ее простейшая постановка такова. Пусть W — некоторое подмножество (класс) непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ и пусть фиксированы точки $a = x_1 < \ldots < x_n \le b$. Для каждой функции $f(\cdot) \in W$ мы хотим вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, используя для этого приближенную формулу $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$, где коэффициенты p_i, $1 \le i \le n$, следует выбрать так, чтобы эта формула осуществляла наилучшее приближение интеграла сразу для всех функций из W. Точная постановка задачи состоит в том, чтобы найти величину

$$\inf_{p_1,\ldots,p_n} \sup_{f(\cdot)\in W} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \right|,$$

где нижняя грань берется по всем наборам $(p_1,\ldots,p_n)$, и тот набор, на котором эта нижняя грань достигается. Этот набор и будет задавать искомую квадратурную формулу.

На данную задачу можно посмотреть несколько иначе. Функции из W известны неточно, а именно, о каждой функции $f(\cdot) \in W$ известен вектор $(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ – набор ее значений в точках $x_1,\ldots,x_n$. Мы берем произвольную линейную функцию $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(y) = \sum_{i=1}^n p_i y_i$ $(y = (y_1,\ldots,y_n))$, и ее значение на векторе $(f(x_1),\ldots,f(x_n))$, т. е. величину $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$, принимаем за оценку интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ сразу для всех функций $f(\cdot) \in W$. Погрешность такой оценки определяется величиной

$$\sup_{f(\cdot)\in W} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \right|.$$

Нас, естественно, интересует та линейная функция, на которой эта погрешность минимальна. Такую функцию можно назвать оптимальным методом восстановлением интеграла на данном классе функций.

Отсюда один шаг до общей постановки. Пусть X — линейное пространство, W — непустое подмножество (класс) элементов в X и l_i, $i = 0,1,\ldots,n$, — линейные функционалы на X. Элементы из W известны неточно, а именно, о каждом $x \in W$ известны числа $l_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$ (значения линейных функционалов l_i, $i = 1,\ldots,n$, на элементе x). По этой информации мы хотим восстановить значения линейного функционала l_0 на классе W, и по возможности наилучшим образом. Под этим понимается следующее. Любая функция $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ объявляется методом восстановления (значений l_0 на

W по данной информации) и погрешность такого метода определяется величиной

$$e(l_0, W, l_1, \ldots, l_n, m) = \sup_{x \in W} |l_0(x) - m(l_1(x), \ldots, l_n(x))|.$$

Это “наихудшее”, что можно получить, используя данный способ восстановления.

Нас интересует величина

$$E(l_0, W, l_1, \ldots, l_n) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} e(l_0, W, l_1, \ldots, l_n, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы, на которых эта нижняя грань достигается. Такие методы называем *оптимальными методами восстановления*.

Задача Колмогорова–Никольского является частным случаем общей постановки. Действительно, в качестве X можно взять пространство непрерывных функций на $[a, b]$, l_0 — линейный функционал на X, сопоставляющий функции ее интеграл по отрезку $[a, b]$, l_i — линейный функционал на X, сопоставляющий функции ее значение в точке x_i, $1 \le i \le n$, а в качестве методов восстановления рассматриваются только линейные методы.

Приведенная общая постановка задачи оптимального восстановления функционала принадлежит С. А. Смоляку [**3**]. Он доказал в этой общей ситуации, что если множество W центрально симметрично ($W = -W$), то среди оптимальных методов есть линейный. В дальнейшем тематика, связанная с оптимальным восстановлением, развивалась и обобщалась в разных направлениях. Большое внимание уделялось задачам оптимального восстановления, в которых информация об элементах W задана неточно (например, в общей постановке числа $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, известны приближенно) и, вообще говоря, бесконечномерна (например, информация об $x \in W$ задается не конечным набором чисел, а элементом бесконечномерного пространства). Для таких задач выяснялись условия существования линейного оптимального метода (см., например, [**4**], [**5**] и [**6**]). Окончательный результат — необходимые и достаточные условия существования линейного оптимального метода восстановления для достаточно общей постановки задачи оптимального восстановления линейного функционала — получен в работе [**7**]. Кроме того, было решено множество конкретных задач, где находились методы оптимального восстановления. Представление об этом этапе развития данной тематики отражено в следующих обзорах [**8**], [**9**], [**10**] и монографии [**11**]. Следует отметить, что подход к решению задач оптимального восстановления линейных функционалов по неточным исходным данным с позиций теории экстремума впервые был предпринят в работе [**12**].

В указанных обзорах ставилась и задача оптимального восстановления значений линейного оператора на классе элементов по неточной и неполной информации о самих элементах. Общая постановка этой задачи такова. Пусть X — линейное пространство и W — непустое подмножество (класс) в X. Пусть, далее, Y — нормированное пространство, $I\colon X \to Y$ — линейный оператор и $\delta \geq 0$. Элементы из W известны приближенно, а именно, о каждом элементе $x \in W$ нам известен (нам показывают) элемент $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \leq \delta$ (если $\delta = 0$, то известен элемент Ix). По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) значения на классе W линейного оператора $\Lambda\colon X \to Z$, где Z — другое нормированное пространство.

Любое отображение $m\colon Y \to Z$ объявляется методом восстановления (значений Λ на W по данной информации). Его погрешность определяем по формуле

$$e_Z(\Lambda, W, Y, \delta, m) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y\\ \|Ix-y\|_Y\ \leq\delta}} \|\Lambda x - m(y)\|_Z.$$

Если $\delta = 0$, то это выражение, очевидно, переписывается так

$$e_Z(\Lambda, W, Y, 0, m) = \sup_{x\in W} \|\Lambda x - m(Ix)\|_Z.$$

Величину

$$E_Z(\Lambda, W, Y, \delta) = \inf_m e_Z(\Lambda, W, Y, \delta, m)$$

(где нижняя грань берется по всем методам $m\colon Y \to Z$) называем *погрешностью оптимального восстановления*, а методы, на которых достигается нижняя грань — *оптимальными методами восстановления.*

Первые результаты, касающиеся оптимального восстановления линейных операторов, были получены в работе [**13**]. В дальнейшем эта тематика активно развивалась в работах [**14**]–[**20**].

2. В данной работе решается задача об оптимальном восстановлении дробной степени оператора Лапласа функции в различных метриках на соболевских классах функций по следующей информации: преобразование Фурье самой функции известно либо точно, либо приближенно (в той или иной метрике) на некотором выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^d$ (d — натуральное число). Приведем точные определения.

Оператор Лапласа Δ на $\mathbb{R}^d$ для функции $f(\cdot)$, имеющей вторые частные производные, определяется, как известно, следующим образом

$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

Преобразование Фурье лапласиана $\Delta f(\cdot)$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ имеет вид $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$ для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Это позволяет определить дробную степень оператора Лапласа.

Пусть $\alpha \geq 0$. Если функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что функция $\varphi\colon \xi \to |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то через $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)$ обозначаем функцию, преобразование Фурье которой есть $\varphi(\cdot)$. Понятно, что при $\alpha = 2$ это обычный лапласиан и что $(-\Delta)^0 f(\cdot) = f(\cdot)$.

Соболевским пространством $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ называется совокупность таких функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что функция $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}(Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$).

Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$. Положим

$$\mathcal{W}_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid (Ff)(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d) \,\}$$

и

$$W_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,p}^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \,\}.$$

При этом ясно, что $\mathcal{W}^\alpha_{2,2}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{W}^\alpha_2(\mathbb{R}^d)$ (и, соответственно, $W^\alpha_{2,2}(\mathbb{R}^d) = W^\alpha_2(\mathbb{R}^d)$).

Пусть, далее, $0 \le \beta < \alpha$, $1 \le q \le \infty$, A — непустое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \ge 0$. Мы ставим задачу об оптимальном восстановлении функции $(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)$ в метрике $L_q(\mathbb{R}^d)$ на классе $W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)$ по следующей информации: о каждой функции $f(\cdot) \in W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(A)$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(A)} \le \delta$ (если $\delta = 0$, то функция $(Ff)(\cdot)|_A$ — сужение $(Ff)(\cdot)$ на A— известна точно).

В соответствии с приведенной выше общей постановкой здесь $X = \mathcal{W}^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)$, $W = W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)$, $Y = L_p(A)$, оператор $I\colon X \to Y$ действует по правилу $(If)(\cdot) = (Ff)(\cdot)|_A$, $Z = L_q(\mathbb{R}^d)$ и оператор $\Lambda\colon X \to Z$ таков, что $(\Lambda f)(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)$

Как и в общей ситуации, любой метод (отображение) $m\colon L_p(A) \to L_q(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления и его погрешность определяется по формуле[1]

$$\begin{aligned} &e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta, m) = \\ &\qquad = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_p(A) \\ \|(Ff)(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_p(A)}\ \le\delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Если $\delta = 0$, то это выражение, очевидно, переписывается так

$$\begin{aligned} &e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), 0, m) = \\ &\qquad = \sup_{f(\cdot)\in W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d)} \|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Нас интересует погрешность оптимального восстановления, т. е. величина

$$\begin{aligned} &E_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta) = \\ &\qquad = \inf_m e_q((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,p}(\mathbb{R}^d), L_p(A), \delta, m), \end{aligned}$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_p(A) \to L_q(\mathbb{R}^d)$, и оптимальные методы восстановления, т. е. те методы, на которых нижняя грань достигается.

В диссертации погрешность оптимального восстановления и оптимальные методы находятся для случаев, когда $q = 2$, а $p = 2$ и ∞

[1] Ниже, для сокращения записи, мы пишем индекс q вместо $L_q(\mathbb{R}^d)$.

и когда $q = p = \infty$. Для всех этих случаев, в качестве следствия, выписываются точные неравенства для дробных степеней оператора Лапласа, являющиеся аналогами неравенств колмогоровского типа для производных.

3. Перейдем к формулировкам основных результатов диссертации. В главе 1 рассматривается случай $q = p = 2$, т. е. когда дробная степень оператора Лапласа функции восстанавливается в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ по информации о преобразовании Фурье функции, известном точно или приближенно в метрике L_2 на некотором множестве A.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $0 < \beta < \alpha$ и $\delta > 0$. Обозначим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Пусть, далее, A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \mathrm{intA}$. Положим $r_A = \sup\{\, r > 0 \mid B(0,r) \subset A\,\}$, где $B(x,r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r > 0$. Ясно, что $0 < r_A < \infty$, если A — собственное подмножество и $r_A = +\infty$, если $A = \mathbb{R}^d$.

Обозначим $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$ и положим

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \beta, r_0) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} r_0^{2\beta}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(\alpha, \beta, r_0) = r_0^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Обозначим еще $\langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^d \xi_i x_i$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ и $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Теорема 1.1. *Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\delta \geq 0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\mathrm{int\,A} \neq \emptyset$. Тогда*

1) *если $0 \notin \mathrm{int\,A}$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если A — собственное подмножество, $0 \in \mathrm{int\,A}$ и $\delta = 0$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) = \frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}.$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = (Ff)(\cdot)|_{B(0,r_A)}$, *или, равносильно, для п. в.* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_A} |\xi|^\beta (Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi;$$

3) *если* $0 \in \operatorname{int} \mathrm{A}$ *и* $\delta > 0$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d} r_A^{2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \le \widehat{r}, \\ \left(\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}}, & r_A \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Для каждой функции $a(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ *такой, что* $a(\xi) = 0$, *если* $\xi \notin B(0, r_0)$ *и*

$$\left| a(\xi) - \frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \right| \le \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}|\xi|^\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\sqrt{-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}$$

для п. в. $\xi \in B(0, r_0)$, *оптимальным методом является линейный оператор* $\widehat{m}_a\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(\cdot) = \varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ *на* $B(0, r_0)$ *и* $(F\varphi)(\cdot) = 0$ *вне* $B(0, r_0)$, *или, равносильно, для п. в.* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0} a(\xi)g(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi.$$

В качестве следствия п. 3) теоремы укажем серию оптимальных методов, имеющих явное описание.

Следствие. *В условиях п.* 3) *теоремы для каждого* r *такого, что*

$$0 \le r \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_0$$

оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}_r\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}_r(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = g(\cdot)$ на $B(0,r)$, $(F\varphi)(\cdot) = a_0(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0,r_0)\setminus B(0,r)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0,r_0)$ и

$$a_0(\xi) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1}, & \xi \in B(0,r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0,r_0). \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r}|\xi|^\beta g(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi + \\ + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r\le|\xi|\le r_0}|\xi|^\beta a_0(\xi)g(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi.$$

Прокомментируем утверждения сформулированных теоремы и следствия. Первое утверждение теоремы означает, что если $0 \notin \operatorname{int}\mathrm{A}$, то погрешность любого метода восстановления равна бесконечности и значит, никаким способом нельзя восстановить соответствующую дробную степень оператора Лапласа на всем классе.

Если $0 \in \operatorname{int}\mathrm{A}$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно точно ($\delta = 0$), то чем больше радиус шара с центром в нуле, который можно вписать в A, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Но знание преобразования Фурье за пределами этого шара оказывается лишним — оптимальный метод эту информацию не использует. При этом сам оптимальный метод есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с преобразованием Фурье функции $f(\cdot)$ на шаре $B(0,r_A)$ и равно нулю вне этого шара.

Если $0 \in \operatorname{int}\mathrm{A}$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_2(A)$, то погрешность оптимального восстановления также уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A, но лишь до определенного предела: при $r_A \ge \widehat{r}$ эта погрешность постоянна, т. е. за пределами шара $B(0,\widehat{r})$

информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна (см. рис. 1 и 2).

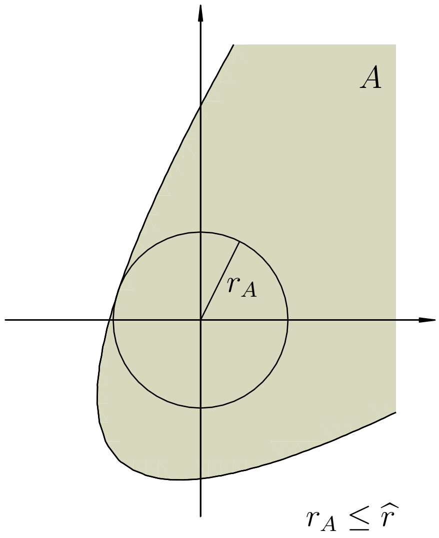

Рис. 1

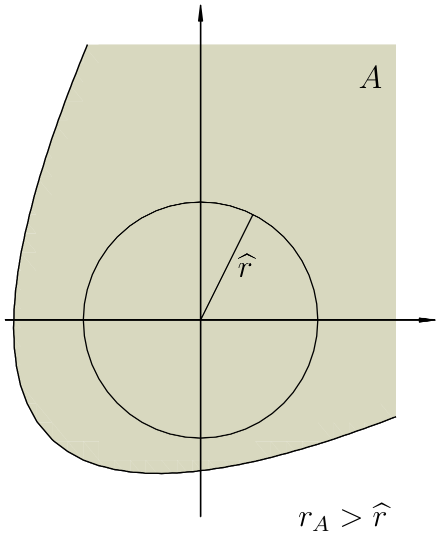

Рис. 2

Любой оптимальный метод, как и в предыдущем случае, есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой на шаре $B(0, r_0)$ представляет собой “сглаженное” наблюдение $g(\cdot)$, а вне этого шара оно равно нулю.

Заметим, что неравенство $r_A \leq \widehat{r}$ равносильно соотношению

$$\delta^2 r_A^{2\alpha} \leq (2\pi)^d \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}},$$

которое можно трактовать как своеобразный “принцип неопределенности”, связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0, r_A)$) и погрешность ее измерения.

Выделенная серия оптимальных методов устроена следующим образом. Если $r > 0$, то на шаре $B(0, r)$ информация не “обрабатывается” (подставляется то, что наблюдается), а на шаровом слое $\{\, \xi \mid r < |\xi| \leq r_0 \,\}$ наблюдаемая информация “сглаживается”. Это соответствует тому, что обычно происходит на практике. Высокие частоты отбрасываются, а низкие тем или иным способом обрабатываются.

Во второй главе рассматривается случай $q = 2$, $p = \infty$, т. е. когда дробная степень оператора Лапласа функции восстанавливается в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ по информации о преобразовании Фурье функции, известном точно или приближенно в метрике L_∞ на некотором множестве A. Здесь же, в качестве следствия, их доказанного результата извлекается точное неравенство колмогоровского типа для дробных степеней оператора Лапласа.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Для каждых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \delta, d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}.$$

Если A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \mathrm{intA}$, то пусть r_A обозначает то же, что и в теореме 1.1 и пусть также $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$.

Теорема 2.1. *Пусть $0 \le \beta < \alpha$, $\delta > 0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\mathrm{int\,A} \neq \emptyset$. Тогда*

1) *если $0 \notin \mathrm{int\,A}$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если $0 \in \mathrm{int\,A}$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\delta^2(\alpha-\beta)}{\gamma(d)(d+2\alpha)(d+2\beta)} r_A^{d+2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \le \widehat{r}, \\ \sqrt{\dfrac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\dfrac{\delta^2}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}, & r_A \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0, r_0)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0, r_0)$ и

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}, & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Как и в предыдущем случае, прокомментируем утверждения данной теоремы. Ее первое утверждение имеет тот же смысл, что и первое утверждение теоремы 1.1. Если же $0 \in \operatorname{int} \mathrm{A}$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_\infty(A)$, то снова погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса вписанного шара в A, но до определенного предела: при $r_A \ge \widehat{r}$ эта погрешность стабилизируется. За пределами шара $B(0, \widehat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Оптимальный метод, как и раньше, есть соответствующая дробная степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой на шаре $B(0, r_0)$ представляет собой "сглаженное" наблюдение $g(\cdot)$, а вне этого шара оно равно нулю.

Соотношение, связывающее объем полезной информации с точностью ее измерения (т. е. соотношение $r_A \le \widehat{r}$) в данном случае имеет вид

$$r_A^{d+2\alpha}\delta^2 \le 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2\alpha).$$

Следствие. *Для всех функций* $f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ *справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le K \|(Ff)(\cdot)\|^{\frac{2(\alpha-\beta)}{d+2\alpha}}_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|^{\frac{d+2\beta}{d+2\alpha}}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K = \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\frac{1}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

В третьей главе рассматривается случай $q = p = \infty$, т. е. когда дробная степень оператора Лапласа функции восстанавливается в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по информации о преобразовании Фурье функции, известном точно или приближенно в метрике L_∞ на некотором множестве A, и также выводится соответствующее точное неравенство для дробных степеней оператора Лапласа. Снова, перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения.

Пусть $\gamma(d)$ — то же, что и предыдущей теореме. Для $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$ таких, что $\alpha - \beta > d/2$ и $\delta > 0$ положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha - 2\beta - d)}{2\delta^2(2\alpha - \beta)}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}$$

и если $0 < r \leq \infty$ и $r_0 = \min(r, \widehat{r})$, то полагаем

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta, r, d) = \frac{r_0^{-2\alpha+\beta}}{\sqrt{2\alpha - 2\beta - d}} \left(\frac{\gamma(d)}{r_0^{d+2\alpha}} - \frac{\delta^2}{d+2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Определим также функцию $a(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \lambda\delta|\xi|^{2\alpha-\beta}, & \xi \in B(0, r_0), \\ \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases},$$

где, напомним, $B(0, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле радиуса r (считаем, что $0 < r \leq \infty$, полагая $B(0, \infty) = \mathbb{R}^d$).

Из условия $r_0 \leq \widehat{r}$ следует, что выражение в скобках в определении λ положительно и что функция $a(\cdot)$ неотрицательна.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha - \beta > d/2$, $0 < r \leq \infty$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0, r)), \delta) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{r^{d+\beta}}{\gamma(d)}\left(\dfrac{\delta}{d+\beta} + \sqrt{\dfrac{1}{2\alpha - 2\beta - d}\left(\dfrac{\gamma(d)}{r^{d+2\alpha}} - \dfrac{\delta^2}{d+2\alpha}\right)}\ \right), & r \leq \widehat{r}, \\ \\ \dfrac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta}\left(\dfrac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}} \delta^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d+2\alpha}}, & r \geq \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_\infty(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0, r_0)$ и $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0, r_0)$, или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle\xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Здесь, как и в теоремах предыдущих глав, наблюдается эффект насыщения — информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0,\widehat{r})$ оказывается лишней. Соотношение, связывающее объем полезной информации и величину погрешности ее измерения, в данном случае имеет вид

$$r^{d+2\alpha}\delta^2 \le \frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha-2\beta-d)}{2(2\alpha-\beta)}.$$

Следствие. *Пусть $\alpha>0$, $\beta\ge 0$ и $\alpha-\beta>d/2$. Тогда для всех функций $f(\cdot)\in\mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \le K\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2\alpha-2\beta-d}{d+2\alpha}}\,\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2d+2\beta}{d+2\alpha}},$$

где

$$K=\frac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta}\left(\frac{2\alpha-\beta}{\gamma(d)(2\alpha-2\beta-d)}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Предварительные сведения

0.1. Некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, неотрицательных целых, действительных и комплексных чисел.

Пусть $d\in\mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$) обозначаем евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^d x_iy_i$, где $x=(x_1,\ldots,x_d)$ и $y=(y_1,\ldots,y_d)$. Евклидову норму (длину) вектора $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ обозначаем так $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_d^2}$.

0.2. Пространства $L_p(\mathbb{R}^d)$. Пусть $1\le p\le\infty$. Через $L_p(\mathbb{R}^d)$ обозначаем совокупность измеримых (комплекснозначных) функций $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, для которых конечна величина

$$\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

если $1\le p<\infty$ и

$$\|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}=\inf\{\,\alpha>0 \mid \operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^d \mid |f(x)|>\alpha\}=0\,\}.$$

Это банахово пространство с нормой $\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$.

0.3. Гармонический анализ. Пусть $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Функция $(Ff)(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, определенная равенством

$$(Ff)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{0.1}$$

называется *преобразованием Фурье функции* $f(\cdot)$.

Теорема 0.1. *Функция $(Ff)(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^d$ и $(Ff)(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$*

Доказательство. Преобразование Фурье корректно определено, так как для каждого $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|(Ff)(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$. Поскольку $f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle \xi_0, x\rangle}$ при $\xi \to \xi_0$ и $|f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}| = |f(x)|$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. [**21**])

$$\lim_{\xi\to\xi_0}(Ff)(\xi) = \lim_{\xi\to\xi_0}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\xi\to\xi_0} f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle \xi_0, x\rangle}\, dx = (Ff)(\xi_0),$$

т. е. функция $(Ff)(\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^d$.

Второе утверждение, для простоты записи, докажем для $d = 1$. Простые функции, т. е. функции, являющиеся линейными комбинациями характеристических функций отрезков, плотны $L_1(\mathbb{R})$ (см. [**21**]). Это, фактически, сразу следует из самого определения интеграла Лебега. Если $\chi_{[a,b]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$, то

$$(F\chi_{[a,b]})(\xi) = \int_a^b e^{i\xi x}\, dx = \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi}$$

и значит, $(F\chi_{[a,b]})(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. Но тогда ясно, что преобразование Фурье любой простой функции обладает этим свойством.

Пусть $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}$ и $\{f_n(\cdot)\}$ — последовательность простых функций, сходящаяся к $f(\cdot)$ в $L_1(\mathbb{R})$. Теперь из очевидных оценок (учитывая плотность простых функций в $L_1(\mathbb{R})$)

$$|(Ff)(\xi)| \le |(Ff)(\xi) - (Ff_n)(\xi)| + |(Ff_n)(\xi)| \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\, dx + |(Ff_n)(\xi)|$$

следует, что $(Ff)(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. $\square$

Теорема 0.2 (Планшереля). *Существует единственный линейный непрерывный оператор, отображающий $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\mathbb{R}^d)$ (также называемый преобразованием Фурье и также обозначаемый через F), который на $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ совпадает с (0.1) и при этом, справедливо равенство*

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|(Ff)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.2}$$

Из (0.2) следует, что F — взаимно однозначное отображение. Обратный оператор к F называется обратным преобразованием Фурье и обозначается F^{-1}. Это линейный непрерывный оператор.

Из (0.2) также следует, что для любых $f_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, 2$, справедливо *равенство Парсеваля*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (Ff_1)(\xi)\overline{(Ff_2)(\xi)}\, d\xi. \tag{0.3}$$

Для этого достаточно подставить в (0.2) функции $f_1(\cdot) + f_2(\cdot)$ и $f_1(\cdot) + if_2(\cdot)$.

Отметим здесь один частный случай формулы обращения для преобразования Фурье, который будет использоваться в дальнейшем.

Лемма. *Если функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что $(Ff)(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, то справедлива формула обращения*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \quad \textit{для п. в. } x \in \mathbb{R}^d. \tag{0.4}$$

Доказательство. Ясно, что справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \overline{(Ff)(\xi)} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi}.$$

Интеграл справа под знаком сопряжения есть преобразование Фурье функции $\overline{(Ff)(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Но так как $\overline{(Ff)(\cdot)} \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то по теореме Планшереля это и преобразование Фурье функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и тем самым интеграл принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, выражение справа в (0.4) есть функция из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Напомним, что скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^d)$ определяется по формуле

$$(g(\cdot), f(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\overline{f(x)}\, dx.$$

Обозначим через $\widetilde{f}(\cdot)$ выражение справа в (0.4). Для любой функции $g(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем, используя теорему Фубини и равенство Парсеваля

$$(g(\cdot), \widetilde{f}(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \overline{\left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \right)} dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \right) \overline{(Ff)(\xi)}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d} ((Fg)(\cdot), (Ff)(\cdot)) = (g(\cdot), f(\cdot)).$$

Поскольку пространство $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (см.[**21**]), то отсюда следует, что $\widetilde{f}(\cdot) = f(\cdot)$ и формула (0.4) доказана. □

0.4. Дробная степень оператора Лапласа и пространства Соболева. Оператор Лапласа Δ на $\mathbb{R}^d$ для функции $f(\cdot)$, имеющей вторые частные производные, определяется, как известно, следующим образом

$$(\Delta f)(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_d^2}.$$

Преобразование Фурье лапласиана $\Delta f(\cdot)$ достаточно гладкой и быстро убывающей функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ имеет вид $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2 Ff(\xi)$ для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Это позволяет определить дробную степень оператора Лапласа.

Пусть $\alpha \geq 0$. Если функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что функция $\varphi\colon \xi \to |\xi|^\alpha (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то через $(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)$ обозначаем функцию, преобразование Фурье которой есть $\varphi(\cdot)$. Ясно, что при $\alpha = 2$ это обычный лапласиан и что $(-\Delta)^0 f(\cdot) = f(\cdot)$.

Соболевским пространством $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ называется совокупность таких функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что функция $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} (Ff)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{W}_2^0(\mathbb{R}^d) = L_2(\mathbb{R}^d)$).

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d)$ — совокупность таких функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, что для любого $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, для которого $k_1 + \ldots + k_d \leq n$, производная

$$x \mapsto D^k f(x) = \frac{\partial f^{k_1+\ldots+k_d}(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_d^{k_d}}$$

также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 0.3. *Если* $0 \le \beta \le \alpha$ *и* $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$, *то* $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Если, дополнительно, $\alpha - \beta > d/2$, *то функция* $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$ *непрерывна и* $(-\Delta)^{\beta/2} f(\xi) \to 0$ *при* $|\xi| \to \infty$.

Доказательство. Пусть $0 \le \beta \le \alpha$ и $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Из тождества

$$|\xi|^\beta (Ff)(\xi) = \frac{|\xi|^\beta}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}}(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}(Ff)(\xi)$$

следует, что функция $\xi \mapsto |\xi|^\beta (Ff)(\xi)$ есть произведение ограниченной функции на функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и тем самым сама является функцией из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть теперь $\alpha - \beta > d/2$ и $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Покажем сначала, что функция $\xi \mapsto |\xi|^\beta (Ff)(\xi)$ (т. е. преобразование Фурье функции $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$) принадлежит $L_1(\mathbb{R}^d)$. Действительно, обозначим $\varphi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\alpha/2}(Ff)(\xi)$. Тогда

$$|\xi|^\beta (Ff)(\xi) = \frac{|\xi|^\beta}{(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}}\,\varphi(\xi).$$

Справа стоит произведение двух функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и поэтому по неравенству Коши–Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta |(Ff)(\xi)|\,d\xi \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\beta}}{(1+|\xi|^2)^\alpha} d\xi\right)^{1/2} \|\varphi(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Итак, преобразование Фурье функции $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$. Из леммы п. 0.3 следует тогда, что для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$(-\Delta)^{\beta/2} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\,d\xi.$$

Но справа, как показано в п. 0.3, стоит непрерывная функция, которая стремится к нулю на бесконечности. □

0.5. Обобщенные функции медленного роста. Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — совокупность бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta (D^\alpha \varphi)(x)| < \infty \tag{0.5}$$

для всех наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ целых неотрицательных чисел, где $D^\alpha \varphi(x) = \partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_d} \varphi(x)/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}$ и $x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_d^{\beta_d}$.

Совокупность полунорм (0.5) (по всем α и β) превращает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в локально выпуклое линейное топологическое пространство (см. [**22**]).

Сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ к $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ называется пространством (медленно растущих) обобщенных функций на $\mathbb{R}^d$. Если $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ и $\varphi(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\langle u, \varphi(\cdot)\rangle$ — значение линейного функционала u на элементе $\varphi(\cdot)$.

Пусть $f(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Тогда $f(\cdot)$ порождает линейный функционал u_f на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ по формуле

$$\langle u_f, \varphi(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Отображение $f(\cdot) \to u_f$ взаимно однозначно и в этом смысле отождествляют функцию $f(\cdot)$ с обобщенной функцией u_f.

Преобразование Фурье $F\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, определяемое соотношением (0.1) (очевидно, $\varphi(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d)$) является линейным непрерывным взаимно однозначным отображением $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Преобразованием Фурье обобщенной функции $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ называется обобщенная функция Fu, определенная формулой

$$\langle Fu, \varphi(\cdot)\rangle = \langle u, (F\varphi)(\cdot)\rangle.$$

Это линейное непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ на себя и обратное отображение также непрерывно.

Если функция $f(\cdot)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^d)$ или $L_2(\mathbb{R}^d)$, то ее преобразование Фурье совпадает с преобразованием Фурье обобщенной функции u_f (в смысле отмеченного выше отождествления). Действительно, пусть $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle Fu_f, \varphi(\cdot)\rangle = \langle u_f, (F\varphi)(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy\right)dx =\\ = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx\right)\varphi(y)\,dy = \langle u_{Ff}, \varphi(\cdot)\rangle.\end{aligned}$$

Пусть теперь $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что если $\varphi(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\overline{(F\varphi)(\xi)} = (F\overline{\varphi})(-\xi)$ и $(2\pi)^{-d}(F^2\overline{\varphi})(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$, как следует из формулы (0.4), которая, очевидно, справедлива для функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Учитывая сказанное, имеем

$$\langle Fu_f, \varphi(\cdot)\rangle = \langle u_f, (F\varphi)(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(F\varphi)(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\overline{(F\overline{\varphi})(-\xi)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(Ff)(\xi)\overline{(F^2\overline{\varphi})(-\xi)}\,d\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}(Ff)(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \langle u_{Ff}, \varphi(\cdot)\rangle,$$

откуда следует, что преобразование Фурье обобщенной функции u_f совпадает с преобразованием Фурье функции f.

0.6. Теорема отделимости. Пусть X — линейное пространство. Непустое множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если с любыми двумя своими точками x и y оно содержит отрезок $[x, y] = \{\, z \in X \mid z = (1-\alpha)x + \alpha y,\ 0 \le \alpha \le 1 \,\}$, соединяющий эти точки.

Теорема 0.4 (отделимости). *Пусть A и B — выпуклые подмножества $\mathbb{R}^d$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что*

$$\sup_{a\in A}\langle\lambda, a\rangle \le \inf_{b\in B}\langle\lambda, b\rangle.$$

Геометрический смысл этого утверждения состоит в том, что множества A и B расположены по разные стороны от гиперплоскости $H = \{\, x \in \mathbb{R}^d \mid \langle\lambda, x\rangle = \gamma \,\}$, где $\sup_{a\in A}\langle\lambda, a\rangle \le \gamma \le \inf_{b\in B}\langle\lambda, b\rangle$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [**23**].

0.7. Выпуклая оптимизация. Пусть X — линейное пространство. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если ее надграфик

$$\operatorname{epi} f = \{\, (x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le \alpha \,\}$$

выпуклое множество в линейном пространстве $X \times \mathbb{R}$.

Пусть $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — выпуклые функции, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, и C — выпуклое подмножество X. Задача

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in C, \qquad (P)$$

заключающаяся в нахождении среди всех допустимых точек x (т. е. удовлетворяющих ограничениям задачи: $f_i(x) \le a_i$, $i = 1, \dots, m$,

$x \in C$) тех, на которых функция $f_0(\cdot)$ достигает минимума, называется *выпуклой задачей*, или задачей *выпуклого программирования.* Точки минимума называют еще решениями данной задачи.

Функция $\mathcal{L}\colon X \times \mathbb{R}^{m+1}$, определенная равенством

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, называется *функцией Лагранжа* задачи (P), а числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа.*

Теорема 0.5 (Каруша–Куна–Таккера). *Если $\widehat{x}$ — минимум в задаче (P), то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$, что*

(a) $\min_{x \in C} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$;

(b) $\widehat{\lambda}_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m$;

(c) $\widehat{\lambda}_i(f_i(\widehat{x}) - a_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Если существует допустимая в (P) точка $\widehat{x}$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$, удовлетворяющие условиям (a), (b) и (c) и при этом $\widehat{\lambda}_0 > 0$, то $\widehat{x}$ — решение задачи (P).

Если найдется точка $\overline{x} \in C$, такая, что $f_i(\overline{x}) < a_i$, $i = 1, \ldots, m$ (условие Слейтера), то $\widehat{\lambda}_0 \neq 0$.

Доказательство этой теоремы содержится в **[23]**. Докажем здесь последние два ее утверждения. Пусть x — допустимая точка в задаче (P). Используя это обстоятельство и (b), затем (a) и (c), будем иметь

$$\widehat{\lambda}_0 f_0(x) \geq \widehat{\lambda}_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i (f_i(x) - a_i) = \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) - \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i a_i \geq$$

$$\geq \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) - \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i a_i = \widehat{\lambda}_0 f_0(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i (f_i(\widehat{x}) - a_i) = \widehat{\lambda}_0 f_0(\widehat{x}).$$

Деля теперь левую и правую части $\widehat{\lambda}_0$, получаем, что $\widehat{x}$ — решение задачи (P).

Пусть выполнено условие Слейтера. Предположим, что $\widehat{\lambda}_0 = 0$. Тогда среди остальных множителей есть ненулевой и мы имеем, учитывая (c)

$$\mathcal{L}(\overline{x}, \widehat{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i f_i(\overline{x}) < \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i a_i = \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i (f_i(\widehat{x}) - a_i) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i a_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}),$$

что противоречит (a).

Заметим, что если выполнено условие Слейтера, то (a), (b) и (c) представляют собой необходимые и достаточные условия того, что допустимая в задаче (P) точка $\widehat{x}$ является решением этой задачи.

Заметим еще, что если условия (a), (b) и (c) выполнены для некоторого набора $\widehat{\lambda}$, то они выполнены и для набора $c\widehat{\lambda}$, где $c > 0$. Следовательно, если $\widehat{\lambda}_0 > 0$, то можно считать, что $\widehat{\lambda}_0 = 1$. В этом случае, если $\widehat{x}$ — решение задачи (P), то легко видеть, что $f_0(\widehat{x}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) - \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i a_i$.

Значением задачи (P) называется нижняя грань чисел $f_0(x)$ по всем допустимым x. Если $\widehat{x}$ — решение задачи (P), то, очевидно, значение задачи равно $f_0(\widehat{x})$.

Глава 1

Восстановление лапласиана функции в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ по ее преобразованию Фурье, известном точно или приближенно в метрике L_2

В этой главе решается задача об оптимальном восстановлении дробной степени оператора Лапласа функции в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на соболевском классе функций по следующей информации: о каждой функции из класса известно ее преобразование Фурье на некотором измеримом подмножестве $A \subset \mathbb{R}^d$ либо точно, либо приближенно в метрике $L_2(A)$. Приведем точную постановку.

В разделе Предварительные сведения п. 0.4 для любого $\alpha \geq 0$ даны определения дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ на $\mathbb{R}^d$ и соболевского пространства функций $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Там же показано, что если $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и $0 \leq \beta \leq \alpha$, то $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $\alpha > 0$. Обозначим

$$W_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \,\}.$$

Пусть, далее, A — непустое измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$. Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на множестве A с точностью до δ в метрике $L_2(A)$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_2(A)$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$ (если $\delta = 0$, то функция $(Ff)(\cdot)|_A$ — сужение $(Ff)(\cdot)$ на A — известна точно).

Пусть $0 \leq \beta \leq \alpha$. Задача об оптимальном восстановлении оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по указанной информации об элементах этого класса ставится следующим образом. Любой метод (отображение) $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления (оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по указанной информации) и его погрешность определяется по формуле

$$e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, m) = \\ = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_2(A) \\ \|(Ff)(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\ \le\delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то это выражение, очевидно, переписывается так

$$e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0, m) = \\ = \sup_{f(\cdot)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует величина

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = \\ = \inf_m e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta, \widehat{m}).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления.*

Под задачей оптимального восстановления оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по указанной информации об элементах $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ понимается задача нахождения погрешности оптимального восстановления и соответствующих оптимальных методов.

Перед формулировкой основного результата данной главы введем некоторые обозначения. Пусть $0 < \beta < \alpha$ и $\delta > 0$. Обозначим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \beta, \delta, d) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Пусть, далее, A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \mathrm{int A}$. Положим $r_A = \sup\{\, r > 0 \mid B(0, r) \subset A\,\}$, где $B(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r > 0$. Ясно, что $0 < r_A < \infty$, если A — собственное подмножество и $r_A = +\infty$, если $A = \mathbb{R}^d$.

Обозначим $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$ и положим

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \beta, r_0) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} r_0^{2\beta}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(\alpha, \beta, r_0) = r_0^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \beta < \alpha$, $\delta \geq 0$, A *— выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^d$ *и* $\operatorname{int} \mathrm{A} \neq \emptyset$. *Тогда*

1) *если* $0 \notin \operatorname{int} \mathrm{A}$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если* A *— собственное подмножество,* $0 \in \operatorname{int} \mathrm{A}$ *и* $\delta = 0$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) = \frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}.$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = (Ff)(\cdot)|_{B(0,r_A)}$, *или, равносильно, для п. в.* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_A} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi;$$

3) *если* $0 \in \operatorname{int} \mathrm{A}$ *и* $\delta > 0$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) = \\ = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d} r_A^{2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \leq \widehat{r}, \\ \left(\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}}, & r_A \geq \widehat{r}. \end{cases}$$

Для каждой функции $a(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ *такой, что* $a(\xi) = 0$, *если* $\xi \notin B(0, r_0)$ *и*

$$\left| a(\xi) - \frac{\lambda_1 |\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}} \right| \leq \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}|\xi|^\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \sqrt{-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}$$

для п. в. $\xi \in B(0, r_0)$, оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}_a\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(\cdot) = \varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0, r_0)$ и $(F\varphi)(\cdot) = 0$ вне $B(0, r_0)$, или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}_a(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Доказательство.

1. Начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta)$. Покажем, что она не меньше значения задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Ff(\cdot)\|_{L_2(A)} \le \delta,$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d) \quad (1.1)$$

(если $\delta = 0$, то первое ограничение имеет вид $(Ff)(\xi) = 0$ для п. в. $\xi \in A$).

Действительно, пусть $f_0(\cdot)$ — допустимая функция в (1.1) (т. е. $f_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-f_0(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)(\cdot)$ — значение отображения m на нулевой функции)

$$\begin{aligned} 2\|(-\Delta)^{\beta/2} f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \|(-\Delta)^{\beta/2} f_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \|(-\Delta)^{\beta/2}(-f_0)(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \\ &\le 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d) \\ \|Ff(\cdot)\|_{L_2(A)} \le \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \\ &\le 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot) \in L_2(A) \\ \|Ff(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(A)} \le \delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1.1), а справа к нижней грани по всем методам m, получаем требуемое.

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля и определению дробной степени оператора Лапласа (см. Предварительные сведения), квадрат значения задачи (1.1) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\quad \int_A|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\le 1,\quad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\quad (1.2)$$

2. Докажем первое утверждение теоремы, т. е. если $0\notin\operatorname{int}\mathrm{A}$, то $E_2((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta)=+\infty$. Для этого, в силу полученной в п. **1** оценки снизу для $E((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),A,\delta)$, достаточно показать, что значение задачи (1.2) равно $+\infty$.

Так как $0\notin\operatorname{int}\mathrm{A}$, то согласно теореме отделимости (см. Предварительные сведения) можно отделить ноль от выпуклого множества $\operatorname{int}\mathrm{A}$, т. е. существует такой вектор $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d$, $|\lambda|=1$, что $\sup_{\xi\in\operatorname{int}\mathrm{A}}\langle\lambda,\xi\rangle\le\langle\lambda,0\rangle=0$. Отсюда следует, что

$$\sup_{\xi\in A}\langle\lambda,\xi\rangle\le 0.\quad (1.3)$$

Для каждого $\varepsilon>0$ рассмотрим шар $B(\varepsilon\lambda,\varepsilon/2)$, который, для краткости, обозначим B_ε. Тогда $B_\varepsilon\cap A=\emptyset$, так как, если $\xi\in B_\varepsilon$, то $|\xi-\varepsilon\lambda|\le\varepsilon/2$, откуда легко выводится, что $\langle\lambda,\xi\rangle>0$ и значит, $\xi\notin A$ согласно (1.3). Пусть функция $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ определена по формуле

$$\varphi_\varepsilon(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{d/2}\left(\int_{B_\varepsilon}|\eta|^{2\alpha}\,d\eta\right)^{-1/2}, & \xi\in B_\varepsilon\\ 0, & \xi\notin B_\varepsilon.\end{cases}$$

Ясно, $\varphi_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $f_\varepsilon(\cdot)=(F^{-1}\varphi_\varepsilon)(\cdot)$. Покажем, что эта функция допустима в задаче (1.2). Действительно, $(Ff_\varepsilon)(\cdot)=\varphi_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и ясно, что функция $\xi\mapsto|\xi|^\alpha(Ff_\varepsilon)(\xi)$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, $(-\Delta)^{\alpha/2}f_\varepsilon(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и поэтому $f_\varepsilon(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Далее, так как функция $(Ff_\varepsilon)(\cdot)$ равна нулю за пределами шара B_ε, то она равна нулю на множестве A и значит, первое ограничение в (1.2) выполняется (и при $\delta>0$ и при $\delta=0$). Наконец,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{2\alpha}|(Ff_\varepsilon)(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int_{B_\varepsilon}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi}{\int_{B_\varepsilon}|\eta|^{2\alpha}\,d\eta}=1$$

и тем самым второе ограничение в задаче (1.2) также выполняется, т. е. функция $f_\varepsilon(\cdot)$ допустима в этой задаче при любом $\varepsilon > 0$.

Теперь, если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi| \le |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \le 3\varepsilon/2$ и мы имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\beta}|Ff_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi = \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\beta}\,d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha}\,d\eta} =$$
$$= \frac{\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha}|\xi|^{-2(\alpha-\beta)}\,d\xi}{\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha}\,d\eta} \ge (3/2)^{-2(\alpha-\beta)}\varepsilon^{-2(\alpha-\beta)},$$

откуда, в силу произвольности ε, следует, что значение максимизируемого функционала в (1.2) может быть сделано сколь угодно большим. Это доказывает утверждение 1) теоремы.

3. Докажем второе утверждение теоремы. Найдем значение величины $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0)$. Как показано выше, квадрат этой величины не меньше значения задачи (1.2). Поскольку $\delta = 0$, то первое ограничение в (1.2) означает, что $(Ff)(\xi) = 0$ для п. в. $\xi \in A$ и тогда сама задача (1.2) переписывается в этом случае так

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (1.4)$$

Каждая функция $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ порождает положительную меру $d\mu_f(\cdot)$ на множестве Σ всех измеримых по Лебегу подмножествах $\mathbb{R}^d$ по формуле $E \to (2\pi)^{-d}\int_E |(Ff)(\xi)|^2\,d\xi$, $E \in \Sigma$. В этих терминах задачу (1.4) можно переписать следующим образом

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\beta}\,d\mu_f(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu_f(\xi) \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Рассмотрим более общую задачу

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus \mathrm{int\,A}} |\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d\setminus \mathrm{int\,A}} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) \le 1, \quad d\mu(\cdot) \ge 0 \quad (1.5)$$

на множестве всех неотрицательных конечных мер на Σ.

Значение этой задачи, очевидно не меньше значения задачи (1.4). Мы найдем решение задачи (1.5) и тем самым ее значение и покажем, что, на самом деле, оно равно значению задачи (1.4).

Рассмотрим для этого такую задачу

$$-\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} |\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) \to \min, \quad \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) \le 1, \quad d\mu(\cdot) \ge 0, \tag{1.6}$$

которая, очевидно, имеет (если имеет) те же решения, что и задача (1.5), а значения задач (1.5) и (1.6) отличаются знаком.

Это выпуклая задача (см. Предварительные сведения, п. 0.7, где X — линейное пространство всех конечных мер на $\mathbb{R}^d$, а C — выпуклый конус неотрицательных мер). Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda) = -\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} |\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} (-\lambda_0|\xi|^{2\beta} + \lambda_1|\xi|^{2\alpha})\,d\mu(\xi),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$.

Поскольку выполнено условие Слейтера (надо взять нулевую меру), то $\lambda_0 > 0$. Далее считаем, что $\lambda_0 = 1$.

Согласно теореме Каруша–Куна–Таккера (Предварительные сведения, п. 0.7), для того, чтобы допустимая в задаче (1.6) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы нашелся множитель Лагранжа $\widehat{\lambda}_1 \ge 0$ такой, что

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1|\xi|^{2\alpha})\,d\mu(\xi) \ge$$
$$\ge \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1|\xi|^{2\alpha})\,d\widehat{\mu}(\xi) \tag{1.7}$$

для любой меры $d\mu(\cdot) \ge 0$ и

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{int}\,\mathrm{A}} |\xi|^{2\alpha}\,d\widehat{\mu}(\xi) - 1 \right) = 0. \tag{1.8}$$

Проанализируем условия (1.7) и (1.8), чтобы понять, какие должны быть мера $\widehat{\mu}(\cdot)$ и множитель Лагранжа $\widehat{\lambda}_1$.

Заметим, что правая часть (1.7) равна нулю. Действительно, если она больше нуля, то беря в качестве меры $d\mu(\cdot)$ меру $(1/2)d\widehat{\mu}(\cdot)$, придем к противоречию с (1.7), а если меньше нуля, то надо взять меру $2d\widehat{\mu}(\cdot)$ и снова придем к противоречию с (1.7).

Функция $\xi \mapsto g(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 |\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}$. В самом деле, если $g(\overline{\xi}) < 0$, для некоторого $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}$, то беря $d\mu(\cdot) = \delta(\cdot - \overline{\xi})$ (δ-функция в точке $\overline{\xi}$), получаем противоречие с (1.7). Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ должна быть сосредоточена в нулях функции $g(\cdot)$, которые образуют сферу $|\xi| = \widehat{\lambda}_1^{-1/(2(\alpha-\beta))}$ (предполагаем, что $\widehat{\lambda}_1 > 0$). Если радиус этой сферы меньше r_A, то функция $g(\cdot)$ будет положительной на множестве $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}$, а если больше r_A, то на этом множестве она будет принимать и отрицательные значения. Следовательно, $\widehat{\lambda}_1^{-1/(2(\alpha-\beta))} = r_A$ и тем самым необходимо

$$\widehat{\lambda}_1 = r_A^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Граница шара $B(0, r_A)$ и граница A, очевидно, имеют непустое пересечение. Пусть ξ_0 принадлежит этому пересечению (тем самым $|\xi_0| = r_A$). Тогда эта точка является нулем $g(\cdot)$ и принадлежит множеству $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}$. Положим $d\widehat{\mu}(\cdot) = \gamma\delta(\cdot - \xi_0)$, где $\gamma > 0$ подберем из условия

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}} |\xi|^{2\alpha} \, d\widehat{\mu}(\xi) = \gamma |\xi_0|^{2\alpha} = \gamma r_A^{2\alpha} = 1$$

и значит, $\gamma = r_A^{-2\alpha}$.

Полагая теперь $\widehat{\lambda}_1 = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и $d\widehat{\mu}(\cdot) = r_A^{-2\alpha}\delta(\cdot - \xi_0)$, видим, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (1.6), $\widehat{\lambda}_1 > 0$, условия (1.7) и (1.8) выполняются (условие (1.7) выполняется, поскольку правая часть равна нулю), поэтому согласно теореме Каруша–Куна–Таккера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (1.6), а значит, и задачи (1.5). Следовательно, значение задачи (1.5) равно

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} \mathrm{A}} |\xi|^{2\beta} \, d\widehat{\mu}(\xi) = r_A^{-2\alpha} |\xi_0|^{2\beta} = r_A^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Покажем, что оно совпадает со значением задачи (1.4). Для этого построим δ-образную последовательность допустимых функций в (1.4) (аппроксимирующую меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$), на которой максимизируемый функционал сходится к $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$.

Определенная выше точка ξ_0 не принадлежит $\operatorname{int} \mathrm{A}$, поэтому ее можно отделить от выпуклого множества $\operatorname{int} \mathrm{A}$, т. е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi \in A} \langle \lambda, \xi \rangle \le \langle \lambda, \xi_0 \rangle$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и рассмотрим шар $B(\xi_n, 1/(2n))$.

Он не пересекается с A (если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то отсюда легко выводится, что $\langle \lambda, \xi \rangle > \langle \lambda, \xi_0 \rangle$ и значит, $\xi \notin A$). Обозначим

$$V_n = \frac{\pi^{d/2}}{(2n)^d \Gamma(d/2+1)}.$$

Это объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(\cdot)$, определенных по формуле

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-\alpha}, & \xi \in B(\xi_n, 1/(2n)), \\ 0, & \xi \notin B(\xi_n, 1/(2n)). \end{cases}$$

Ясно, $\varphi_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $f_n(\cdot) = (F^{-1}\varphi_n)(\cdot)$. Покажем, что эти функции допустимы в задаче (1.4). Как и раньше (см. п. **2**) проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то $|\xi| \le |\xi - \xi_0 - (1/n)\lambda + \xi_0 + (1/n)\lambda| \le 1/(2n) + |\xi_0| + 1/n = r_A + 3/(2n)$ и мы имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_n)(\xi)|^2 \, d\xi = \\ = V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi \\ \le V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n = 1.$$

Таким образом, функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (1.4).

Пусть снова $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$. Тогда $r_A = |\xi_0| \le |\xi| + |\xi_0 - \xi + (1/n)\lambda| + |(1/n)\lambda| \le |\xi| + 1/(2n) + 1/n$, т. е. $|\xi| \ge r_A - 3/(2n)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} |(Ff_n)(\xi)|^2 \, d\xi = \\ = V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \int_{B(\xi_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\beta} \, d\xi \\ \ge V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\beta} V_n.$$

Правая часть этого неравенства стремится к $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ при $n \to \infty$, а левая не превосходит этой величины (поскольку значение задачи (1.4) не больше значений задачи (1.5)), откуда вытекает, что значение задачи (1.4) равно $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$.

Тогда отсюда и из установленной ранее оценки снизу для погрешности оптимального восстановления следует неравенство

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,2}(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) \geq \frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}.$$

Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в утверждении 2) теоремы метода восстановления.

Оптимальность метода $\widehat{m}$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - \widehat{m}((Ff)(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max,$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_2(\mathbb{R}^d) \quad (1.9)$$

совпадает с величиной $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_2(\mathbb{R}^d), A, 0)$.

В образах Фурье действие метода $\widehat{m}$ состоит в том, что надо взять сужение преобразования $(Ff)(\cdot)$ на шар $B(0, r_A)$, продолжить его нулем за пределы этого шара (обозначим соответствующую функцию $(Ff)_A(\cdot)$) и умножить на функцию $\xi \mapsto |\xi|^\beta$. Тогда переходя к образам Фурье в задаче (1.9), получим по теореме Планшереля и определению дробной степени оператора Лапласа, что квадрат ее значения равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} ||\xi|^\beta (Ff)(\xi) - |\xi|^\beta (Ff)_A(\xi)|^2\, d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\, d\xi \leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_2(\mathbb{R}^d). \quad (1.10)$$

Теперь оценивая максимизируемый функционал (1.10), получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi) - (Ff)_A(\xi)|^2\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2\beta}|Ff(\xi)|^2\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\, d\xi \leq$$
$$\leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\, d\xi \leq r_A^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Отсюда следует, что $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{2,2}(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) \le r_A^{-(\alpha-\beta)}$. Вместе с предыдущей оценкой это означает, что

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_{2,2}(\mathbb{R}^d), L_2(A), 0) = r_A^{-(\alpha-\beta)}$$

и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод. Утверждение 2) теоремы доказано.

4. Докажем третье утверждение теоремы. Как и раньше, начинаем с оценки снизу величины $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^{\alpha}_2(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta)$, квадрат которой, по доказанному выше, не меньше значения задачи (1.2).

Начнем со случая, когда $A = \mathbb{R}^d$. Для нахождения значения задачи (1.2) рассмотрим (как и в предыдущем пункте) ее расширенный вариант ("заменяя" $(2\pi)^{-d}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi$ на $d\mu(\xi)$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi) \le \frac{\delta^2}{(2\pi)^d},$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) \le 1, \quad d\mu(\cdot) \ge 0. \quad (1.11)$$

Снова можно записать соответствующую задачу на минимум, которая будет выпуклой задачей. Условие Слейтера выполнено и поэтому ее функцию Лагранжа пишем сразу с $\lambda_0 = 1$

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = -\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi) + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha})\,d\mu(\xi),$$

где $\lambda = (1, \lambda_1, \lambda_2)$.

Согласно теореме Каруша–Куна–Таккера для того, чтобы допустимая в задаче (1.11) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы нашлись множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_1 \ge 0$ и $\widehat{\lambda}_2 \ge 0$ такие, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha})\,d\mu(\xi) \ge$$
$$\ge \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha})\,d\widehat{\mu}(\xi) \quad (1.12)$$

для любой меры $d\mu(\cdot) \ge 0$ и

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(\xi) - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,d\widehat{\mu}(\xi) - 1 \right) = 0. \quad (1.13)$$

Как и в предыдущем случае, можно показать, что функция $\xi \mapsto g(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}$ должна быть неотрицательной на $\mathbb{R}^d$, а мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в ее нулях. Легко проверить, что минимум этой функции для любого $\widehat{\lambda}_2 \neq 0$ достигается на сфере

$$S = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} \widehat{\lambda}_2^{-\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} \right\}$$

и этот минимум отрицателен. Беря в качестве $\widehat{\lambda}_1$ число, противоположное значению функции $g(\cdot)$ на этой сфере, получаем, что

$$\widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2^{-\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \frac{\alpha-\beta}{\alpha}. \tag{1.14}$$

Таким образом, при любых $\widehat{\lambda}_2 > 0$ и $\widehat{\lambda}_1 > 0$, связанных соотношением (1.14), функция $g(\cdot)$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d$ и обращается в ноль на сфере S.

Пусть $\xi_1 \in S$. Положим $d\widehat{\mu}(\cdot) = C\delta(\cdot - \xi_1)$ и подберем C и $\widehat{\lambda}_2$ так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(\xi) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \;\Leftrightarrow\; C = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\, d\widehat{\mu}(\xi) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\xi_1|^{2\alpha} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \widehat{\lambda}_2^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} = 1.$$

Из этих соотношений и (1.14), получаем, что

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}.$$

Данные множители Лагранжа положительны, мера $d\widehat{\mu}(\cdot) = (\delta^2/(2\pi)^d)\delta(\cdot - \xi_1)$ допустима в задаче (1.11), условия (1.12) и (1.13) выполняются, поэтому согласно теореме Каруша–Куна–Таккера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (1.11). Ее значение таково

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\xi_1|^{2\beta} = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} = \widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} + \widehat{\lambda}_2. \tag{1.15}$$

Покажем, что эта величина есть значение задачи (1.2) в рассматриваемом случае ($A = \mathbb{R}^d$). Поступаем так же, как и раньше, строим последовательность допустимых функций в (1.2), максимизируемый функционал на которых сходится к (1.15). Мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в точке ξ_1. Заметим что

$$|\xi_1| = \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}. \tag{1.16}$$

Пусть точка $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^d$ такова, что $|\overline{\xi}| = 1$ и пусть $\overline{\xi}_n = ((\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)} - 1/(2n))\overline{\xi}$ (где n достаточно велико, чтобы выражение в скобках было положительно). Для таких n рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(\cdot)$, определенных формулой

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} V_n^{-1/2}\delta, & \xi \in B(\overline{\xi}_n, 1/(2n)), \\ \\ 0, & \xi \notin B(\overline{\xi}_n, 1/(2n)), \end{cases}$$

где, напомним, V_n — объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$.

Положим $f_n(\cdot) = (F^{-1}\varphi_n)(\cdot)$ и покажем, что эти функции допустимы в задаче (1.2). Как и раньше (см. п. **2**) проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее

$$\int_A |(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi = \int_{B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))} |(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi = \\ = V_n^{-1}\delta^2 \int_{B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))} d\xi = \delta^2$$

и (если $\xi \in B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))$, то $|\xi| \le |\xi - \overline{\xi}| + |\overline{\xi}| \le 1/(2n) + (\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)} - 1/(2n) = (\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)}$)

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}|(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi \le \\ \le \frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \le \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}\right)^{2\alpha} = 1,$$

так что последовательность $f_n(\cdot)$ допустима в задаче (1.2).

Из оценки (если $\xi \in B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))$, то $|\overline{\xi}| \le |\xi - \overline{\xi}| + |\xi| \le 1/(2n) + |\xi|$ и поэтому $|\xi| \ge (\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)} - 1/(2n) - 1/(2n) =$

$(\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)} - 1/n)$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\bar{\xi}_n,1/(2n))}|\xi|^{2\beta}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi \geq$$
$$\geq \frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\bar{\xi}_n,1/(2n))}|\xi|^{2\beta}d\xi \geq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}} - \frac{1}{n}\right)^{2\beta},$$

следует, что при $n \to \infty$ выражение справа стремится к величине (1.15) и значит, это величина и есть значение задачи (1.2).

Как было установлено выше, квадрат погрешности оптимального восстановления $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta)$ не меньше значения задачи (1.2) и поэтому для случая $A = \mathbb{R}^d$ доказана следующая оценка

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,2}^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) \geq \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}} = \widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} + \widehat{\lambda}_2. \tag{1.17}$$

Теперь получим оценку снизу для погрешности оптимального восстановления, когда A — собственное подмножество $\mathbb{R}^d$. Для этого нужно найти значение задачи (1.2), расширенный вариант которой (аналогично предыдущему случаю) имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathrm{int\,A}} d\mu(\xi) \leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d},$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) \leq 1, \quad d\mu(\cdot) \geq 0. \tag{1.18}$$

Функция Лагранжа этой задачи такова

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda) = -\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}\,d\mu(\xi) + \lambda_1\int_{\mathrm{int\,A}} d\mu(\xi) + \lambda_2\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,d\mu(\xi) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}(-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1\chi_A(\xi) + \lambda_2|\xi|^{2\alpha})\,d\mu(\xi),$$

где $\lambda = (1, \lambda_1, \lambda_2)$ и $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\mathrm{int\,A}$.

Снова, согласно теореме Каруша–Куна–Таккера, для того, чтобы допустимая в задаче (1.18) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы нашлись множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_1 \geq 0$

и $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ такие, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 \chi_A(\xi) + \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha})\, d\mu(\xi) \geq$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^d} (-|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 \chi_A(\xi) + \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha})\, d\widehat{\mu}(\xi) \quad (1.19)$$

для любой меры $d\mu(\cdot) \geq 0$ и

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathrm{int\,A}} d\widehat{\mu}(\xi) - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\, d\widehat{\mu}(\xi) - 1 \right) = 0. \quad (1.20)$$

Рассмотрим сначала случай $r_A \geq \widehat{r}$. Покажем, что в этой ситуации полученное выше решение задачи (1.11) является решением и задачи (1.18). Действительно, пусть $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ и $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — те же, что и в случае $A = \mathbb{R}^d$. Мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в точке ξ_1. Из (1.16) и определения $\widehat{r}$ следует, что $|\xi_1| < \widehat{r} \leq r_A$ и поэтому $\xi_1 \in \mathrm{int\,A}$. Повторяя предыдущие вычисления, получаем, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (1.18) и условия (1.20) выполняются.

Далее, легко проверить, что функция $\xi \mapsto g(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha}$, как функция $|\xi|$, монотонно убывает при $|\xi| \leq (\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)}$ (максимальное значение равно $\widehat{\lambda}_1$) и монотонно возрастает при $|\xi| \geq (\delta^2/(2\pi)^d)^{-1/(2\alpha)}$. На сфере $|\xi| = \widehat{r}$ ее значение равно $\widehat{\lambda}_1$. Отсюда легко понять, что функция $\xi \mapsto g_A(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 \chi_A(\xi) + \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d$. Но тогда выполняется условие (1.19) и тем самым мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (1.18). Значение ее такое же как и в задаче (1.11). То, что это значение совпадает со значением задачи (1.2) проверяется так же как в предыдущем случае, подходит та же последовательность функций (надо только заметить, что для достаточно больших n шар $B(\overline{\xi}_n, 1/(2n))$ содержится в $\mathrm{int\,A}$). Отсюда следует, что для случая $r_A \geq \widehat{r}$ справедлива та же оценка (1.17).

Рассмотрим последний случай $r_A < \widehat{r}$. Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\alpha - \beta}} r_A^{2\beta}, \qquad \widehat{\lambda}_2 = r_A^{-2(\alpha - \beta)}.$$

Ясно, что это положительные числа. Нетрудно убедиться, что с такими $\widehat{\lambda}_i$, $i = 1, 2$, функция $\xi \mapsto \widehat{g}(\xi) = -|\xi|^{2\beta} + \widehat{\lambda}_1 \chi_A(\xi) + \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d$ и зануляется на сферах $|\xi| = |\xi_0| = r_A$ и

$|\xi| = (\beta/\alpha)^{1/2(\alpha-\beta)} r_A$, где ξ_0 — то же, что и в п. **3** (точка пересечения границы шара $B(0, r_A)$ и границы множества A). Пусть $\xi' = (\beta/\alpha)^{1/2(\alpha-\beta)}\xi_0$. Поскольку $|\xi'| = (\beta/\alpha)^{1/2(\alpha-\beta)} r_A < r_A$, то $\xi' \in \mathrm{int\,A}$. Рассмотрим меру

$$d\widehat{\mu}(\cdot) = C_1\delta(\cdot - \xi_0) + C_2\delta(\cdot - \xi'),$$

где C_1 и C_2 подберем так, чтобы

$$\int_{\mathrm{int\,A}} d\widehat{\mu}(\xi) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \quad\Leftrightarrow\quad C_2 = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\, d\widehat{\mu}(\xi) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1|\xi_0|^{2\alpha} + C_2|\xi'|^{2\alpha} =$$

$$= C_1 r_A^{2\alpha} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} r_A^{2\alpha} = 1,$$

откуда

$$C_1 = r_A^{-2\alpha} - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}.$$

Так как $r_A < \widehat{r}$, то $C_1 > 0$. Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (1.18) и выполняются условия (1.20). Условие (1.19) также выполняется, поскольку подынтегральная функция неотрицательна, а мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в ее нулях и поэтому правая часть (1.19) равна нулю. Следовательно, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (1.18) и ее значение таково

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \left(r_A^{-2\alpha} - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}\right) r_A^{2\beta} +$$

$$+ \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} r_A^{2\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} r_A^{2\beta} + \frac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}} =$$

$$= \widehat{\lambda}_1 \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} + \widehat{\lambda}_2. \quad (1.21)$$

Покажем, что это число есть значение задачи (1.2) в рассматриваемом случае. Ясно, что $B(\xi', 1/2n) \subset A$ для достаточно больших n. Выше была определена последовательность ξ_n и показано, что шар $B(\xi_n, 1/2n)$ не пересекается с A и тем самым для больших n шары $B(\xi_n, 1/(2n))$ и $B(\xi', 1/(2n))$ не пересекаются. Далее, так как

$r_A < \widehat{r}$, то нетрудно проверить, что

$$\gamma_n = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\alpha} > 0,$$

если n достаточно велико. Для указанных n определим последовательность функций $\varphi_n(\cdot)$ по правилу:

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2}\left(r_A + \dfrac{3}{2n}\right)^{-\alpha}\sqrt{\gamma_n}, & \xi \in B(\xi_n, 1/(2n)) \\ V_n^{-1/2}\delta, & \xi \in B(\xi', 1/(2n)) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где, напомним, V_n — объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$.

Положим $f_n(\cdot) = (F^{-1}\varphi_n)(\cdot)$ и покажем, что эти функции допустимы в задаче (1.2). Как и раньше (см. п. **2**) проверяется, что они принадлежат $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее

$$\int_A |(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi = \int_{B(\xi',1/(2n))} |(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi = \\ = V_n^{-1}\delta^2 \int_{B(\xi',1/(2n))} d\xi = \delta^2.$$

Поскольку $|\xi| \le r_A + 3/(2n)$, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$ (как было показано выше) и $|\xi| \le (\beta/\alpha)^{1/2(\alpha-\beta)} r_A + 1/(2n)$, если $\xi \in B(\xi', 1/(2n))$, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi_n,1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi + \\ + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi \le \\ \le V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma_n \int_{B(\xi_n,1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}\,d\xi + \\ + \frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \le \\ \le \gamma_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\alpha} = 1,$$

т. е. функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (1.2).

Далее (учитывая, как было отмечено выше, что $|\xi| \geq r_A - 3/(2n)$, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$)

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi =$$

$$= V_n^{-1}\left(r_A+\frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma_n\int_{B(\xi_n,1/(2n))}|\xi|^{2\beta}\,d\xi +$$

$$+\frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))}|\xi|^{2\beta}d\xi \geq \left(r_A+\frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\gamma_n\left(r_A-\frac{3}{2n}\right)^{2\beta}+$$

$$+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}}r_A+\frac{1}{2n}\right)^{2\beta}.$$

Выражение справа, как легко видеть, стремится при $n \to \infty$ к величине (1.21) и значит, эта величина — значение задачи (1.2).

Числа λ_1 и λ_2, определенные перед формулировкой теоремы, переходят в числа $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ при $r_A \geq \widehat{r}$ и, очевидно, переходят в числа $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ при $r_A < \widehat{r}$. Таким образом, значение задачи (1.2) во всех случаях равно $\lambda_1\delta^2(2\pi)^{-d}+\lambda_2$. Учитывая, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше этой величины, то получаем следующую оценку

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), L_2(A), \delta) \geq \sqrt{\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2}. \qquad (1.22)$$

Если подставить сюда выражения для λ_1 и λ_2, то приходим к нужной оценке снизу для погрешности оптимального восстановления.

5. В этом пункте докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и построим оптимальные методы. Оптимальные методы будем искать среди линейных операторов из $L_2(A)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ следующего вида. Пусть функция $\alpha(\cdot)$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и равна нулю вне шара $B(0, r_A)$. Каждая такая функция задает оператор $m_a\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, сопоставляющий функции $g(\cdot) \in L_2(A)$ функцию $m_a(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразование Фурье которой имеет вид $(Fm_a(g(\cdot)))(\cdot) = a(\cdot)g_A(\cdot)$, где $g_A(\cdot)$ — функция, равная $g(\cdot)$ на A и нулю вне A. Выбор такого семейства операторов обусловлен тем, что оператор $(-\Delta)^{\beta/2}$ инвариантен относительно сдвига, а такие операторы в образах Фурье представляют собой умножение на функцию из $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. С другой стороны, из полученной оценки снизу видно, что информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0,r_A)$ не нужна (в оценке участвует только величина r_A), так что естественно ограничиться функциями $a(\cdot)$, которые равны нулю вне $B(0,r_A)$.

Оптимальность какого-либо метода m_a означает, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-m_a(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\quad \|Ff(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\le\delta,\\ g(\cdot)\in L_2(A),\quad \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1,\quad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)\end{aligned}\tag{1.23}$$

равно величине $E_2((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta)$.

В образах Фурье, по теореме Планшереля и по определению дробной степени оператора Лапласа, квадрат значения этой задачи равен значению такой задачи

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}||\xi|^\beta Ff(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ &\qquad\int_A|Ff(\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi\le\delta^2,\quad g(\cdot)\in L_2(A),\\ &\qquad\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi\le 1,\quad f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\end{aligned}\tag{1.24}$$

Пусть λ_1 и λ_2 — те, что определены перед формулировкой теоремы. Оценим по неравенству Коши–Буняковского для каждого $0<|\xi|\le r_0$ выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале в (1.24)

$$\begin{aligned}&||\xi|^\beta(Ff)(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)|^2=|a(\xi)((Ff)(\xi)-g_A(\xi))+\\ &\quad+(|\xi|^\beta-a(\xi))(Ff)(\xi)|^2=\left|\frac{a(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}((Ff)(\xi)-g_A(\xi))+\right.\\ &\left.+\frac{|\xi|^\beta-a(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^\alpha}\sqrt{\lambda_2}|\xi|^\alpha(Ff)(\xi)\right|^2\le\left(\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}+\frac{||\xi|^\beta-a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\right)\times\\ &\qquad\times(\lambda_1|(Ff)(\xi)-g_A(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2).\end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по шару $B(0,r_0)$, обозначая

$$Q_a(\xi)=\frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1}+\frac{||\xi|^\beta-a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}},\quad 0<|\xi|\le r_0,$$

будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0}||\xi|^\beta Ff(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)|^2\,d\xi\le$$
$$\le\|Q(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}\biggl(\lambda_1\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0}|(Ff)(\xi)-g_A(\xi)|^2\,d\xi+$$
$$+\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\biggr)\le$$
$$\le\|Q_a(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}\biggl(\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\biggr).\tag{1.25}$$

Оценим теперь интеграл по дополнению к $B(0,r_0)$ (учитывая, что функция $a(\cdot)$ на этом множестве равна нулю)

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}||\xi|^\beta(Ff)(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)|^2\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2(\beta-\alpha)}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi\le$$
$$\le r_0^{-2(\alpha-\beta)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi=$$
$$=\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi.$$

Если функция $a(\cdot)$ такова, что $\|Q_a(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}\le 1$, то складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}||\xi|^\beta Ff(\xi)-a(\xi)g_A(\xi)|^2\,d\xi\le\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2$$

и значит,

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),L_2(A),\delta)\le\sqrt{\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2}.$$

Вместе с оценкой (1.22) это означает, что при таком $a(\cdot)$ метод m_a оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме. Осталось проверить, что условие $\|Q_a(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}\le 1$ равносильно условию, приведенному в формулировке теоремы.

Действительно, после несложных преобразований имеем

$$Q_a(\xi) = \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{||\xi|^\beta - a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} = \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} -$$
$$- \frac{2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \operatorname{Re} |\xi|^\beta a(\xi) + \frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}{\lambda_1\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \Bigg(|a(\xi)|^2 -$$
$$- \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \operatorname{Re} |\xi|^\beta a(\xi) \Bigg) + \frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}{\lambda_1\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \Bigg| a(\xi) -$$
$$- \frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \Bigg|^2 - \frac{\lambda_1|\xi|^{2\beta}}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha})} + \frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} =$$
$$= \frac{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}{\lambda_1\lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \left| a(\xi) - \frac{\lambda_1|\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}} \right|^2 + \frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}}.$$

Отсюда уже легко следует, что требование $Q_a(\xi) \le 1$ для п. в. $\xi \in B(0, r_0)$ равносильно соотношению в формулировке теоремы. Заметим, что из рассмотрений выше следует, что функция $\xi \mapsto -|\xi|^{2\beta} + \lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d$. $\square$

В качестве следствия п. 3) теоремы укажем серию оптимальных методов, имеющих явное описание.

Следствие. *В условиях п.* 3) *теоремы для каждого* r *такого, что*

$$0 \le r \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_0$$

оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}_r\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}_r(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = g(\cdot)$ *на* $B(0, r)$, $(F\varphi)(\cdot) = a_0(\cdot)g(\cdot)$ *на* $B(0, r_0) \setminus B(0, r)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ *вне* $B(0, r_0)$ *и*

$$a_0(\xi) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1}, & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0). \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r} |\xi|^\beta g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi + \\ + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{r \le |\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a_0(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Доказательство. Очевидно, что метод $\widehat{m}_{\widetilde{a}}$, где

$$\widetilde{a}(\xi) = \frac{\lambda_1 |\xi|^\beta}{\lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}},$$

является оптимальным. Подставляя сюда выражения для λ_1 и λ_2, получаем оптимальный метод, который соответствует $r = 0$.

В конце доказательства теоремы была определена функция $Q_a(\cdot)$. Если положить $a(\xi) = |\xi|^\beta$, то при $|\xi|^{2\beta} \le \lambda_1$, или равносильно

$$|\xi| \le \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}} r_0,$$

получаем, что $Q(\xi) \le 1$. Таким образом, указанные в теореме методы $\widehat{m}_r$ являются оптимальными. $\square$

Глава 2

Восстановление лапласиана функции в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ по ее преобразованию Фурье, известном точно или приближенно в метрике L_∞

В данной главе решается задача, аналогичная той, которая рассмотрена в предыдущей главе. Разница в том, что здесь преобразование Фурье на множестве A известно приближенно в метрике $L_\infty(A)$. Напомним, что в разделе Предварительные сведения п. 0.4 для любого $\alpha \ge 0$ даны определения дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ на $\mathbb{R}^d$ и соболевского пространства функций $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и показано, что если $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и $0 \le \beta \le \alpha$, то $(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $\alpha > 0$. Обозначим

$$\mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid (Ff)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)\,\}$$

и

$$W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1\,\}.$$

Пусть, далее, A — непустое измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \ge 0$. Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на множестве A с точностью до δ в метрике $L_\infty(A)$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(A)$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta$ (если $\delta = 0$, то функция $(Ff)(\cdot)|_A$ известна точно).

Пусть $0 \le \beta \le \alpha$. Задача об оптимальном восстановлении оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по указанной информации об элементах этого класса ставится аналогично предыдущему: любой метод (отображение) $m\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$

объявляется методом восстановления и его погрешность определяется по формуле

$$e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta, m) = \\ = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_\infty(A)\\ \|(Ff)(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty(A)}\ \le\delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Как и раньше, нас интересует погрешность оптимального восстановления

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) = \\ = \inf_m e_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается. Эти методы называем оптимальными.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Для каждых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha, \delta, d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}.$$

Если A — подмножество $\mathbb{R}^d$ такое, что $0 \in \mathrm{intA}$, то пусть r_A обозначает то же, что и теореме 1.1 гл. 1, и пусть также $r_0 = \min(r_A, \widehat{r})$.

Теорема 2.1. *Пусть $0 \le \beta < \alpha$, $\delta > 0$, A — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\mathrm{int\,A} \ne \emptyset$. Тогда*

1) *если $0 \notin \mathrm{int\,A}$, то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) = +\infty;$$

2) *если* $0 \in \operatorname{int} \mathrm{A}$, *то*

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\delta^2(\alpha-\beta)}{\gamma(d)(d+2\alpha)(d+2\beta)} r_A^{d+2\beta} + \dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A \le \widehat{r}, \\ \sqrt{\dfrac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\dfrac{\delta^2}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}, & r_A \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, *действующий по правилу*

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ *на* $B(0, r_0)$, $(F\varphi)(\cdot) = 0$ *вне* $B(0, r_0)$ *и*

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}, & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases}$$

или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Доказательство. **1**. Как и при доказательстве теоремы 1.1, начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A), \delta)$. Точно те же рассуждения, что и в указанной теореме показывают, что эта величина не меньше значения следующей задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta,$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \quad (2.1)$$

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля и определению дробной степени оператора Лапласа, квадрат значения задачи (2.1) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |(Ff)(\xi)|^2\, d\xi \to \max, \quad \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff)(\xi)|^2\, d\xi \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad (2.2)$$

Первое утверждение теоремы доказывается дословно также как первое утверждение теоремы 1.1.

2. Докажем второе утверждение. Найдем значение задачи (2.2).

Пусть сначала $r_A \geq \widehat{r}$. Покажем, что в этом случае у задачи (2.2) существует решение. Перепишем ее следующим образом

$$-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \to \min, \quad |(Ff)(\xi)|^2 \leq \delta^2$$
$$\text{для п. в. } \xi \in A, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \leq 1,$$
$$f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \quad (2.3)$$

Множества решений задач (2.2) и (2.3), очевидно, совпадают, а значения отличаются знаком. Будем смотреть на задачу (2.3), формально, как на выпуклую задачу (относительно переменной $|(Ff)(\cdot)|^2$), где первое ограничение задает континуум ограничений (по $\xi \in A$). При составлении функции Лагранжа каждое такое ограничение надо умножить на множитель $\lambda_1(\xi)$ и “сложить”, т. е. проинтегрировать. Учитывая эти “наводящие соображения”, сопоставим данной задаче следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi +$$
$$+\int_A \lambda_1(\xi)|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi + \lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(-|\xi|^{2\beta} + (2\pi)^d\chi_A(\xi)\lambda_1(\xi) + \lambda_2|\xi|^{2\alpha})|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi, \quad (2.4)$$

где $\lambda = (1, \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$ и $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A.

Покажем, что если найдутся неотрицательная ограниченная измеримая функция $\lambda_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, число $\lambda_2 \geq 0$ (обозначим $\widehat{\lambda} = (1, \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$) и допустимая в задаче (2.3) функция $\widehat{f}(\cdot)$, для которых выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda}) \quad (2.5)$$

для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, а также соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^d}\lambda_1(\xi)(|(F\widehat{f})(\xi)|^2 - \delta^2)\,d\xi = 0 \quad (2.6)$$

и

$$\widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(F\widehat{f})(\xi)|^2\,d\xi-1\right)=0, \tag{2.7}$$

то $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (2.3).

Действительно, пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (2.3). Тогда используя это обстоятельство и неотрицательность $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2$, неравенство (2.5), а затем равенства (2.6) и (2.7), будем иметь

$$-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \geq -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi+$$

$$+\int_A\widehat{\lambda}_1(\xi)(|(Ff)(\xi)|^2-\delta^2)\,d\xi+\widehat{\lambda}_2\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi-1\right)=$$

$$=\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\lambda})-\delta^2\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi-\widehat{\lambda}_2\geq\mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot),\widehat{\lambda})-\delta^2\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi-\widehat{\lambda}_2=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(F\widehat{f})(\xi)|^2\,d\xi,$$

откуда следует, что $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (2.3).

Предъявим $\widehat{f}(\cdot)$, $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\geq 0$ и $\widehat{\lambda}_2\geq 0$, удовлетворяющие условиям (2.5), (2.6) и (2.7). Пусть функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что $(F\widehat{f})(\cdot)=\delta$ на шаре $B(0,\widehat{r})$ и $(F\widehat{f})(\cdot)=0$ вне этого шара, $\widehat{\lambda}_2=\widehat{r}^{-2(\alpha-\beta)}$ и

$$\widehat{\lambda}_1(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^d}\left(|\xi|^{2\beta}-\widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}\right), & \xi\in B(0,\widehat{r}),\\ 0, & \xi\notin B(0,\widehat{r}).\end{cases}$$

Функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче (2.3). Действительно, то, что $\widehat{f}(\cdot)\in\mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ проверяется аналогично предыдущему (см., например, п. **2** в доказательстве теоремы 1.1). Ясно, что $\widehat{f}(\cdot)$ удовлетворяет первому ограничению в (2.3). Если теперь учесть нетрудно проверяемое равенство

$$\int_{B(0,r)}|\xi|^{2s}\,d\xi=\frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)}r^{d+2s}, \tag{2.8}$$

справедливое для любых $s>0$ и $r>0$ и выражение для $\widehat{r}$, то будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(F\widehat{f})(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,\widehat{r})}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi=1. \tag{2.9}$$

Таким образом, $\widehat{f}(\cdot)$ удовлетворяет второму ограничению в задаче (2.3) и значит, функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в этой задаче.

Далее ясно, что $\widehat{\lambda}_2 > 0$ и элементарно проверяется, что $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$. Очевидным образом выполняются условия (2.6) и (2.7). Наконец, простая проверка показывает, что $\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}) \geq 0$ для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ (так как выражение в скобках под знаком интеграла справа в (2.4), как легко убедиться, неотрицательно на $\mathbb{R}^d$) и что $\mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}) = 0$. Следовательно, соотношение (2.5) также выполняется и тем самым, $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (2.3).

Теперь мы можем вычислить (с учетом (2.9)) значение задачи (2.2):

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} |F\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,\widehat{r})} |\xi|^{2\beta} \, d\xi =$$
$$= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,\widehat{r})} \left(|\xi|^{2\beta} - \widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha} \right) d\xi + \widehat{\lambda}_2 = \delta^2 \int_{B(0,\widehat{r})} \widehat{\lambda}_1(\xi) \, d\xi + \widehat{\lambda}_2.$$

Пусть теперь $r_A < \widehat{r}$. Можно показать, что в этом случае у задачи (2.3) нет решения и поэтому для нахождения ее значения (аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1) рассмотрим следующий расширенный вариант данной задачи:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} \, d\mu(\xi) \to \max, \quad (2\pi)^d p(\xi) \leq \delta^2 \quad \text{для п. в. } \xi \in \operatorname{int} A,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, d\mu(\xi) \leq 1, \quad d\mu(\cdot) \geq 0, \quad (2.10)$$

где мера $d\mu(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на множестве $\operatorname{int} A$ и $p(\cdot)$ — ее производная (мы "заменяем" меру $(2\pi)^{-d} |(Ff)(\xi)|^2 \, d\xi$ на $d\mu(\xi)$ и поэтому такой вид имеет первое ограничение в задаче). Так как $d\mu(\cdot) \geq 0$, то $p(\xi) \geq 0$ для п. в. $\xi \in \operatorname{int} A$.

Сопоставим этой задаче функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = -\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} \, d\mu(\xi) + (2\pi)^d \int_{\operatorname{int} A} \lambda_1(\xi) p(\xi) \, d\xi +$$
$$+ \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, d\mu(\xi) = \int_{\operatorname{int} A} (-|\xi|^{2\beta} + (2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}) p(\xi) \, d\xi +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} A} (-|\xi|^{2\beta} + \lambda_2 |\xi|^{2\alpha}) \, d\mu(\xi), \quad (2.11)$$

где $\lambda = (1, \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$.

Если найдутся неотрицательная ограниченная измеримая функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, число $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ (обозначим $\widehat{\lambda} = (1, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2)$) и допустимая в задаче (2.10) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ (с производной $\widehat{p}(\cdot)$ на $\operatorname{int} A$), для которых выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) \geq \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) \tag{2.12}$$

для всех функций мер $d\mu(\cdot) \geq 0$, которые абсолютно непрерывны на $\operatorname{int} A$, а также соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\lambda}_1(\xi) \left((2\pi)^d \widehat{p}(\xi) - \delta^2\right) d\xi = 0 \tag{2.13}$$

и

$$\widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, d\widehat{\mu}(\xi) - 1\right) = 0, \tag{2.14}$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (2.10). Доказательство этого факта проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае ($r_A \geq \widehat{r}$) и поэтому мы его опускаем.

Предъявим $d\widehat{\mu}(\cdot)$, $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$ и $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$, удовлетворяющие условиям (2.12), (2.13) и (2.14).

По определению r_A граница шара $B(0, r_A)$ и граница A имеют непустое пересечение. Пусть ξ_0 принадлежит этому пересечению. Тогда, очевидно, $|\xi_0| = r_A$ и $\xi_0 \notin \operatorname{int}$ A. Меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ определим так. На $\operatorname{int} A$ ее производная такова

$$\widehat{p}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}, & \xi \in B(0, r_A), \\ 0, & \xi \in \mathrm{intA} \setminus B(0, r_A). \end{cases}$$

За пределами intA она сосредоточена в одной точке ξ_0, т. е. имеет вид $C\delta(\cdot - \xi_0)$, где $C \geq 0$. Ясно, что эта мера удовлетворяет первому ограничению в задаче (2.10). Подберем теперь C так, чтобы второе ограничение равнялось единице:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, d\widehat{\mu}(\xi) = C r_A^{2\alpha} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi = 1.$$

Отсюда с учетом (2.8) следует, что

$$C = r_A^{-2\alpha} \left(1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi\right) = r_A^{-2\alpha} \left(1 - \frac{\delta^2 \ r_A^{d+2\alpha}}{\gamma(d)(d + 2\alpha)}\right).$$

Так как $r_A < \widehat{r}$, то выражение в скобках положительно. Итак, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (2.10).

Положим $\widehat{\lambda}_2 = r_A^{-2(\alpha-\beta)}$ и

$$\widehat{\lambda}_1(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^d}\left(|\xi|^{2\beta} - \widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}\right), & \xi \in B(0, r_A), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_A). \end{cases}$$

Ясно, что $\widehat{\lambda}_2 > 0$ и легко проверить, что $\widehat{\lambda}_1 \geq 0$ на $\mathbb{R}^d$. Также легко видеть, что выполняются условия (2.13) и (2.14).

Функция $\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda})$ неотрицательна (так как первый сомножитель под знаком первого интеграла в правой части (2.11) равен нулю на шаре $B(0, r_A)$, а вне этого шара он положителен; во втором интеграле первый сомножитель положителен вне $B(0, r_A)$) и $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}) = 0$ (первый сомножитель под знаком первого интеграла в правой части (2.11) равен нулю на шаре $B(0, r_A)$, а на $\operatorname{int} A \setminus B(0, r_A)$ равна нулю функция $\widehat{p}(\cdot)$; второй интеграл равен нулю, так как первый сомножитель равен нулю в точке ξ_0). Таким образом, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (2.10) и ее значение таково

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\, d\widehat{\mu}(\xi) = C|\xi_0|^{2\beta} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\beta}\, d\xi = \\ = r_A^{-2\alpha}\left(1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi\right) r_A^{2\beta} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\beta}\, d\xi = \\ = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)} \left(|\xi|^{2\beta} - \widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}\right) d\xi + \widehat{\lambda}_2 = \\ = \delta^2 \int_{B(0,r_A)} \widehat{\lambda}_1(\xi)\, d\xi + \widehat{\lambda}_2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Эта величина не меньше значения задачи (2.2). Покажем, что на самом деле оно с ней совпадает.

Как уже отмечено, точка ξ_0 принадлежит пересечению границы шара $B(0, r_A)$ и границы множества A. Тогда ее можно отделить от выпуклого множества $\operatorname{int} A$, т. е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi\in A}\langle\lambda, \xi\rangle \leq \langle\lambda, \xi_0\rangle$. Теперь для каждого $n \in \mathbb{N}$ (как и при доказательстве теоремы 1.1, см. п. **3**) положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и заметим, что шар $B(\xi_n, 1/(2n))$ не пересекается с A.

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, определенных по формуле

$$\varphi_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\, V_n^{-1/2} \left(r_A + \dfrac{3}{2n}\right)^{-\alpha} \sqrt{\kappa}, & \xi \in B(\xi_n, 1/(2n)), \\ \delta, & \xi \in B(0, r_A), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где, напомним, V_n — объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$, а

$$\kappa = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi = 1 - \frac{\delta^2\, r_A^{d+2\alpha}}{\gamma(d)(d+2\alpha)}$$

и $\kappa > 0$, так как $r_A < \widehat{r}$.

Положим $f_n(\cdot) = (F^{-1}\varphi_n)(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что функции $f_n(\cdot)$ допустимы в задаче (2.2). То, что $f_n(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ проверяется аналогично тому, как это было неоднократно сделано ранее.

То, что функции $f_n(\cdot)$ удовлетворяют первому ограничению задачи (2.2) очевидно.

Заметим теперь, что если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то $|\xi| \le r_A + 3/(2n)$ (как было отмечено при доказательстве в п. **3** теоремы 1.1) и мы получаем (для краткости $B_n = B(\xi_n, 1/(2n))$)

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_n} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha} |(Ff_n)(\xi)|^2\, d\xi =$$
$$= V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \kappa \int_{B_n} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi \le$$
$$\le V_n^{-1} \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} \kappa \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi =$$
$$= \kappa + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0,r_A)} |\xi|^{2\alpha}\, d\xi = 1.$$

Таким образом, последовательность функций $f_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, допустима в задаче (2.2).

Теперь оценим снизу величину максимизируемого функционала в (2.2), учитывая, что $|\xi| \ge r_A - 3/(2n)$, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$

(доказательство теоремы 1.1 п. **3**)

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\beta}|(Ff_n)(\xi)|^2\,d\xi = V_n^{-1}\left(r_A+\frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\kappa\int_{B_n}|\xi|^{2\beta}\,d\xi+$$
$$+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)}|\xi|^{2\beta}\,d\xi \geq \left(r_A+\frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\kappa\left(r_A-\frac{3}{2n}\right)^{2\beta}+$$
$$+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(0,r_A)}|\xi|^{2\beta}\,d\xi$$

Выражение справа, как легко видеть, стремится при $n\to\infty$ к величине (2.15) и значит, эта величина — значение задачи (2.2).

Положим $\lambda_2 = r_0^{-2(\alpha-\beta)}$ и

$$\lambda_1(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^d}\left(|\xi|^{2\beta}-\lambda_2|\xi|^{2\alpha}\right), & \xi\in B(0,r_0), \\ 0, & \xi\notin B(0,r_0). \end{cases}$$

Тогда $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2 совпадают с определенными выше множителями Лагранжа $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2$ как для случая $r_A\geq\widehat{r}$, так и для случая $r_A\leq\widehat{r}$. Следовательно, учитывая, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.2), получаем следующую оценку

$$E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A),\delta) \geq \sqrt{\delta^2\int_{B(0,r_A)}\lambda_1(\xi)\,d\xi+\lambda_2}. \tag{2.16}$$

Если подставить сюда выражения для λ_1 и λ_2, то получим требуемую оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

3. Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в теореме метода восстановления.

Оптимальность метода m означает, по определению, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\quad \|(Ff)(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty(A)}\leq\delta,$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq 1,\quad g(\cdot)\in L_\infty(A),\quad f(\cdot)\in\mathcal{W}_{2,\infty}^{\alpha}(\mathbb{R}^d) \tag{2.17}$$

равно $E_2((-\Delta)^{\beta/2}, W_{2,\infty}^{\alpha}(\mathbb{R}^d), L_\infty(A),\delta)$.

Оптимальный метод будем искать среди линейных отображений $m\colon L_\infty(A)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу: $(Fm)(g(\cdot))(\cdot)=a_1(\cdot)g_A(\cdot)$, где $g_A(\cdot)=g(\cdot)$ на A и $g_A(\cdot)=0$ вне A, а функция $a_1(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такова, что $a_1(\cdot)=0$ вне $B(0,r_0)$. Пусть m — отображение такого вида. Оценим сверху максимизируемый функционал в (2.17). Согласно теореме Планшереля его квадрат запишется так

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|<r_0}||\xi|^\beta(Ff)(\xi)-a_1(\xi)g(\xi)|^2\,d\xi+ \\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\geq r_0}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi. \quad (2.18)$$

Пусть $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2 — те, что определены выше. Преобразуем выражение под знаком первого интеграла, а затем оценим его по неравенству Коши–Буняковского

$$||\xi|^\beta(Ff)(\xi)-a_1(\xi)g(\xi)|^2= \\ \left|\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{(2\pi)^d\ \lambda_1(\xi)}}\sqrt{(2\pi)^d\ \lambda_1(\xi)}((Ff)(\xi)-g(\xi))+\right. \\ \left.+\frac{(|\xi|^\beta-a_1(\xi))}{\sqrt{\lambda_2}\ |\xi|^\alpha}\sqrt{\lambda_2}\,|\xi|^\alpha(Ff)(\xi)\right|^2\leq\left(\frac{|a_1(\xi)|^2}{(2\pi)^d\ \lambda_1(\xi)}+\frac{||\xi|^\beta-a_1(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\right)\times \\ \times((2\pi)^d\ \lambda_1(\xi)|(Ff)(\xi)-g(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2). \quad (2.19)$$

Нетрудно убедиться, что для каждого ξ минимум выражения

$$\frac{|a_1|^2}{(2\pi)^d\ \lambda_1(\xi)}+\frac{||\xi|^\beta-a_1|^2}{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}$$

по a_1 достигается в точке

$$a_1(\xi)=|\xi|^\beta\left(1-\left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2(\alpha-\beta)}\right) \quad (2.20)$$

и сам этот минимум равен единице.

Возьмем в качестве функции $a_1(\cdot)$ функцию, определенную последним соотношением. Тогда интегрируя (2.19) с учетом сказанного, а также учитывая первое ограничение в (2.17), получаем оценку для первого слагаемого в (2.18)

$$\delta^2\int_{|\xi|<r_0}\lambda_1(\xi)\,d\xi+\lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|<r_0}|\xi|^{2\alpha}|Ff(\xi)|^2\,d\xi.$$

Второе слагаемое оцениваем так

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\ge r_0}|\xi|^{2\beta}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\ge r_0}|\xi|^{2(\beta-\alpha)}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi \le$$
$$\le \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\ge r_0}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi.$$

Складывая эти оценки, применяя теорему Планшереля и учитывая второе ограничение (2.17) получаем для квадрата максимизируемого функционала в (2.17) следующую оценку сверху

$$\delta^2\int_{|\xi|<r_0}\lambda_1(\xi)\,d\xi + \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|(Ff)(\xi)|^2\,d\xi =$$
$$= \delta^2\int_{|\xi|<r_0}\lambda_1(\xi)\,d\xi + \lambda_2\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le$$
$$\le \delta^2\int_{B(0,r_0)}\lambda_1(\xi)\,d\xi + \lambda_2.$$

Согласно (2.16) величина справа не превосходит квадрата погрешности оптимального восстановления. Следовательно, погрешность метода $\widehat{m}$ из формулировки теоремы (который в образах Фурье есть умножение на функцию, равную (2.20) на шаре $B(0,r_0)$ и нулю вне его) не превосходит погрешности оптимального восстановления и значит, совпадает с ней. Таким образом, получено указанное в теореме выражение для погрешности оптимального восстановления и показано, что метод $\widehat{m}$ является оптимальным. $\square$

Следствие. *Для всех функций $f(\cdot)\in\mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le K\|(Ff)(\cdot)\|^{\frac{2(\alpha-\beta)}{d+2\alpha}}_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|^{\frac{d+2\beta}{d+2\alpha}}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K = \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}}\left(\frac{1}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Доказательство. Из доказанной теоремы следует, что значение задачи (2.1) при $A=\mathbb{R}^d$ равно величине

$$\sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}}\left(\frac{\delta^2}{\gamma(d)(d+2\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Пусть $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и $f(\cdot) \neq 0$. Тогда функция

$$\frac{f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$$

удовлетворяет ограничениям задачи (2.1) при

$$\delta = \frac{\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{\frac{d+2\alpha}{d+2\beta}} \left(\frac{\delta^2}{\gamma(d)(d+2\alpha)} \right)^{\frac{\alpha-\beta}{d+2\alpha}}.$$

Подставляя сюда выражение для δ, получаем нужное утверждение.

$\square$

Глава 3

Восстановление лапласиана функции в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по ее преобразованию Фурье, известному приближенно в метрике L_∞

В этой главе решается задача, аналогичная рассмотренным в предыдущих двух главах. Здесь, как и во второй главе, преобразование Фурье на множестве A известно приближенно в метрике $L_\infty(A)$. Но дробную степень оператора Лапласа мы восстанавливаем не в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$, а в $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Напомним, что в разделе Предварительные сведения п. 0.4 для любого $\alpha \geq 0$ даны определения дробной степени оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ на $\mathbb{R}^d$ и соболевского пространства функций $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и показано, что если $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ и $2(\alpha-\beta)-d>0$, то $(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^d$, стремящаяся к нулю на бесконечности.

Как и в предыдущей главе, для каждого $\alpha>0$ положим

$$\mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid (Ff)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \,\}$$

и

$$W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d) \mid \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \,\}.$$

Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на шаре $B(0,r)$ (удобно считать, что $0 < r \leq \infty$, полагая $B(0,r) = \mathbb{R}^d$ при $r=\infty$) с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_\infty(B(0,r))$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(B(0,r))$ такая, что $\|(Ff)(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r))} \leq \delta$.

Пусть $2(\alpha-\beta)-d>0$. Задача об оптимальном восстановлении оператора $(-\Delta)^{\beta/2}$ в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ на классе $W_{2,\infty}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по указанной информации об элементах этого класса ставится аналогично предыдущему: любой метод (отображение) $m\colon L_\infty(B(0,r)) \to L_\infty(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления и его погрешность определяется по формуле

$$e_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0,r)), \delta, m) = \\ = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_\infty(B(0,r)) \\ \|(Ff)(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r))}\ \le\delta}} \|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует погрешность оптимального восстановления

$$E_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0,r)), \delta) = \\ = \inf_m e_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0,r)), \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_\infty(B(0,r)) \to L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и оптимальные методы $\widehat{m}$, т. е. те методы, на которых нижняя грань достигается.

Перед формулировкой теоремы введем некоторые величины. Как и в предыдущей главе, для краткости обозначим

$$\gamma(d) = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2).$$

Пусть $\alpha - \beta > d/2$. Положим

$$\widehat{r} = \widehat{r}(\alpha,\beta,\delta,d) = \left(\frac{\gamma(d)(d+2\alpha)(2\alpha-2\beta-d)}{2\delta^2(2\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{d+2\alpha}}$$

и если $0 < r \le \infty$ и $r_0 = \min(r, \widehat{r})$, то полагаем

$$\lambda = \lambda(\alpha,\beta,\delta,r,d) = \frac{r_0^{-2\alpha+\beta}}{\sqrt{2\alpha-2\beta-d}}\left(\frac{\gamma(d)}{r_0^{d+2\alpha}} - \frac{\delta^2}{d+2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Определим также функцию $a(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \lambda\delta|\xi|^{2\alpha-\beta}, & \xi \in B(0,r_0), \\ \\ 0, & \xi \notin B(0,r_0). \end{cases}$$

Из условия $r_0 \le \widehat{r}$ следует, что выражение в скобках в определении λ положительно и что функция $a(\cdot)$ неотрицательна.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha - \beta > d/2$, $0 < r \le \infty$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), L_\infty(B(0,r)), \delta) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{r^{d+\beta}}{\gamma(d)}\left(\dfrac{\delta}{d+\beta} + \sqrt{\dfrac{1}{2\alpha-2\beta-d}\left(\dfrac{\gamma(d)}{r^{d+2\alpha}} - \dfrac{\delta^2}{d+2\alpha}\right)}\right), & r \le \widehat{r}, \\ \dfrac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta}\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{\gamma(d)(2\alpha-2\beta-d)}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}} \delta^{\frac{2\alpha-2\beta-d}{d+2\alpha}}, & r \ge \widehat{r}. \end{cases}$$

Оптимальным методом восстановления является линейный оператор $\widehat{m}\colon L_\infty(A) \to L_\infty(\mathbb{R}^d)$, действующий по правилу

$$\widehat{m}(g(\cdot))(\cdot) = (-\Delta)^{\beta/2}\varphi(\cdot),$$

где $(F\varphi)(\cdot) = a(\cdot)g(\cdot)$ на $B(0,r_0)$ и нулю вне $B(0,r_0)$, или, равносильно, для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

Доказательство. **1**. Как и при доказательстве теорем 1.1 и 2.1 начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E_\infty((-\Delta)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), B(0,r), \delta)$. Точно такие же рассуждения, как и в указанных теоремах, показывают, что эта величина не меньше значения следующей задачи

$$\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r))} \le \delta,$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \quad (3.1)$$

Предположим, что $\widehat{f}(\cdot)$ — решение данной задачи. Поскольку $(-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}(\cdot)$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$ (см. Предварительные сведения), то существует такая точка x_0, что

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = |(-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}(x_0)|.$$

Рассмотрим функцию $\widehat{f}_0(\cdot) = \widehat{f}(\cdot + x_0)$. Она также является решением задачи (3.1). Действительно, во-первых, она допустима в этой задаче, так как для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ справедливо равенство

$$(F\widehat{f}_0)(\xi) = e^{i\langle \xi, x_0\rangle}(F\widehat{f})(\xi)$$

и поэтому $\widehat{f}_0(\cdot)$ удовлетворяет первому ограничению в задаче. Отсюда и определения дробной степени оператора Лапласа легко следует, что и второе ограничение выполняется для $\widehat{f}_0(\cdot)$.

Далее (см. Предварительные сведения)

$$(-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^\beta(F\widehat{f})(\xi)e^{i\langle\xi,x_0\rangle}\,d\xi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^\beta(F\widehat{f}_0)(\xi)\,d\xi = (-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}_0(0).$$

Кроме того, можно считать, что $(F\widehat{f})(\cdot)$ — вещественная положительная функция (умножая, если необходимо, эту функцию на соответствующую комплексную экспоненту). Тогда величина $(-\Delta)^{\beta/2}\widehat{f}(x_0)$ также будет вещественным положительным числом. Таким образом, нахождение решения задачи (3.1) равносильно нахождению решения такой задачи

$$(-\Delta)^{\beta/2}f(0)\to\max,\quad \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r))}\le\delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 1,\quad f(\cdot)\in\mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),$$

которую, переходя к образам Фурье, можно переписать так

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^\beta(Ff)(\xi)\,d\xi\to\max,\quad (Ff)(\xi)\le\delta\quad\text{для п. в.} \\ \xi\in B(0,r),\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}((Ff)(\xi))^2\,d\xi\le 1, \\ f(\cdot)\in\mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \quad (3.2)$$

Это выпуклая задача. Сопоставим ей следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^\beta(Ff)(\xi)\,d\xi + \int_{B(0,r)}\lambda_1(\xi)(Ff)(\xi)\,d\xi + \\ + \lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}((Ff)(\xi))^2\,d\xi,$$

где $\lambda = (1,\lambda_1(\cdot),\lambda_2)$.

Далее рассуждаем эвристически. Если функция $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3.2), то должны найтись такие множители Лагранжа

$\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$ и $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ (обозначим $\widehat{\lambda} = (1, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2)$), для которых выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \widehat{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}) \tag{3.3}$$

для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Чтобы понять структуру $\widehat{f}(\cdot)$, $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2$, расшифруем условие (3.3). Функция Лагранжа — гладкая функция по $f(\cdot)$ и в точке $\widehat{f}(\cdot)$ она достигает минимума, поэтому в этой точке ее производная равна нулю, или (формально)

$$\begin{multline}-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\beta}(Ff)(\xi)\,d\xi + \int_{B(0,r)}\widehat{\lambda}_1(\xi)(Ff)(\xi)\,d\xi + \\ + 2\widehat{\lambda}_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}(Ff)(\xi)(F\widehat{f})(\xi)\,d\xi = 0 \tag{3.4}\end{multline}$$

для всех $f(\cdot)$.

Это тождество, очевидно, равносильно такому соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(-|\xi|^{\beta} + (2\pi)^d\widehat{\lambda}_1(\xi)\chi_r(\xi) + 2\widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}(F\widehat{f})(\xi)\Big)(Ff)(\xi)\,d\xi = 0,$$

где $\chi_r(\cdot)$ — характеристическая функция шара $B(0,r)$. Отсюда, в свою очередь, следует тождество

$$-|\xi|^{\beta} + (2\pi)^d\widehat{\lambda}_1(\xi)\chi_r(\xi) + 2\widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}(F\widehat{f})(\xi) = 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Из вида минимизируемого функционала естественно считать, что $(F\widehat{f})(\xi) = \delta$ на как можно более широком множестве. Если это так, то из последнего тождества можно определить вид $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ на этом множестве. Затем можно найти $\widehat{\lambda}_2$ из условия, что $\widehat{f}(\cdot)$ должно удовлетворять второму ограничению в задаче.

Имея в виду все эти соображения, перейдем к точным определениям. Положим $2\widehat{\lambda}_2 = \lambda$ и

$$\widehat{\lambda}_1(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}|\xi|^{\beta}a(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

где λ и $a(\cdot)$ определены перед формулировкой теоремы.

Пусть функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что

$$(F\widehat{f})(\xi) = \begin{cases} \delta, & \xi \in B(0, r_0), \\ \dfrac{1}{2\widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha-\beta}}, & \xi \notin B(0, r_0). \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (3.2). Действительно, легко проверяется (аналогичные рассуждения проводились не раз выше), что $\widehat{f}(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и ясно, что $\widehat{f}(\cdot)$ удовлетворяет первому ограничению задачи. Далее, используя формулу (2.8), легко проверяемую формулу $(s > d)$

$$\int_{|\xi| \geq r} \frac{d\xi}{|\xi|^s} = \frac{2r^{-(s-d)}\pi^{d/2}}{(s-d)\Gamma(d/2)}$$

и выражение для $2\widehat{\lambda}_2 = \lambda$, получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(F\widehat{f})(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq r_0} |\xi|^{2\alpha} \, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{4\widehat{\lambda}_2^2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| > r_0} \frac{d\xi}{|\xi|^{2(\alpha-\beta)}} = \frac{\delta^2 r_0^{d+2\alpha}}{\gamma(d)(d+2\alpha)} +$$
$$+ \frac{r_0^{-(2\alpha-2\beta-d)}}{4\widehat{\lambda}_2^2 \gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} = 1$$

и тем самым функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче (3.2).

Теперь мы докажем аналог тождества (3.4) и из него уже извлечем и оценку снизу для задачи (3.2) и оптимальный метод.

Для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим функцию $\widetilde{f}_x(\cdot)$, определенную условием

$$(F\widetilde{f}_x)(\xi) = \begin{cases} \delta e^{-i\langle \xi, x\rangle}, & \xi \in B(0, r_0), \\ \dfrac{e^{-i\langle \xi, x\rangle}}{2\widehat{\lambda}_2 |\xi|^{2\alpha-\beta}}, & \xi \notin B(0, r_0). \end{cases}$$

Ясно, что $\widetilde{f}_0(\cdot) = \widehat{f}(\cdot)$.

Докажем, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ справедливо тождество

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\beta}(Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi=\int_{B(0,r_0)}\widehat{\lambda}_1(\xi)(Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi+ \\ +2\widehat{\lambda}_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}(Ff)(\xi)\overline{(F\widetilde{f}_x)(\xi)}\,d\xi. \quad (3.5)$$

Действительно, нетрудно видеть, что его правая часть имеет смысл для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$\int_{|\xi|\le r_0}\widehat{\lambda}_1(\xi)(Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi+ \\ +2\widehat{\lambda}_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}(Ff)(\xi)\overline{(F\widetilde{f}_x)(\xi)}\,d\xi= \\ =\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\le r_0}\Big(|\xi|^{\beta}(1-2\widehat{\lambda}_2\delta|\xi|^{2\alpha-\beta})e^{i\langle\xi,x\rangle}+ \\ +2\widehat{\lambda}_2|\xi|^{2\alpha}\delta e^{i\langle\xi,x\rangle}\Big)(Ff)(\xi)\,d\xi+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|>r_0}|\xi|^{\beta}(Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi= \\ =\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\beta}(Ff)(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi$$

и соотношение (3.5) доказано.

Подставляя в (3.5) $x=0$ и $f(\cdot)=\widehat{f}(\cdot)$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\beta}(F\widehat{f})(\xi)\,d\xi=\delta\int_{|\xi|\le r_0}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+ \\ +2\widehat{\lambda}_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\alpha}|(F\widehat{f})(\xi)|^2\,d\xi=\delta\int_{|\xi|\ge r_0}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+2\widehat{\lambda}_2.$$

Отсюда следует, что значение задачи (3.2) не меньше величины справа в этом неравенстве, а тогда по доказанному выше

$$E_{\infty}((-\Delta)^{\beta/2},W^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),L_{\infty}(B(0,r)),\delta)\ge\delta\int_{|\xi|\le r_0}\widehat{\lambda}_1(\xi)\,d\xi+2\widehat{\lambda}_2. \quad (3.6)$$

Подставляя сюда выражения для $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2$, получаем требуемую оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

2. Докажем теперь оптимальность метода, указанного в теореме. Пусть $f(\cdot) \in W^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $g(\cdot) \in L_{\infty}(B(0,r_0))$ и $\|(Ff)(\cdot)-$

$g(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \delta$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$
\begin{gathered}
|(-\Delta)^{\beta/2} f(x) - \widehat{m}(g(\cdot))(x)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi - \right. \\
\left. - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \le r_0} |\xi|^\beta a(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \right| = \\
= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\lambda}_1(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \right| = \\
= \left| \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\beta (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi - \right. \\
\left. - \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\lambda}_1(\xi) (Ff)(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\lambda}_1(\xi) ((Ff)(\xi) - g(\xi)) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \right| = \\
= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\lambda}_1(\xi) ((Ff)(\xi) - g(\xi)) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi + \right. \\
\left. + \frac{2\widehat{\lambda}_2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} (Ff)(\xi) \overline{(F\widetilde{f}_x)(\xi)}\, d\xi \right| \le \delta \int_{|\xi| \le r_0} |\widehat{\lambda}_1(\xi)|\, d\xi + \\
+ 2\widehat{\lambda}_2 \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(Ff)(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \times \\
\times \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |(F\widetilde{f}_x)(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \le \delta \int_{|\xi| \le r_0} \widehat{\lambda}_1(\xi)\, d\xi + 2\widehat{\lambda}_2.
\end{gathered}
$$

Отсюда и из оценки снизу для погрешности оптимального восстановления следует указанное для нее выражение в формулировке теоремы и оптимальность метода $\widehat{m}$. $\square$

Следствие. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ и $\alpha - \beta > d/2$. Тогда для всех функций $f(\cdot) \in \mathcal{W}^\alpha_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство*

$$
\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \le K \|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d + 2\alpha}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2d + 2\beta}{d + 2\alpha}},
$$

где

$$
K = \frac{(d/2 + \alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d + \beta} \left(\frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{\frac{2\alpha - \beta}{d + 2\alpha}}.
$$

Доказательство. По доказанному значение задачи (3.1) при $r = \infty$ (т. е. когда $B(0, r) = \mathbb{R}^d$) равно

$$
\frac{(d/2 + \alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d + \beta} \left(\frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{\frac{2\alpha - \beta}{d + 2\alpha}} \delta^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d + 2\alpha}}.
$$

Пусть $f(\cdot) \in \mathcal{W}^{\alpha}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и $f(\cdot) \neq 0$. Тогда функция

$$\frac{f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$$

удовлетворяет ограничениям задачи (3.1) при

$$\delta = \frac{\|(Ff)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{(-\Delta)^{\beta/2} f(\cdot)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \frac{(d/2+\alpha)^{\frac{d+\beta}{d+2\alpha}}}{d+\beta} \left(\frac{2\alpha - \beta}{\gamma(d)(2\alpha - 2\beta - d)} \right)^{\frac{2\alpha-\beta}{d+2\alpha}} \delta^{\frac{2\alpha - 2\beta - d}{d+2\alpha}}.$$

Подставляя сюда выражение для δ, получаем нужное неравенство.

$\square$

Литература

[1] Колмогоров А. Н., “О наилучшем приближении функций заданного функционального класса”, *Ann. Math.*, **37**, 107–110 (В “А. Н. Колмогоров. Избранные труды, том 1. Математика и механика”, с. 209–212).

[2] Никольский С. М. Квадратурные формулы, М.: Наука, 1988.

[3] Смоляк С. А., *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[4] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю., “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **17**:3, (1975), 359–368.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Чан Тхи Ле., “К задаче оптимального восстановления функционалов”, *Успехи мат. наук*, **42**:2 (1987), 237–238.

[6] Арестов В. В., “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Мат. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[8] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[9] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.

[10] Woźniakowski H. “A survey of information-based complexity”, *J. Complexity*, **1** (1985), 11–44.

[11] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.

[12] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М., “О неравенствах для производных колмогоровского типа” *Матем. сб.*, **187**:12 (1997), 73–106.

[13] Melkman A. A., Micchelli C. A., “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[14] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[15] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и

неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[16] Осипенко К. Ю., “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

[17] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37—54.

[18] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Тр. МИАН*, **269** (2010), 181—192.

[19] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функц. анализ и его прилож*, **44**:3 (2010), 76—79.

[20] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Мат. заметки*, **92**:1 (2012), 59—67.

[21] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (4-е изд.)

[22] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[23] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2011 (3-е изд.)

[24] Сивкова Е. О. “Точное неравенство для дробных степеней оператора Лапласа”, *Вестник Тамбовского университета*, **14**:4 (2009), 796–798.

[25] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.* , **203**:4 (2012), 119–130.

[26] Сивкова Е. О. “Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье”, *Владикавказский мат. журнал*, **14**:4, (2012), 63–72.