ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ПРЯМОЙ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматриваются задачи оптимального восстановления значения производных функций по информации о преобразовании Фурье этих функций, заданном приближенно на конечном интервале или всей прямой. Изучается также тесно связанная с этой проблематикой задача С. Б. Стечкина о приближении производных ограниченными линейными функционалами. Получены соответствующие этим постановкам точные неравенства для производных колмогоровского типа.

1. Постановка задач

Начнем с формулировки конкретных задач, которые изучаются в данной работе, а затем приведем общую постановку задачи оптимального восстановления функционалов, объединяющую эти задачи. Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F\colon S'\to S'$ — преобразование Фурье, $n\in\mathbb{N}$ и $1\le p\le\infty$. Положим

$$X_p^n=\{\,x\in S'\mid Fx(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}),\ x^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\,\}$$

и

$$C_p^n=\{\,x(\cdot)\in X_p^n\mid \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1\,\}.$$

Задача об оптимальном восстановлении значения $x^{(k)}(\tau)$, где $0\le k<n$, $\tau\in\mathbb{R}$, на классе C_p^n по информации о преобразовании Фурье $Fx(\cdot)$, заданном на интервале $\Delta_\sigma=(-\sigma,\sigma)$, $0<\sigma\le\infty$, с погрешностью $\delta>0$ в метрике пространства $L_p(\Delta_\sigma)$, заключается в нахождении величины

$$E_p(n,k,\sigma,\delta)=\inf_{\varphi}\sup_{\substack{x(\cdot)\in C_p^n,\ y(\cdot)\in L_p(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)}\le\delta}}|x^{(k)}(\tau)-\varphi(y(\cdot))| \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02-01-00386), программ государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-304.2003.1) и “Университеты России” (УР.04.03.067), а также при поддержке U.S.CRDF–R.F.Ministry of Education Award VZ-0100-0.

(где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi\colon L_p(\Delta_\sigma)\to\mathbb{C}$), называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и функции $\widehat{\varphi}$, на которой достигается нижняя грань в (1), называемой *оптимальным методом восстановления.*

В данной работе изучается также задача о наилучшем приближении $x^{(k)}(\tau)$, $0\le k<n$, $\tau\in\mathbb{R}$, на классе C_p^n по информации о преобразовании Фурье $Fx(\cdot)$, заданном на интервале $\Delta_\sigma=(-\sigma,\sigma)$, линейными непрерывными функционалами на $L_p(\Delta_\sigma)$, норма которых не превосходит некоторого фиксированного положительного числа N. Она состоит в нахождении величины

$$e_p(n,k,\sigma,N)=\inf_{y^*}\sup_{x(\cdot)\in C_p^n}|x^{(k)}(\tau)-\langle y^*,Fx(\cdot)\rangle| \tag{2}$$

(где нижняя грань берется по всем линейным функционалам y^* на $L_p(\Delta_\sigma)$ таким, что $\|y^*\|\le N$), а также функционала $\widehat{y}^*$, на котором достигается нижняя грань в (2), называемым *экстремальным.*

Если в (2) вместо $Fx(\cdot)$ поставить $x(\cdot)$, то мы получаем классическую задачу С. Б. Стечкина, так что (2) есть некоторое ее обобщение, которое мы также называем задачей Стечкина.

Приведем теперь общую постановку задачи об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов по некоторой информации о самих элементах. Пусть X — вещественное или комплексное векторное пространство и C — непустое подмножество (класс элементов) в X. Про каждый элемент $x\in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I — отображение (называемое *информационным*) из C в другое вещественное или комплексное векторное пространство Y. В случае, когда информация задана неточно, I — многозначное отображение. Пусть, далее, задан линейный функционал x' на X и семейство Φ функций $\varphi\colon Y\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Задача об оптимальном восстановлении функционала x' на классе C по информации I с помощью функций (*методов восстановления*) из Φ заключается в нахождении величины

$$E(x',C,I)=\inf_{\varphi\in\Phi}\sup_{\substack{x\in C,\\ y\in I(x)}}|\langle x',x\rangle-\varphi(y)|, \tag{3}$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления* (функционала x' на C по информации I), и метода, на котором достигается нижняя грань в (3), называемого *оптимальным методом восстановления.*

Задачи (1) и (2) укладывается в общую схему. В первом случае $X=X_p^n$, $C=C_p^n$, $Y=L_p(\Delta_\sigma)$, $I\colon X_p^n\to L_p(\Delta_\sigma)$, $Ix(\cdot)=Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma}+\delta BL_p(\Delta_\sigma)$ ($BL_p(\Delta_\sigma)$ — единичный шар в $L_p(\Delta_\sigma)$), $\langle x',x(\cdot)\rangle=x^{(k)}(\tau)$ и Φ — совокупность всех функций на $L_p(\Delta_\sigma)$.

Для второй задачи $X = X_p^n$, $C = C_p^n$, $Y = L_p(\Delta_\sigma)$, $I\colon X_p^n \to L_p(\Delta_\sigma)$, $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma}$, $\langle x', x(\cdot)\rangle = x^{(k)}(\tau)$ и $\Phi = NBY^*$, где BY^* — единичный шар в сопряженном пространстве к Y.

Задача оптимального восстановления линейного функционала на классе элементов для случая, когда I — линейное отображение, $\dim Y < \infty$ и Φ — множество всех функций из Y в $\mathbb{R}$, была поставлена С. А. Смоляком [1]. Им было доказано, что если в этой ситуации C — выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Далее эта задача обобщалась и развивалась в различных направлениях (см. [2]–[7]).

Задачи оптимального восстановления функций и их производных в метрике L_2 (т.е. задача оптимального восстановления оператора, а не функционала) по неточно заданным коэффициентам Фурье (для периодических функций) и по неточно заданному преобразованию Фурье (для функций на прямой) изучались в работах [8], [9]. Круг проблем, связанных с задачей Стечкина, освещен в обзорной статье [10].

Аналог задачи (1) в периодическом случае при $p = \infty$ рассматривался в работе [11].

2. Формулировки основных результатов

В силу инвариантности рассматриваемых классов относительно сдвига всюду в дальнейшем считаем, что $\tau = 0$. Начнем со случая, когда $p = \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $\delta > 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < n$, $0 < \sigma \le \infty$,

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$$

и $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$. *Тогда*

$$E_\infty(n,k,\sigma,\delta) = \frac{\sigma_0^{k+1}}{\pi}\left(\frac{\delta}{k+1} + \sqrt{\frac{1}{2n-2k-1}\left(\frac{\pi}{\sigma_0^{2n+1}} - \frac{\delta^2}{2n+1}\right)}\right),$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_0} (it)^k \left(1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}\right) y(t)\,dt, \tag{4}$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma_0^{-2n+k}}{\sqrt{2n-2k-1}}\left(\frac{\pi}{\sigma_0^{2n+1}} - \frac{\delta^2}{2n+1}\right)^{-1/2}, \tag{5}$$

является оптимальным.

Из теоремы 1 вытекает, что при $\sigma \ge \widehat{\sigma}$

$$E_\infty(n,k,\sigma,\delta) = K\delta^{\frac{2n-2k-1}{2n+1}}, \tag{6}$$

где

$$K=\frac{(n+1/2)^{\frac{k+1}{2n+1}}}{k+1}\left(\frac{2n-k}{\pi(2n-2k-1)}\right)^{\frac{2n-k}{2n+1}}. \tag{7}$$

Тем самым в рассматриваемой задаче имеет место эффект "насыщения" погрешности оптимального восстановления, заключающийся в том, что при фиксированном $\delta>0$, знание преобразования Фурье функции из C_∞^n, заданного с погрешностью δ в равномерной метрике, на интервалах, больших, чем $\Delta_{\widehat{\sigma}}$, не ведет к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Таким образом, нарушение соотношения

$$\delta^2\sigma^{2n+1}\le\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2(2n-k)} \tag{8}$$

приводит к тому, что получаемая информация о преобразовании Фурье оказывается избыточной. Этот факт нам представляется важным для приложений, когда нужно считаться с тем, что получение дополнительной информации требует определенных затрат.

Из равенства (6) в силу инвариантности пространства X_∞^n относительно сдвига вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Пусть $k,n\in\mathbb{Z}$ и $0\le k<n$. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le K\|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n+1}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+2}{2n+1}}.$$

где константа K определена равенством (7).

Перейдем теперь к задаче (1) для $p=1$. Если $k>0$ и $\sigma<\infty$, положим

$$\Phi(\varepsilon)=\frac{4\pi}{\sigma^{2n-1}}\frac{\varepsilon^{2(2n-k-1)}\left(\displaystyle\int_1^\varepsilon(x^k-1)x^{-2n}\,dx\right)^2}{\varepsilon^{2n-2k-1}\displaystyle\int_1^\varepsilon(x^k-1)^2x^{-2n}\,dx+(2n-2k-1)^{-1}}$$

(здесь и далее для краткости записи не приводятся выражения для интегралов, которые могут быть явно вычислены). Очевидно, что функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна на $(1,+\infty)$. Нетрудно убедиться, что $\Phi(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to1$ и $\Phi(\varepsilon)\to+\infty$ при $\varepsilon\to+\infty$. Тем самым для любого $\delta>0$ уравнение

$$\Phi(\varepsilon)=\delta^2 \tag{9}$$

имеет решение, принадлежащее интервалу $(1,+\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $\delta > 0$, $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, $0 < \sigma \le \infty$. *Положим*

$$a = \begin{cases} \sigma/\varepsilon_\delta, & 0 < \sigma < \infty, \\ \left(\dfrac{2\pi(2n-2k-1)}{\delta^2(2n-1)(2n-k-1)}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, & \sigma = \infty, \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{2}{\delta}\left(\dfrac{\varepsilon_\delta}{\sigma}\right)^{2n-k-1} \displaystyle\int_1^{\varepsilon_\delta} (x^k - 1)x^{-2n}\,dx, & 0 < \sigma < \infty, \\ \dfrac{k\delta^{\frac{2n-2k-1}{2n-1}}}{\pi(2n-2k-1)}\left(\dfrac{2\pi(2n-2k-1)}{(2n-1)(2n-k-1)}\right)^{\frac{k}{2n-1}}, & \sigma = \infty, \end{cases}$$

где ε_δ *— решение уравнения* (9). *Тогда*

$$E_1(n, k, \sigma, \delta) = \lambda + \frac{\delta}{2\pi}a^k,$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} \mu_\delta(t)y(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$\mu_\delta(t) = \begin{cases} (it)^k, & |t| \le a, \\ (ia)^k \operatorname{sign} t^k, & a < |t| < \sigma, \end{cases} \tag{11}$$

является оптимальным. При $k = 0$

$$E_1(n, 0, \sigma, \delta) = \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}$$

и метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} y(t)\,dt \tag{12}$$

— оптимальный.

Из теоремы 2 при $\sigma = \infty$ вытекает

Следствие 2. *Пусть* $k, n \in \mathbb{Z}$ *и* $0 \le k < n$. *Тогда имеет место точное неравенство*

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le K_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n-1}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k}{2n-1}},$$

где

$$K_1 = \frac{1}{(2n-k-1)^{\frac{k}{2n-1}}}\left(\frac{2n-1}{2\pi(2n-2k-1)}\right)^{\frac{2n-k-1}{2n-1}}.$$

Перейдем к случаю $p=2$. Если $\sigma<\infty$, то положим

$$\Psi(h)=\frac{2\pi\sigma^{2n-2k-1}h^{4n-2k-1}\displaystyle\int_0^{\sigma h}x^{2k}(1+x^{2n})^{-2}\,dx}{(\sigma h)^{2n-2k-1}\displaystyle\int_0^{\sigma h}x^{2(n+k)}(1+x^{2n})^{-2}\,dx+(2n-2k-1)^{-1}}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $\Psi(\cdot)$ непрерывна на $(0,+\infty)$, $\Psi(h)\to 0$ при $h\to 0$ и $\Phi(h)\to+\infty$ при $h\to+\infty$. Тем самым для любого $\delta>0$ уравнение

$$\Psi(h)=\delta^2 \tag{13}$$

имеет решение, принадлежащее интервалу $(0,+\infty)$.

Теорема 3. *Пусть $\delta>0$, $k,n\in\mathbb{Z}$, $0\le k<n$, $0<\sigma\le\infty$. Если $0<\sigma<\infty$, то через h_δ обозначим решение уравнения* (13)*, а если $\sigma=\infty$, то положим*

$$h_\delta=\left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2\pi(2n-2k-1)}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Тогда

$$E_2(n,k,\sigma,\delta)=\frac{\delta^2+2\pi h_\delta^{2n}}{2\pi\delta h_\delta^{k+1/2}}\left(2\int_0^{\sigma h_\delta}x^{2k}(1+x^{2n})^{-2}\,dx\right)^{1/2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot))=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma}\frac{(it)^k}{1+(h_\delta t)^{2n}}y(t)\,dt,$$

является оптимальным.

При $\sigma=\infty$ получаем

$$E_2(n,k,\infty,\delta)=K_2\delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}},$$

где

$$K_2=\left((2k+1)\sin\pi\frac{2k+1}{2n}\right)^{-1/2}\left(\frac{2k+1}{2\pi(2n-2k-1)}\right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}.$$

Отсюда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le K_2\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}}.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\sqrt{2\pi}\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

оно может быть записано в виде

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le(2\pi)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}K_2\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}}.$$

Это неравенство было доказано Л. В. Тайковым [12].

Перейдем теперь к задаче Стечкина о приближении k-ой производной функции из класса C_p^n по информации о ее преобразовании

Фурье на интервале Δ_σ с помощью линейных функционалов, норма которых не превосходит фиксированного положительного числа N.

Теорема 4. *Пусть* $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < n$, $0 < \sigma \le \infty$, $N > 0$,

$$\widehat{\sigma}_N = \left(\frac{\pi N(k+1)(2n+1)}{2n-k}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

и $\sigma_N = \min(\sigma, \widehat{\sigma}_N)$. *Тогда*

$$e_\infty(n,k,\sigma,N) = \frac{\sigma_N^{-n+k+1/2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2n-2k-1} + \frac{\gamma^2(\sigma,N)}{2n+1}}, \tag{14}$$

где

$$\gamma(\sigma,N) = \max\left\{0, (2n+1)\left(\frac{1}{k+1} - \frac{\pi N}{\sigma_N^{k+1}}\right)\right\},$$

и функционал

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_N} (it)^k \left(1 - \gamma(\sigma,N)\left(\frac{|t|}{\sigma_N}\right)^{2n-k}\right) Fx(t)\,dt \tag{15}$$

является экстремальным.

Из теоремы 4 вытекает, что при фиксированном N для $\sigma \ge \widehat{\sigma}_N$

$$e_\infty(n,k,\sigma,N) = \sqrt{\frac{2k+2}{2n-2k-1}}\left(\frac{2n-k}{\pi(k+1)(2n+1)}\right)^{\frac{2n-k}{2k+2}} N^{-\frac{2n-2k-1}{2k+2}}.$$

Это означает, что аналогично задаче восстановления в рассматриваемой задаче Стечкина также наблюдается эффект “насыщения”, заключающийся в том, что при фиксированном N знание преобразования Фурье на интервалах, больших, чем $(-\widehat{\sigma}_N, \widehat{\sigma}_N)$, не ведет к уменьшению погрешности $e_\infty(n,k,\sigma,N)$. Аналогом соотношения (8) здесь является неравенство

$$\frac{\sigma^{k+1}}{N} \le \frac{\pi(k+1)(2n+1)}{2n-k},$$

нарушение которого ведет к избыточности получаемой информации о преобразовании Фурье.

Теорема 5. *Пусть* $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ *и* $N > 0$. *Тогда при* $\sigma < \infty$

$$e_1(n,k,\sigma,N) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^{n-k-1/2}} \times \sqrt{\frac{2k^2\varepsilon^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)(2n-k-1)(2n-1)} + \frac{2\varepsilon^{-k}}{2n-k-1} - \frac{\varepsilon^{-2k}}{2n-1}},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(2\pi N_0)^{1/k}}, \quad N_0 = \min\left\{N, \frac{\sigma^k}{2\pi}\right\},$$

и функционал

$$(16)\quad \langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<(2\pi N_0)^{1/k}} (it)^k Fx(t)\,dt \\ + N_0 i^k \int_{(2\pi N_0)^{1/k}\le|t|<\sigma} \operatorname{sign} t^k Fx(t)\,dt$$

является экстремальным. При $\sigma=\infty$

$$e_1(n,k,\infty,N) = \frac{\sqrt{2}k(2\pi N)^{-\frac{2n-2k-1}{2k}}}{\sqrt{\pi(2n-1)(2n-k-1)(2n-2k-1)}},$$

а функционал

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<(2\pi N)^{1/k}} (it)^k Fx(t)\,dt \\ + N\int_{|t|\ge(2\pi N)^{1/k}} i^k \operatorname{sign} t^k Fx(t)\,dt$$

— экстремальный. Если $k=0$, *то*

$$e_1(n,0,\sigma,N) = \begin{cases} \infty, & 0<N<\dfrac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}, & N\ge\dfrac{1}{2\pi},\ \sigma<\infty, \\ 0 & N\ge\dfrac{1}{2\pi},\ \sigma=\infty, \end{cases}$$

при этом функционал

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} Fx(t)\,dt$$

является экстремальным.

Рассмотрим теперь задачу Стечкина для случая, когда $p=2$. Положим

$$\Omega(h) = \frac{1}{2\pi^2 h^{2k+1}}\int_0^{\sigma h} x^{2k}(1+x^{2n})^{-2}\,dx.$$

Функция $\Omega(h)$ непрерывна при $h\in(0,+\infty)$. При этом

$$\lim_{h\to 0}\Omega(h) = \frac{\sigma^{2k+1}}{2\pi^2(2k+1)},$$

а $\lim_{h\to\infty}\Omega(h)=0$. Поэтому при всех

$$0<N<\frac{\sigma^{k+1/2}}{\pi\sqrt{2(2k+1)}}$$

уравнение

$$(17)\qquad \Omega(h)=N^2$$

имеет решение.

Теорема 6. *Пусть* $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < n$ *и* $N > 0$. *Тогда при всех* $0 < \sigma < \infty$

$$e_2(n,k,\sigma,N) = \left(\frac{\widehat{h}_N^{2n-2k-1}}{\pi}\int_0^{\sigma\widehat{h}_N}\frac{x^{2(k+n)}}{(1+x^{2n})^2}\,dx + \frac{\sigma^{-(2n-2k-1)}}{\pi(2n-2k-1)}\right)^{1/2},$$

где

$$\widehat{h}_N = \begin{cases} h_N, & 0 < N < \widehat{N}, \\ 0, & N \ge \widehat{N}, \end{cases} \qquad \widehat{N} = \frac{\sigma^{k+1/2}}{\pi\sqrt{2(2k+1)}},$$

а h_N — *решение уравнения* (17). *При этом функционал*

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma}\frac{(it)^k}{1+(\widehat{h}_N t)^{2n}}y(t)\,dt \tag{18}$$

является экстремальным. При $\sigma = \infty$

$$e_2(n,k,\infty,N) = \frac{\sqrt{2k+1}}{\left(4n^2\sin\pi\dfrac{2k+1}{2n}\right)^{\frac{n}{2k+1}}}\left(\frac{2n-2k-1}{2\pi N^2}\right)^{\frac{2n-2k-1}{2(2k+1)}},$$

а функционал (18), *в котором*

$$\widehat{h}_N = \left(\frac{2n-2k-1}{8\pi n^2 N^2\sin\pi\dfrac{2k+1}{2n}}\right)^{\frac{1}{2k+1}},$$

— *экстремальный.*

Отметим, что в случае $\sigma = \infty$ результат, сформулированный в этой теореме, может быть получен из работы [12].

3. Доказательства

В основе доказательств сформулированных теорем лежат соображения, связанные с общими принципами теории экстремальных задач. Суть дела заключается в том, что рассматриваемые здесь задачи редуцируются к некоторым выпуклым задачам, для которых необходимым и достаточным условием того, что допустимая точка есть решение данной задачи, является равенство нулю производной (или принадлежность нуля субдифференциалу) функции Лагранжа в этой точке. Такое условие представляет из себя некоторое тождество. С другой стороны, сама задача восстановления является двойственной к указанным выпуклым задачам и поэтому, решив их (т. е. получив нужное тождество), мы, вообще говоря, решаем и двойственную задачу (подробнее о таком подходе к решению различных экстремальных задач см. [13]–[15]. Следующая теорема представляет собой итоговый результат приведенных соображений.

Теорема 7. *Пусть* $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < n$, $0 < \sigma \le \infty$, $\delta > 0$, $1 \le p \le \infty$ *и при всех* $x(\cdot) \in X_p^n$ *выполняется равенство*

$$x^{(k)}(0) = \langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt, \tag{19}$$

где $\widehat{y}^*$ *— некоторый линейный непрерывный функционал на* $L_p(\Delta_\sigma)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *а* $\widehat{x}(\cdot) \in X_p^n$ *и удовлетворяет следующим условиям*

(i) $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} = \delta$,

(ii) $\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$,

(iii) $\langle \widehat{y}^*, F\widehat{x}(\cdot)\rangle = \delta\|\widehat{y}^*\|$.

Тогда

$$E_p(n,k,\sigma,\delta) = \lambda + \delta\|\widehat{y}^*\|, \tag{20}$$

а $\widehat{y}^*$ *— оптимальный метод восстановления. Кроме того, в задаче Стечкина для* $N = \|\widehat{y}^*\|$

$$e_p(n,k,\sigma,N) = \lambda,$$

а $\widehat{y}^*$ *— экстремальный функционал.*

Доказательство. Учитывая равенство (19), имеем

$$\begin{aligned} E_p(n,k,\sigma,\delta) &\le \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_p^n,\ y(\cdot)\in L_p(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)}\le\delta}} |x^{(k)}(0) - \langle \widehat{y}^*, y(\cdot)\rangle| \\ &\le \sup_{x(\cdot)\in C_p^n} |x^{(k)}(0) - \langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle| + \delta\|\widehat{y}^*\| = \lambda + \delta\|\widehat{y}^*\|. \end{aligned} \tag{21}$$

С другой стороны, в силу (i) для любого метода восстановления $\varphi(y(\cdot))$ имеем

$$\begin{aligned} 2|\widehat{x}^{(k)}(0)| &\le |\widehat{x}^{(k)}(0) - \varphi(0)| + |-\widehat{x}^{(k)}(0) - \varphi(0)| \\ &\le 2 \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_p^n,\ y(\cdot)\in L_p(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)}\le\delta}} |x^{(k)}(0) - \varphi(y(\cdot))|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E_p(n,k,\sigma,\delta) \ge |\widehat{x}^{(k)}(0)|$. Учитывая (19), (ii) и (iii), получаем

$$E_p(n,k,\sigma,\delta) \ge |\widehat{x}^{(k)}(0)| = \left|\langle \widehat{y}^*, F\widehat{x}(\cdot)\rangle + \lambda\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\right| = \lambda + \delta\|\widehat{y}^*\|.$$

Из этого неравенства и (21) вытекает равенство (20) и оптимальность метода $\widehat{y}^*$.

Перейдем к задаче Стечкина. По доказанному в задаче оптимального восстановления среди оптимальных методов существует метод, задаваемый линейным непрерывным функционалом, поэтому

$$E_p(n,k,\sigma,\delta)=\inf_{N>0}\inf_{\|y^*\|\le N}\sup_{\substack{x(\cdot)\in C_p^n,\ y(\cdot)\in L_p(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)}\le\delta}}|x^{(k)}(0)-\langle y^*,y(\cdot)\rangle|$$

$$\le\inf_{\|y^*\|\le N}\sup_{x(\cdot)\in C_p^n}|x^{(k)}(0)-\langle y^*,Fx(\cdot)\rangle|+\delta N=e_p(n,k,\sigma,N)+\delta N.$$

Следовательно, при всех $N>0$

$$e_p(n,k,\sigma,N)\ge E_p(n,k,\sigma,\delta)-\delta N. \tag{22}$$

Отсюда из (20) для $N=\|\widehat{y}^*\|$ получаем

$$e_p(n,k,\sigma,N)\ge\lambda.$$

С другой стороны, в силу (19)

$$e_p(n,k,\sigma,N)\le\sup_{x(\cdot)\in C_p^n}|x^{(k)}(0)-\langle\widehat{y}^*,Fx(\cdot)\rangle|=\lambda.$$

□

Доказательство теоремы 1. Докажем, что для всех $x(\cdot)\in X_\infty^n$ имеет место равенство

$$x^{(k)}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_0}(it)^k\left(1-\delta\lambda|t|^{2n-k}\right)Fx(t)\,dt+\lambda\int_{\mathbb{R}}x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt, \tag{23}$$

где функция $\widehat{x}(\cdot)\in X_\infty^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t)=\begin{cases}(-i)^k\delta\operatorname{sign}t^k, & |t|<\sigma_0,\\ \dfrac{(-i)^k}{\lambda t^{2n-k}}, & |t|\ge\sigma_0.\end{cases}$$

В силу теоремы Планшереля имеем

$$\int_{\mathbb{R}}x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}t^{2n}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt. \tag{24}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_0}(it)^k\left(1-\delta\lambda|t|^{2n-k}\right)Fx(t)\,dt+\lambda\int_{\mathbb{R}}x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_0}\left((it)^k\left(1-\delta\lambda|t|^{2n-k}\right)+\lambda t^{2n}i^k\delta\operatorname{sign}t^k\right)Fx(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\sigma_0}(it)^kFx(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(it)^kFx(t)\,dt=x^{(k)}(0).$$

Равенство $\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}=1$ легко проверяется. Докажем, что $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)}=\delta$. При $\sigma_0\ge\sigma$ это непосредственно вытекает из определения $F\widehat{x}(\cdot)$. Пусть $\sigma_0 < \sigma$. Тогда $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$ и нетрудно убедиться, что $(\lambda\widehat{\sigma}^{2n-k})^{-1} = \delta$. Тем самым $|F\widehat{x}(t)| \le \delta$ при $|t| \ge \widehat{\sigma}$. Проверим теперь выполнение условия (iii) теоремы 7. Имеем

$$\langle \widehat{y}^*, F\widehat{x}(\cdot)\rangle = \frac{\delta}{2\pi}\int_{|t|<\sigma_0} |t|^k\left(1-\delta\lambda|t|^{2n-k}\right)\,dt. \tag{25}$$

Докажем, что $1-\delta\lambda|t|^{2n-k} > 0$ при $|t| < \sigma_0$. В силу определения σ_0 имеем

$$\delta^2\sigma_0^{2n+1}2(2n-k) \le \delta^2\widehat{\sigma}^{2n+1}2(2n-k) = \pi(2n+1)(2n-2k-1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\delta^2\sigma_0^{2n+1}(2n+1) \le (2n-2k-1)(\pi(2n+1)-\delta^2\sigma_0^{2n+1})&\\ = \sigma_0^{-2n+2k+1}(2n+1)\lambda^{-2}&,\end{aligned}$$

т.е. $\delta\lambda\sigma_0^{2n-k} \le 1$. Тем самым при $|t| < \sigma_0$ $1-\delta\lambda|t|^{2n-k} > 1-\delta\lambda\sigma_0^{2n-k} \ge 0$. Следовательно, правая часть (25) равна $\delta\|\widehat{y}^*\|$. Для завершения доказательства остается применить теорему 7. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим сначала случай $0 < k < n$. Докажем, что для всех $x(\cdot) \in X_1^n$ имеет место равенство

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mu_\delta(t)Fx(t)\,dt + \lambda\int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt, \tag{26}$$

где функция $\widehat{x}(\cdot) \in X_1^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} 0, & |t| \le a,\\ (-i)^k\dfrac{|t|^k-a^k}{\lambda t^{2n}}\operatorname{sign} t^k, & a < |t| < \sigma,\\ \dfrac{(it)^k}{\lambda t^{2n}}, & |t| \ge \sigma.\end{cases}$$

Действительно, учитывая (24), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma}\mu_\delta(t)Fx(t)\,dt + \lambda\int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le a}(it)^kFx(t)\,dt\\ + \frac{1}{2\pi}\int_{a<|t|<\sigma}\left((ia)^k\operatorname{sign} t^k + i^k(|t|^k-a^k)\operatorname{sign} t^k\right)Fx(t)\,dt\\ + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\sigma}(it)^kFx(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(it)^kFx(t)\,dt = x^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости равенств

$$\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_1(\Delta_\sigma)} = \delta, \quad \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1. \tag{27}$$

Остается применить теорему 7.

Пусть теперь $k = 0$. Если $\sigma = \infty$, то в силу равенства

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} Fx(t)\,dt,$$

рассмотрев любую функцию $\widehat{x}(\cdot)$, удовлетворяющую условиям $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} = \delta$, $\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, и применив теорему 7, получаем утверждение теоремы для $k = 0$ и $\sigma = \infty$.

Случай $k = 0$, $\sigma < \infty$ требует отдельного рассмотрения. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ определим функцию $\widehat{x}_\varepsilon(\cdot) \in X_1^n$ так, чтобы

$$F\widehat{x}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \le \varepsilon, \\ \dfrac{c_1}{t^{2n}}, & \varepsilon < |t| < \sigma, \\ \dfrac{c_2}{t^{2n}}, & |t| \ge \sigma. \end{cases}$$

Положив

$$c_1 = \frac{(2n-1)\delta}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{\sigma^{2n-1}}\right)^{-1},$$

$$c_2 = \sqrt{2n-1}\,\sigma^{n-1/2}\left(\pi - \frac{(2n-1)\delta^2}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{\sigma^{2n-1}}\right)^{-1}\right)^{1/2},$$

нетрудно убедиться, что для функции $\widehat{x}_\varepsilon(\cdot)$ выполнены условия (27). Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 7, можно показать, что

$$E_1(n,0,\sigma,\delta) \ge |\widehat{x}_\varepsilon(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F\widehat{x}_\varepsilon(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} F\widehat{x}_\varepsilon(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty \frac{c_2}{t^{2n}}\,dt = \frac{\delta}{2\pi} + \frac{c_2}{\sigma^{2n-1}\pi(2n-1)}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$E_1(n,0,\sigma,\delta) \ge \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

С другой стороны, для метода, определенного равенством (12), имеем

$$E_1(n,0,\sigma,\delta) \le \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_1^n,\ y(\cdot)\in L_1(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_1(\Delta_\sigma)}\le\delta}} \left|x(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} y(t)\,dt\right|$$
$$\le \sup_{x(\cdot)\in C_1^n}\left|x(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} Fx(t)\,dt\right| + \frac{\delta}{2\pi}$$
$$= \frac{\delta}{2\pi} + \sup_{x(\cdot)\in C_1^n}\frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty |Fx(t)|\,dt \le \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\int_\sigma^\infty t^{2n}|Fx(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_\sigma^\infty \frac{dt}{t^{2n}}}$$
$$\le \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

□

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и теорем 1 и 2, используя тождество

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} \frac{(it)^k}{1+(h_\delta t)^{2n}} Fx(t)\,dt + \lambda\int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t)\overline{\widehat{x}^{(n)}(t)}\,dt,$$

в котором

$$\lambda = \frac{h_\delta^{2n-k-1/2}}{\delta}\left(2\int_0^{\sigma h_\delta} x^{2k}(1+x^{2n})^{-2}\,dx\right)^{1/2},$$

а функция $\widehat{x}(\cdot) \in X_2^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{h_\delta^{2n}}{\delta}\dfrac{(it)^k}{1+(h_\delta t)^{2n}}, & |t|<\sigma, \\ \dfrac{(-i)^k}{\lambda} t^{k-2n}, & |t|\ge\sigma. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 4. Обозначим через $N(\delta)$ норму линейного функционала (4) (как функционала на $L_\infty(\Delta_\sigma)$). Имеем

$$N(\delta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma_0^{k+1}}{k+1} - \delta\lambda\frac{\sigma_0^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

где

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma, & 0<\delta\le\delta_0, \\ \left(\dfrac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)}\right)^{\frac{1}{2n+1}}, & \delta>\delta_0, \end{cases}$$

$$\delta_0 = \sigma^{-n-1/2}\sqrt{\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2(2n-k)}}.$$

Тем самым, учитывая (5), при $0<\delta\le\delta_0$

$$N(\delta) = \frac{\sigma^{k+1}}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{\delta\left(\dfrac{\pi}{\sigma^{2n+1}} - \dfrac{\delta^2}{2n+1}\right)^{-1/2}}{(2n+1)\sqrt{2n-2k-1}}\right).$$

Нетрудно убедиться, что при $0<\delta\le\delta_0$ функция $N(\delta)$ монотонно убывает от N_2 до N_1, где

$$N_2 = \frac{\sigma^{k+1}}{\pi(k+1)}, \quad N_1 = \frac{\sigma^{k+1}(2n-k)}{\pi(k+1)(2n+1)}.$$

Следовательно, при $N_1 \le N < N_2$ уравнение $N(\delta) = N$ имеет единственное решение

$$\delta_N = \sigma^{-n-1/2}\sqrt{\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{(2n+1)\gamma^{-2}(\sigma,N)+2n-2k-1}}.$$

При этом, учитывая, что при $N_1 \le N < N_2$ $\sigma_N = \sigma$, из теоремы 7 вытекает, что экстремальный функционал будет иметь вид (15).

Если $\delta \ge \delta_0$, то

$$N(\delta) = \left(\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)}\right)^{\frac{k+1}{2n+1}} \frac{2n-k}{\pi(k+1)(2n+1)}.$$

При $\delta \ge \delta_0$ функция $N(\delta)$ монотонно убывает от N_1 до 0. Отсюда при всех $0 < N \le N_1$ существует единственное решение уравнения $N(\delta) = N$, выражаемое равенством

$$\delta_N = \sqrt{n-k-1/2}\left(\frac{2n-k}{\pi(2n+1)}\right)^{\frac{2n-k}{2k+2}} \left(\frac{1}{(k+1)N}\right)^{\frac{2n+1}{2k+2}}.$$

При $0 < N \le N_1$ $\sigma_N = \widehat{\sigma}_N$ и экстремальный функционал имеет снова вид (15). Выражение для $e_\infty(n,k,\sigma,N)$ при $0 < N < N_2$ получается в соответствии с теоремой 7 подстановкой в (5) $\delta = \delta_N$.

Пусть теперь $N \ge N_2$. Тогда из (22) следует, что при всех $\delta > 0$

$$e_\infty(n,k,\sigma,N) \ge E_\infty(n,k,\sigma,\delta) - \delta N.$$

Устремляя δ к нулю, получаем

$$e_\infty(n,k,\sigma,N) \ge \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2}\sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

Непосредственная оценка функционала (15), который при $N \ge N_2$ принимает вид

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\sigma} (it)^k Fx(t)\,dt \tag{28}$$

(норма его равна N_2), дает

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(0) - \langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot)\rangle &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\sigma} |t|^k |Fx(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\ge\sigma} |t|^n |Fx(t)||t|^{k-n}\,dt \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{|t|\ge\sigma} |t|^{2n}|Fx(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_{|t|\ge\sigma}|t|^{2k-2n}\,dt} \\ &\le \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2}\sqrt{\pi(2n-2k-1)}}. \end{aligned} \tag{29}$$

□

Доказательство теоремы 5. Пусть $k > 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\varepsilon \in (1, +\infty)$, а δ определено равенством (9). Обозначим через $N(\varepsilon)$ норму линейного функционала (10) (как функционала на $L_1(\Delta_\sigma)$). Имеем

$$N(\varepsilon) = \frac{\sigma^k}{2\pi\varepsilon^k}.$$

Поэтому при $0 < N < \sigma^k/(2\pi)$, учитывая тождество (26), утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 7. Если $N \geq \sigma^k/(2\pi)$, то из (22) следует, что при всех $\delta > 0$

$$e_1(n,k,\sigma,N) \geq E_1(n,k,\sigma,\delta) - \delta N.$$

Устремляя ε к единице (при этом $\delta \to 0$), получаем

$$e_1(n,k,\sigma,N) \geq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2}\sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

При $N \geq \sigma^k/(2\pi)$ функционал (16) принимает вид (28). Учитывая оценку (29), имеем

$$e_1(n,k,\sigma,N) \leq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2}\sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

При $k > 0$ и $\sigma = \infty$ норма линейного функционала (10) равна

$$N(\delta) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi(2n-2k-1)}{\delta^2(2n-1)(2n-k-1)}\right)^{\frac{k}{2n-1}}.$$

Поэтому при всех $N > 0$ найдется δ_N, для которого $N(\delta_N) = N$, и с учетом тождества (26) утверждение теоремы вытекает из теоремы 7.

Пусть теперь $k = 0$. Тогда при всех $\delta > 0$

$$e_1(n,0,\sigma,N) \geq E_1(n,0,\sigma,\delta) - \delta N = \left(\frac{1}{2\pi} - N\right)\delta + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Устремляя δ к бесконечности, получаем

$$e_1(n,0,\sigma,N) = \infty.$$

Если $N \geq 1/(2\pi)$, то устремляя δ к нулю из того же неравенства будем иметь

$$e_1(n,0,\sigma,N) \geq \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Обратное неравенство следует из (29) при $k = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 6 проводится по той же схеме, которая использовалась в доказательствах теорем 4 и 5.

Литература

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[3] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.

[5] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50. №6. С. 85–93.

[7] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[10] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51. С. 89–124.

[11] *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error // J. Complexity. 1996. V. 12. P. 35–46.

[12] *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. 1968. Т. 4. №2. С. 233–238.

[13] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. С. 73–106.

[14] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2003 (2-ое изд.).

[15] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* Optimal recovery and extremum theory // Comput. Methods Funct. Theory. 2002. V. 2. P. 87–112.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского