ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА ХАРДИ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Выполнил студент
632 группы
Сугробов Петр Евгеньевич

____
подпись студента

Научный руководитель:
Проф. каф. ОПУ Осипенко К. Ю.

____
подпись научного руководителя

Москва

2018

Содержание

1. Введение

Во многих прикладных задачах часто возникает ситуация, когда необходимо восстановить функцию по некоторой информации (обычно неточной и неполной). Впервые общая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе функций по конечной информации появилась в работе С.А. Смоляка [1]. Существует много подходов при решении подобных задач. Здесь мы следуем подходу, в котором известна априорная информация об объекте, характеристики которого требуется восстановить. Таким образом, ставится общая задача о поиске наилучшего метода восстановления среди всех методов. Идеологически данный подход к задачам восстановления восходит к работам Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. В дальнейшем эта тематика получила большое развитие, примерами которого могут послужить задачи об оптимальном восстановлении функций и их производных по коэффициентам Фурье [2], задачи о восстановлении решения волнового уравнения по неточным начальным данным [3] и другие задачи, рассмотренные в статье Магарил-Ильяева Г.Г. и Осипенко К.Ю. [4]

В данной дипломной работе рассматривается задача оптимального восстановления k-ой производной на классе Харди-Соболева по информации о конечном наборе коэффициентов степенного ряда функции, заданных с погрешностью. При решении данной задачи возникают оптимальные методы, которые остаются оптимальными на более широком классе, являющемся суммой исходного класса и подпространства полиномов определенного порядка. В работе находится точное решение погрешности оптимального восстановления производной и семейство оптимальных методов.

2. Основная часть

2.1. **Постановка задачи.** Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами. Через $\mathcal{H}_2(D)$ обозначим пространство аналитических в $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих условию:

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}=\sup_{0<\rho<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |x(\rho e^{it})|^2dt\right)^{1/2}<\infty.$$

Через $H_2^n(D)$ обозначим множество функций $x(\cdot)$, аналитических в D, для которых $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}\le 1$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления k-ой $(0<k<$ $<n)$ производной на некотором классе аналитических в единичном круге функций W таких, что для любой функции из $x(\cdot)\in W$ ее k-ая производная лежит в $\mathcal{H}_2(D)$ пространстве. Восстановление

производится по информации о первых N коэффициентах степенного ряда самой функции, заданных с погрешностью δ в норме пространства l_2^{N+1}. Иными словами, мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot) \in W$ такой, что

$$x(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j z^j,$$

известны числа $\{y_j\}_{0 \le j \le N}$ такие, что

$$\sum_{j=0}^{N} |a_j - y_j|^2 \le \delta^2.$$

Погрешностью данного метода $\varphi \colon l_2^{N+1} \to \mathcal{H}_2(D)$ называется величина

$$e(x^{(k)}(\cdot), W, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W,\ y \in l_2^{N+1} \\ \|\Lambda x(\cdot) - y\|_{l_2^{N+1}} \le \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)},$$

где $\Lambda x(\cdot) = \{a_j\}_{0 \le j \le N}$ — коэффициенты степенного ряда $x(\cdot)$. Задача заключается в нахождении величины

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \inf_{\varphi \colon l_2^{N+1} \to \mathcal{H}_2(D)} e(x^{(k)}(\cdot), W, \delta, \varphi)$$

и соответствующего оптимального метода, т.е. метода, на котором эта нижняя грань достигается.

2.2. **Вспомогательные результаты.**

Лемма 1. *Пусть W - класс аналитических в единичном круге функций таких, что для любой функции из $x(\cdot) \in W$ ее k-ая производная лежит в $\mathcal{H}_2(D)$ пространстве. Тогда*

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2^N} \le \delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}. \tag{1}$$

Доказательство. Для любого метода φ при всех $x(\cdot) \in W$ таких, что $\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2^N} \le \delta$, имеем

$$\begin{aligned} 2||x^{(k)}(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)} \le ||x^{(k)}(\cdot) + \varphi(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} + ||x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} \\ \le 2e(x^{(k)}(\cdot), W, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(x^{(k)}(\cdot), W, \delta, m) \ge \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2^N} \le \delta}} ||x^{(k)}(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)},$$

откуда сразу вытекает требуемая оценка.

□

Экстремальную задачу в правой части (1) будем называть двойственной к задаче восстановления.

Пусть X — некоторое множество и на нем заданы функции $f_j\colon X \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \max, \quad f_j(x) \le 0, \quad x \in X. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть* $\widehat{x} \in X$ *- допустимый элемент в задаче (2) и* $\overline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\lambda_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$, *таковы, что*

1)
$$\min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}),$$

2)
$$\lambda_j f_j(\widehat{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где
$$\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x),$$

— называется функцией Лагранжа задачи (2)*. Тогда* $\widehat{x}$ *— решение* (2)*.*

Доказательство. Имеем
$$-f_0(x) = \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x).$$

Так как
$$\min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}), \quad \lambda_j f_j(x) \le 0, \quad \lambda_j f_j(\widehat{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$
получаем
$$\sup_{\substack{x \in X \\ f_j(x) \le 0,\, j=1,\ldots,n}} f_0(x) = -\inf_{\substack{x \in X \\ f_j(x) \le 0,\, j=1,\ldots,n}} (-f_0(x)) =$$
$$= -\inf_{\substack{x \in X \\ f_j(x) \le 0,\, j=1,\ldots,n}} \Big(\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x)\Big) = -\mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}) = f_0(\widehat{x}).$$

Следовательно $\widehat{x}$ — решение (2).

□

2.3. **Основные результаты.** Пусть

$$\mu_j = j^2...(j-k+1)^2, \quad \nu_j = j^2...(j-n+1)^2.$$

$$M = co\{\{(\nu_j,\mu_j)\}_j \in \mathbb{N}\} + \{(t,t\lambda) : t \geq 0\},$$

где

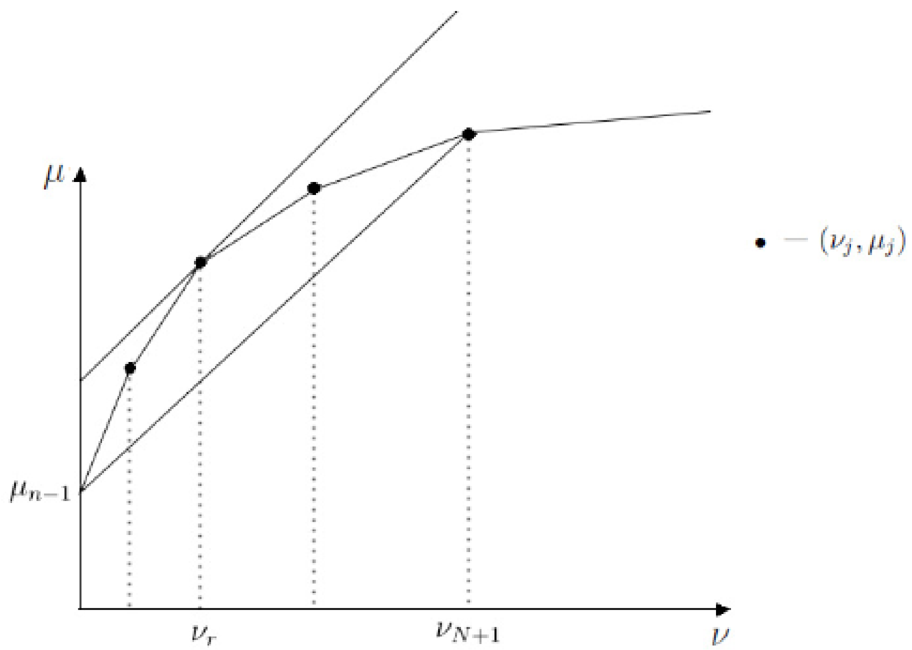
$$\lambda = \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}.$$

Пусть $n-1 \leq r \leq N$ таково, что

$$\mu_r - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_r = \max_{n-1\leq j\leq N}(\mu_j - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_j).$$

Положим

$$\theta(t) = max\{x : (t,x) \in M\}.$$



Теорема 1. *1)Пусть $N < n-1$.*

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \infty.$$

2)Пусть $N \geq n-1$
(i) при $r = n-1$

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \sqrt{\mu_{n-1}\delta^2 + \frac{\mu_{n-1}}{\nu_{n-1}}};$$

(ii) при $r > n-1$ для $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_s}} \leq \delta \leq \dfrac{1}{\sqrt{\nu_{s-1}}}, \quad n < s \leq r,$

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \sqrt{\mu_{s-1}\frac{\nu_s\delta^2 - 1}{\nu_s - \nu_{s-1}} + \mu_s\frac{1-\nu_{s-1}\delta^2}{\nu_s - \nu_{s-1}}}.$$

для $0 < \delta < \dfrac{1}{\sqrt{\nu_r}}$

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \sqrt{\mu_r - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\delta^2 + \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}},$$

для $\delta \geq \dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}}$

$$E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta) = \sqrt{\mu_{n-1}\delta^2 + \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\nu_n}}.$$

При $N \geq n-1$ *методы*

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \mu_j y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{N} \mu_j \alpha_j y_j z^{j-k}, \tag{3}$$

где α_j *такие, что*

$$\frac{|1-\alpha_j|^2 \mu_j}{\nu_j \lambda_2} + \frac{\mu_j |\alpha_j|^2}{\lambda_1} \leq 1, \tag{4}$$

являются оптимальными.

Теорема 2. *При* $N \geq n-1$ *методы*

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \mu_j y_j z^{j-k} + \sum_{j=n}^{N} \mu_j \alpha_j y_j z^{j-k},$$

где α_j *удовлетворяют условию (3), остаются оптимальными на классе* $W = \mathcal{H}_2(D) + \mathcal{P}_m$*, где* $m < n$.

2.4. **Восстановление на классе** $H_2^n(D)$.

Доказательство. Докажем Теорему 1. Так как $x(\cdot)$ - аналитическая в D, имеем

$$x(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \;\; x^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^{\infty} j...(j-k+1) a_j z^{j-k},$$

$$x^{(n)}(z) = \sum_{j=n}^{\infty} j...(j-n+1) a_j z^{j-n}.$$

Из определения нормы в $\mathcal{H}_2(D)$ вытекает, что

$$\|x(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2(D)} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2.$$

Тогда экстремальная задача в правой части неравенства (1) на классе $H_2^n(D)$ сводится к следующей

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{j=n}^{\infty} \nu_j |a_j|^2 \leq 1. \tag{5}$$

Докажем вспомогательный результат из которого будет следовать вогнутость графика, соединяющего точки (ν_j, μ_j)

Лемма 3. *При всех $j \geq n$ имеет место неравенство*

$$\frac{\mu_{j+1}-\mu_j}{\nu_{j+1}-\nu_j} < \frac{\mu_j-\mu_{j-1}}{\nu_j-\nu_{j-1}}.$$

Доказательство. Распишем отдельно левую и правую часть неравенства.

$$\frac{\mu_{j+1}-\mu_j}{\nu_{j+1}-\nu_j} = \frac{(j+1)^2...(j-k+2)^2 - j^2...(j-k+1)^2}{(j+1)^2...(j-n+2)^2 - j^2...(j-n+1)^2} = \\ = \frac{j^2...(j-k+2)^2 k(2j-k+2)}{j^2...(j-n+2)^2 n(2j-n+2)},$$

$$\frac{\mu_j-\mu_{j-1}}{\nu_j-\nu_{j-1}} = \frac{j^2...(j-k+1)^2 - (j-1)^2...(j-k)^2}{j^2...(j-n+1)^2 - (j-1)^2...(j-n)^2} = \\ = \frac{(j-1)^2...(j-k+1)^2 k(2j-k)}{(j-1)^2...(j-n+1)^2 n(2j-n)}.$$

Подставим полученные значения в изначальное неравенство

$$\frac{j^2...(j-k+2)^2 k(2j-k+2)}{j^2...(j-n+2)^2 n(2j-n+2)} < \frac{(j-1)^2...(j-k+1)^2 k(2j-k)}{(j-1)^2...(j-n+1)^2 n(2j-n)}.$$

Сократив множители, получаем эквивалентное изначальному неравенство

$$\frac{2j-k+2}{2j-n+2} < \frac{(j-k+1)^2(2j-k)}{(j-n+1)^2(2j-n)}.$$

Оно верно, так как $\dfrac{2j-k+2}{2j-n+2} < \dfrac{2j-k}{2j-n}$, а $\dfrac{(j-k+1)^2}{(j-n+1)^2} > 1$. □

Выпишем функцию Лагранжа для задачи (5)

$$\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^{N} |a_j|^2(-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j) + \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j|^2(-\mu_j + \lambda_2\nu_j).$$

По **Лемме 2**, если $\lambda_1, \lambda_2, \widehat{a_j}$ такие, что

$$1) \min_{a_j} \mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$2) \lambda_1(\sum_{j=0}^{N} |a_j|^2 - \delta^2) = 0,$$

$$3) \lambda_2(\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j |a_j|^2 - 1) = 0,$$

то $\widehat{a_j}$ является решением экстремальной задачи.

1) Пусть $N < n-1$. Положим

$$a_j = 0, j \neq N+1, \ a_{N+1} = c, \quad c \geq 0$$

Эта последовательность является допустимой $\forall c \geq 0$. Тогда получаем, что решение экстремальной задачи $\geq \mu_{N+1}c^2$. Устремляя c к бесконечности, получим, что погрешность оптимального восстановления $E(x^{(k)}(\cdot), W, \delta)$ равна бесконечности.

2) Пусть $N \geq n-1$.

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^{n-1}(-\mu_j + \lambda_1)|a_j|^2 + \sum_{j=n}^{N}(-\mu_j + \lambda_1 + \lambda_2\nu_j)|a_j|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j + \lambda_2\nu_j)|a_j|^2.$$

(i) Пусть $r = n-1$. В этом случае положим

$$(6) \quad \lambda_1 = \mu_{n-1}, \ \lambda_2 = \lambda, \ \widehat{a}_j = 0, j \neq n-1, N+1, \quad \widehat{a}_{n-1} = \delta, \ \widehat{a}_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu_{N+1}}}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=0}^{n-1}(-\mu_j + \mu_{n-1})|a_j|^2 + \sum_{j=n}^{N}(-\mu_j + \mu_{n-1} + \lambda\nu_j)|a_j|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j + \lambda\nu_j)|a_j|^2 \geq 0,$$

так как

$$\begin{cases} -\mu_j + \mu_{n-1} \geq 0, \quad j = 0, ..., n-1, \\ -\mu_j + \mu_{n-1} + \lambda\nu_j \geq 0, \quad j = n, ..., N, \\ -\mu_j + \lambda\nu_j = -\mu_j + \dfrac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_j = \nu_j\left(-\dfrac{\mu_j}{\nu_j} + \dfrac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\right) \geq 0, j \geq N+1. \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что μ_j монотонно возрастает, а третье из того что тангенс угла наклона $\dfrac{\mu_j}{\nu_j}$ монотонно убывает, так как график является вогнутым. Во втором неравенстве

$$\mu_{n-1} = \mu_{n-1} - \lambda\nu_{n-1} \geq \mu_j - \lambda\nu_j \Rightarrow -\mu_j + \mu_{n-1} + \lambda\nu_j \geq 0, \ n-1 \leq j \leq N.$$

Поскольку $\mathcal{L}(\{\widehat{a}_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ условие 1 **Леммы 2** выполнено. Так же легко проверяется что последовательность $\{\widehat{a}_j\}$ допустимая и выполнены условия 2,3 **Леммы 3**.

(ii) $r > n-1$.

1) Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_s}} \le \delta \le \frac{1}{\sqrt{\nu_{s-1}}}, \tag{7}$$

где $n < s \le r$. Положим $\widehat{a}_j = 0$ при $j \ne s, s-1$, а $\widehat{a}_s$ и $\widehat{a}_{s-1}$ выберем из условия

$$\begin{cases} |\widehat{a}_{s-1}|^2 + |\widehat{a}_s|^2 = \delta^2 \\ \nu_{s-1}|\widehat{a}_{s-1}|^2 + \nu_k|\widehat{a}_s|^2 = 1 \end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_{s-1}|^2 = \frac{\nu_s\delta^2 - 1}{\nu_s - \nu_{s-1}}, |\widehat{a}_s|^2 = \frac{1 - \nu_{s-1}\delta^2}{\nu_s - \nu_{s-1}}.$$

Проведем прямую через точки, отвечающие параметрам $s-1$ и s. Получили прямую $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$.
Очевидно, что при таких λ_1 и λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \ge 0$, так как график является вогнутым. Найдем λ_1, λ_2. Так как прямая проходит через точки, отвечающие параметрам $s-1$ и s, получим систему

$$\begin{cases} \lambda_2\nu_s + \lambda_1 = \mu_s, \\ \lambda_2\nu_{s-1} + \lambda_1 = \mu_{s-1}. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим уравнение на λ_2

$$\lambda_2\nu_s - \lambda_2\nu_{s-1} = \mu_s - \mu_{s-1}.$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_s - \mu_{s-1}}{\nu_s - \nu_{s-1}}.$$

Подставив λ_2 в изначальное уравнение, найдем λ_1

$$\lambda_1 = \frac{\nu_s\mu_{s-1} - \mu_s\nu_{s-1}}{\nu_s - \nu_{s-1}}.$$

В итоге получили, что

$$\lambda_1 = \frac{\nu_s\mu_{s-1} - \mu_s\nu_{s-1}}{\nu_s - \nu_{s-1}},$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_s - \mu_{s-1}}{\nu_s - \nu_{s-1}}.$$

Осталось подставить $\widehat{a}_{s-1}$ и $\widehat{a}_s$ в $\sum\limits_{j=s}^{\infty} \mu_j |a_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу.

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j|^2 = \mu_{s-1}\frac{\nu_s\delta^2 - 1}{\nu_s - \nu_{s-1}} + \mu_s\frac{1 - \nu_{s-1}\delta^2}{\nu_s - \nu_{s-1}} = \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

2) Пусть

$$0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{\nu_r}}, \tag{8}$$

Положим

$$\lambda_1 = \mu_r - \lambda\nu_r, \lambda_2 = \lambda, |\widehat{a}_r|^2 = \delta^2, |\widehat{a}_{N+1}|^2 = \frac{1-\delta^2\nu_r}{\nu_{N+1}},$$
$$\widehat{a}_j = 0, \quad j \neq r, N+1.$$

Легко убедиться в допустимости последовательности $\{\widehat{a}_j\}$ и выполнении условий 2, 3 **Леммы 2**. Поскольку $\mathcal{L}(\{\widehat{a}_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = 0$, то нам остается доказать, что $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ при всех a_j. Функция Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(-\mu_j + \mu_r - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_r) +$$
$$\sum_{j=n}^{N}((\mu_r - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_r) - (\mu_j - \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_j))|a_j|^2 +$$
$$\sum_{j=N+1}^{\infty}(-\mu_j + \frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}\nu_j)|a_j|^2.$$

Вторая сумма неотрицательна из определения r, а третья из монотонного убывания тангенса угла наклона. Для первой суммы

$$\mu_r - \lambda\nu_r \geq \mu_j - \lambda\nu_j \ \forall j : n-1 \leq j \leq N.$$

Тогда для $j = n-1$ получим

$$\mu_r - \lambda\nu_r \geq \mu_{n-1} \geq \mu_j, \ \ j < n-1,$$

так как μ_j монотонно возрастает. В итоге получили

$$-\mu_j + \mu_r - \lambda\nu_r \geq 0, \ \ j < n-1,$$

что и требовалось доказать.

3) Пусть

$$\delta \geq \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}. \tag{9}$$

Положим $\widehat{a}_j = 0$ при $j \neq n, n-1$, а $\widehat{a}_n$ и $\widehat{a}_{n-1}$ выберем из условия

$$\begin{cases} |\widehat{a}_{n-1}|^2 + |\widehat{a}_n|^2 = \delta^2, \\ \nu_n|\widehat{a}_n|^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{a}_{n-1}|^2 = \delta^2 - \frac{1}{\nu_n}, \quad |\widehat{a}_n|^2 = \frac{1}{\nu_n}.$$

Проведем прямую через точки, отвечающие параметрам $n-1$ и n. Получили прямую $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$. Очевидно, что при таких λ_1 и λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\}, \lambda_1, \lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\}, \lambda_1, \lambda_2) \geq 0$, так как график является вогнутым.

Найдем λ_1, λ_2. Так как прямая проходит через точки, отвечающие параметрам $n-1$ и n, получим систему

$$\begin{cases} \lambda_2\nu_n + \lambda_1 = \mu_n, \\ \lambda_2\nu_{n-1} + \lambda_1 = \mu_{n-1}. \end{cases}$$

Так как $\nu_{n-1} = 0$ получаем

$$\lambda_1 = \mu_{n-1}, \ \ \lambda_2 = \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\nu_n}.$$

Осталось подставить $\widehat{a}_{n-1}$ и $\widehat{a}_n$ в $\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу.

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j|^2 = \mu_{n-1}\delta^2 - \mu_{n-1}\frac{1}{\nu_n} + \mu_n \frac{1}{\nu_n} = \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

Теперь займемся построением оптимального метода. Будем искать его в виде

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \sum_{j=k}^{N} \mu_j \alpha_j y_j z^{j-k},$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). Тогда, чтобы найти погрешность данного метода, необходимо решить экстремальную задачу

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j - \alpha_j y_j|^2 \to \max, \ \ \sum_{j=n}^{\infty} \nu_j |a_j|^2 \le 1, \ \ \sum_{j=0}^{N} |a_j - y_j|^2 \le \delta^2,$$

где $\alpha_j = 0$ при $j > N$. Положив $z_j = a_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виде

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j |a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \to \max,$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} \nu_j |a_j|^2 \le 1, \quad \sum_{j=0}^{N} |z_j|^2 \le \delta^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского при $j \ge n$ имеем

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \le \left(\frac{|1-\alpha_j|^2\mu_j}{\nu_j\lambda_2} + \frac{\mu_j|\alpha_j|^2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2\nu_j|a_j|^2}{\mu_j} + \frac{\lambda_1|z_j|^2}{\mu_j}\right).$$

Выберем α_j так, чтобы

$$\frac{|1-\alpha_j|^2\mu_j}{\nu_j\lambda_2} + \frac{\mu_j|\alpha_j|^2}{\lambda_1} \le 1. \tag{10}$$

Докажем, что такие α_j существуют. Для этого выделим в этом неравенстве полный квадрат. Пусть

$$A = \frac{\mu_j}{\lambda_1}, \ \ B = \frac{\mu_j}{\nu_j \lambda_2}.$$

Тогда неравенство выглядит так

$$A|\alpha_j|^2 + B|1 - \alpha_j|^2 \leq 1.$$

Выделяя в нем полный квадрат можно прийти к виду

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \leq \frac{A+B-AB}{(A+B)^2}.$$

Или после подстановки

$$\left|\alpha_j - \frac{B}{A+B}\right|^2 \leq \frac{\mu_j(-\mu_j + \nu_j\lambda_2 + \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2\nu_j}.$$

Тогда для существования необходимых α_j достаточно будет доказать, что

$$\frac{\mu_j(-\mu_j + \nu_j\lambda_2 + \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2\nu_j} \geq 0 \ \ \forall j \geq n.$$

Но знаменатель > 0, а числитель ≥ 0 в случаях (7), (9) потому что график соединяющий точки (ν_j, μ_j) вогнут, а все его точки лежат ниже прямой $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$, а в случаях (6), (8) из определения r.
Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского при $j \geq n$

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \leq \left(\frac{\lambda_2\nu_j|a_j|^2}{\mu_j} + \frac{\lambda_1|z_j|^2}{\mu_j}\right).$$

Поэтому

$$\mu_j|a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \leq \lambda_2\nu_j|a_j|^2 + \lambda_1|z_j|^2.$$

При $j \leq n-1$ возьмем $\alpha_j = 1$. Получим неравенство

$$\mu_j|z_j|^2 \leq \lambda_1|z_j|^2,$$

которое необходимо доказать.
В случаях (5), (7) $\mu_j \leq \lambda_1$ из выпуклости графика. В случае (4) $\mu_j \leq \lambda_1 = \mu_{n-1}$ из монотонного возрастания μ_j. В случае (6)

$$\mu_r - \lambda\nu_r \geq \mu_j - \lambda\nu_j \ \forall j : n-1 \leq j \leq N$$

Тогда для $j = n-1$ получим

$$\lambda_1 = \mu_r - \lambda\nu_r \geq \mu_{n-1},$$

но так как μ_j монотонно возрастает получаем

$$\lambda_1 \geq \mu_{n-1} \geq \mu_j, \quad j \leq n-1.$$

Вспоминая нашу экстремальную задачу, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \le \left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_2\nu_j|a_j|^2+\lambda_1|z_j|^2\right) \le \lambda_1\delta^2+\lambda_2.$$

Или

$$e(x^{(k)}(\cdot),W,\delta,\widehat{\varphi}) \le \sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}.$$

Учитывая оценку сверху

$$E(x^{(k)}(\cdot),W,\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y)(t)=\sum_{j=k}^{n-1}\mu_j y_j z^{j-k}+\sum_{j=n}^{N}\mu_j\alpha_j y_j z^{j-k}$$

является оптимальным. □

2.5. **Восстановление на классе $H_2^n(D)+\mathcal{P}_{n-1}$.** Доказательство Теоремы 2.

Пусть $x=x_1+x_2, x_1\in\mathcal{H}_2^n, x_2\in\mathcal{P}_{n-1}$. Тогда

$$x_1=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^j,\quad x_2=\sum_{j=0}^{n-1}b_j z^j.$$

Положим $b_j=0$ при $j\ge n$. Предположим, что числа $y_j, j\in\mathbb{Z}_+$ таковы, что

$$\sum_{j=0}^{N}|y_j-(a_j+b_j)|^2\le\delta^2$$

или

$$\sum_{j=0}^{N}|a_j-(y_j-b_j)|^2\le\delta^2.$$

Тогда по Теореме 1 мы знаем оценку снизу для погрешности методов (3), а именно

$$|x_1^{(k)}(z)-\sum_{j=k}^{n-1}\mu_j(y_j-b_j)z^{j-k}+\sum_{j=n}^{N}\mu_j\alpha_j y_j z^{j-k}|\le\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}.$$

Равносильными преобразованиями получаем

$$|x_1^{(k)}(z)+x_2^{(k)}(z)-\sum_{j=k}^{n-1}\mu_j y_j z^{j-k}+\sum_{j=n}^{N}\mu_j\alpha_j y_j z^{j-k}|\le\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2},$$

$$|x^{(k)}(z)-\sum_{j=k}^{n-1}\mu_j y_j z^{j-k}+\sum_{j=n}^{N}\mu_j\alpha_j y_j z^{j-k}|\le\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}.$$

Тогда

$$e(x^{(k)}(\cdot),\mathcal{H}_2(D)+\mathcal{P}_{n-1},\delta,\widehat{\varphi})\le\sqrt{\lambda_1\delta^2+\lambda_2}.$$

Следовательно

$$E(x^{(k)}(\cdot), \mathcal{H}_2(D) + \mathcal{P}_{n-1}, \delta) \leq \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Таким образом мы получили оценку сверху для погрешности того же самого метода. Осталось получить оценку снизу. Из Леммы 1 имеем

$$E(x^{(k)}(\cdot), \mathcal{H}_2(D) + \mathcal{P}_{n-1}, \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{H}_2(D)+\mathcal{P}_{n-1} \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2^N}\leq\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}$$

$$\geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{H}_2(D) \\ \|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2^N}\leq\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Учитывая оценку снизу, получаем

$$E(x^{(k)}(\cdot), \mathcal{H}_2(D) + \mathcal{P}_{n-1}, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

3. Заключение

В дипломной работе была рассмотрена задача об оптимальном восстановлении k-ой производной функции по неточно заданным коэффициентам ее степенного ряда.

Был предоставлен оптимальный метод восстановления и соответствующая оптимальная погрешность. Показан важный результат - данный метод восстановления остается оптимальным и на более широком классе, являющемся суммой исходного класса и пространства полиномов определенного порядка.

Список литературы

[1] Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них — 1965

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой, Мат. сб., — 2002, 193, 79-100.

[3] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным, Матем. заметки—2007, 81, вып. 6, 803-815.

[4] К. Ю. Осипенко, Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках, Матем. сб.,—2014, 205, 10, 77-106.