

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

К.Ю. Осипенко

## 1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Одни из первых задач восстановления были задачи интерполяции функции. Пусть известны значения некоторой функции  $x(\cdot)$  в системе точек  $t_1, \dots, t_n$   $x(t_1), \dots, x(t_n)$ . Как “восстановить” значение функции в некоторой точке  $\tau$ ?

Нам хотелось бы по информации  $(x(t_1), \dots, x(t_n))$  указать число, которое можно было бы принять за приближенное значение  $x(\tau)$ . Это можно сделать различными способами. Например, соединить точки  $(t_j, x(t_j))$  ломаной или построить многочлен степени  $n - 1$ , проходящий через эти точки (многочлен Лагранжа). Наконец, можно строить полиномиальные сплайны различных степеней, проходящие через те же точки.

Какой из всех этих методов лучше?

Вместо вычисления значения  $x(\tau)$  можно рассматривать вычисление интеграла от этой функции

$$\int_a^b x(t) dt$$

по той же информации. Здесь тоже большое количество разнообразных методов: квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и т.д.

Такая же ситуация с численными решениями дифференциальных уравнений и многих других задач вычислительной математики.

В связи с этим возникает много вопросов.

Как разобраться во всем этом множестве методов?

Как их сравнивать и можно ли выбрать лучший?

Как строить новые хорошие методы?

Оценка эффективности того или иного метода требует некоторой дополнительной, априорной информации. Например, если оценивается погрешность интерполяции или вычисления интеграла, то

часто в качестве такой априорной информации участвуют оценки максимума модуля какой-либо из производной функции  $x(\cdot)$ .

Одним из самых распространенных подходов к рассмотренным задачам является следующий: предлагается некоторый метод, а затем исследуется его эффективность с помощью оценки его погрешности при некоторых условиях на функции, с которыми этот метод работает (например, гладкость и ограниченность соответствующих производных).

А.Н. Колмогоровым был инициирован другой подход к подобным задачам.

## 2. КОЛМОГОРОВСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Одной из первых задач восстановления, на которой хорошо видна колмогоровская идея, явилась задача о построении наилучшей (или оптимальной) квадратурной формулы.

Пусть дан некоторый класс функций  $W$ . Требуется вычислить

$$\int_a^b x(t) dt,$$

зная значения  $x(t_1), \dots, x(t_n)$ .

В качестве методов восстановления значения интеграла рассматриваются всевозможные квадратурные формулы

$$\int_a^b x(t) dt \approx \sum_{j=1}^n a_j x(t_j).$$

Ставится задача о нахождении наилучшей квадратурной формулы, т.е. формулы, на которой достигалась бы нижняя грань

$$\inf_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W} \left| \int_a^b x(t) dt - \sum_{j=1}^n a_j x(t_j) \right|.$$

Такого рода постановки впервые стали рассматриваться в работах А. Sard (American J. of Math., 1949) и С.М. Никольского (Успехи матем. наук, 1950).

В 1965 г. С.А. Смоляком была поставлена общая задача оптимального восстановления линейного функционала.

## 3. ПОСТАНОВКА С.А. СМОЛЯКА

Пусть  $X$  — линейное пространство,  $W \subset X$ ,  $L, l_1, \dots, l_n$  — линейные функционалы на  $X$ . Требуется восстановить значения  $Lx$ ,  $x \in W$ , по значениям  $Ix = (l_1x, \dots, l_nx)$ .

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции

$$m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Погрешностью данного метода  $m$  называется величина

$$e(L, W, I, m) = \sup_{x \in W} |Lx - m(Ix)|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(L, W, I) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} e(L, W, I, m).$$

**Теорема 1** (Смоляк, 1965). *Если  $W$  — выпуклое и центрально-симметричное множество, то среди оптимальных методов имеется линейный, т.е. имеющий вид*

$$\hat{m}(Ix) = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j l_j x,$$

и

$$E(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|.$$

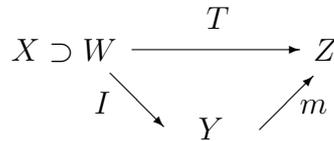
#### 4. ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сформулируем общую задачу об оптимальном восстановлении линейного оператора. Пусть  $X$  — линейное пространство,  $Y, Z$  — линейные нормированные пространства,  $T: X \rightarrow Z$ ,  $I: X \rightarrow Y$  — линейные операторы. Требуется восстановить значения оператора  $T$  на множестве  $W \subset X$  по неточной информации о значениях  $Ix$ .

Считается, что для каждого  $x \in W$  нам известен  $y \in Y$  такой, что  $\|Ix - y\|_Y \leq \delta$ .

В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения

$$m: Y \rightarrow Z.$$



Погрешностью метода  $m$  называется величина

$$e(T, W, I, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|Tx - m(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{m: Y \rightarrow Z} e(T, W, I, \delta, m).$$

**Лемма 1.** *Если  $W$  — центрально-симметричное множество, то*

$$E(T, W, I, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\|_Y \leq \delta}} \|Tx\|_Z.$$

Довольно часто само множество  $W$  задается в виде

$$W = \{x \in X : \|T_0x\|_{Z_0} \leq \delta_0\},$$

где  $Z_0$  — линейное пространство, а  $T_0: X \rightarrow Z_0$  — некоторый линейный оператор. Поэтому задачи вида

$$\|Tx\|_Z \rightarrow \max, \quad \|T_0x\|_{Z_0} \leq \delta_0, \quad \|Ix\|_Y \leq \delta, \quad x \in X,$$

играют важную роль в задачах восстановления.

Наиболее частая ситуация, когда все три оператора  $T$ ,  $T_0$  и  $I$  задаются одним оператором, зависящим от некоторого параметра. В этом случае предыдущая экстремальная задача принимает вид

$$\|T_r x\| \rightarrow \max, \quad \|T_{r_1} x\| \leq \delta_1, \quad \|T_{r_2} x\| \leq \delta_2, \quad x \in X.$$

Такого рода задачи называются интерполяционными: известны оценки норм при двух значениях параметра и надо оценить норму при некотором промежуточном значении параметра.

## 5. ТЕОРЕМА АДАМАРА О ТРЕХ КРУГАХ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция в кольце

$$r_1 \leq |z| \leq r_2.$$

Положим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

**Теорема 2** (Адамар).  $\log M(r)$  — выпуклая функция относительно  $\log r$ .

Это утверждение можно сформулировать и в следующем виде: при всех  $r_1 < r < r_2$  имеет место неравенство

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log r_2/r}{\log r_2/r_1}} M(r_2)^{\frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1}}.$$

Теорема Адамара о трех кругах дает оценку значения следующей экстремальной задачи

$$M(r) \rightarrow \max, \quad M(r_1) \leq \delta_1, \quad M(r_2) \leq \delta_2.$$

Точное решение ее (оно дается в терминах эллиптических функций) было найдено Р. Робинсоном в 1943.

В 1913 г. Э. Ландау рассмотрел подобную задачу. Вместо кругов он рассматривал производные. Для функций  $x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$  с локально абсолютно непрерывной первой производной на  $\mathbb{R}_+$  и таких, что  $x''(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$  он получил точное неравенство

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2}\|x''(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1/2}.$$

В действительности, им была решена следующая экстремальная задача

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_1, \quad \|x''(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2.$$

Сам Адамар в 1914 г. решил ту же задачу для  $\mathbb{R}$ .

В 1939 г. А.Н. Колмогоров получил общий результат в этом направлении. Он нашел решение экстремальной задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

Значение этой задачи

$$\frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}}\delta_1^{1-k/r}\delta_2^{k/r},$$

где

$$K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s(m+1)}}{(2s+1)^{m+1}}$$

— константы Фавара.

Экстремальные задачи подобного типа получили название неравенства для производных типа Ландау–Колмогорова.

## 6. НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА–ПОЛИА

Одним из представителей такого типа неравенств, где удается получить достаточно общий результат, является неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа.

В 1939 г. Харди, Литтлвуд и Полиа доказали, что для всех целых  $0 < k < r$  имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-\frac{k}{r}}\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k}{r}},$$

справедливое для всех функций  $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$  (функций  $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ , у которых  $(r-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ ).

Этот результат можно сформулировать в том же виде, как и теорему Адамара

**Теорема 3.**  $\log \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$  — выпуклая функция аргумента  $k$ .

Можно определить дробные производные (например, по Вейлю) и тогда аргумент  $k$  станет непрерывной переменной.

Само понятие выпуклости позволяет легко перейти от трех кругов в случае теоремы Адамара или трех производных в случае неравенства Харди–Литтлвуда–Поля к произвольному числу кругов или производных. Чем больше значений выпуклой функции известно, тем точнее ее можно оценить в промежуточной точке.

Пусть  $k_1 < \dots < k_n$  и  $k_1 \leq k \leq k_n$ . Рассмотрим следующую экстремальную задачу

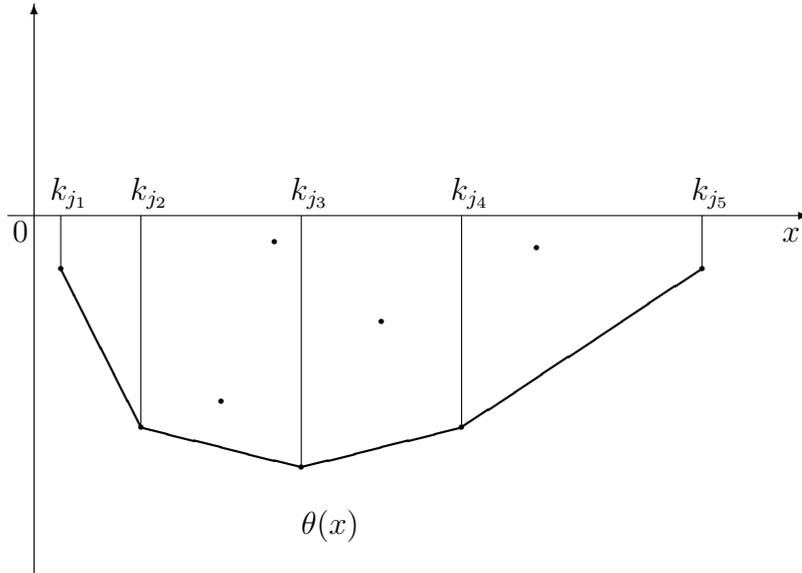
$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим в плоскости  $(x, y)$  множество точек

$$M = \text{co}\{(k_j, \log \delta_j), j = 1, \dots, n\}.$$

Положим

$$\theta(x) = \min\{y : (x, y) \in M\}.$$



**Теорема 4.**

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}) \\ \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = e^{\theta(k)}.$$

## 7. ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Предположим, что известны функции  $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ , такие, что

$$\|x^{(k_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Требуется как можно точнее восстановить функцию  $x^{(k)}(\cdot)$ .

Под методами восстановления будем понимать произвольные отображения  $m: (L_2(\mathbb{R}))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ .

Погрешностью данного метода  $m$  будем называть величину

$$e(D^k, K, \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}) \\ \|x^{(k_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j=1, \dots, n}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

здесь  $K = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  и  $y = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$ .

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(D^k, K, \delta) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(D^k, K, \delta, m).$$

Метод, на котором эта нижняя грань достигается, назовем оптимальным.

Обозначим через  $k_{j_1}, \dots, k_{j_r}$  точки излома линии  $\theta(\cdot)$ . Через  $Fx(\cdot)$  будем обозначать преобразование Фурье функции  $x(\cdot)$ .

**Теорема 5.** При всех  $k_1 \leq k \leq k_n$

$$E(D^k, K, \delta) = e^{\theta(k)}.$$

Если  $k_{j_s} < k < k_{j_{s+1}}$ ,  $1 \leq s \leq r-1$ , то метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = (L_s * y_{j_s})(\cdot) + (R_{s+1} * y_{j_{s+1}})(\cdot),$$

где

$$FL_s(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 (-i\tau)^{k_{j_s}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$

$$FR_{s+1}(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 (-i\tau)^{k_{j_{s+1}}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$

является оптимальным. При  $k = k_{j_s}$ ,  $1 \leq s \leq r-1$ , метод  $\widehat{m}(y)(\cdot) = y_{j_s}(\cdot)$  — оптимальный.

## 8. ТЕОРЕМА АДАМАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим обобщенное уравнение теплопроводности в  $\mathbb{R}^d$

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Оператор  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  определяется следующим образом

$$(-\Delta)^{\alpha/2}g(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Fg(\xi))(x),$$

где  $F$  — преобразование Фурье в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , а  $F^{-1}$  — обратное преобразование Фурье.

Единственным решением этого уравнение является функция

$$u(t, x) = F^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha t}} Ff(\xi))(x)$$

**Теорема 6.**  $\log \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  — *выпуклая функция*  $t$ .

Иными словами, при всех  $\tau, 0 \leq t_1 < \tau < t_2$

$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u(t_1, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{t_2 - \tau}{t_2 - t_1}} \|u(t_2, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\tau - t_1}{t_2 - t_1}}.$$

Перейдем теперь к задаче с  $n + 1$  “кругом”:

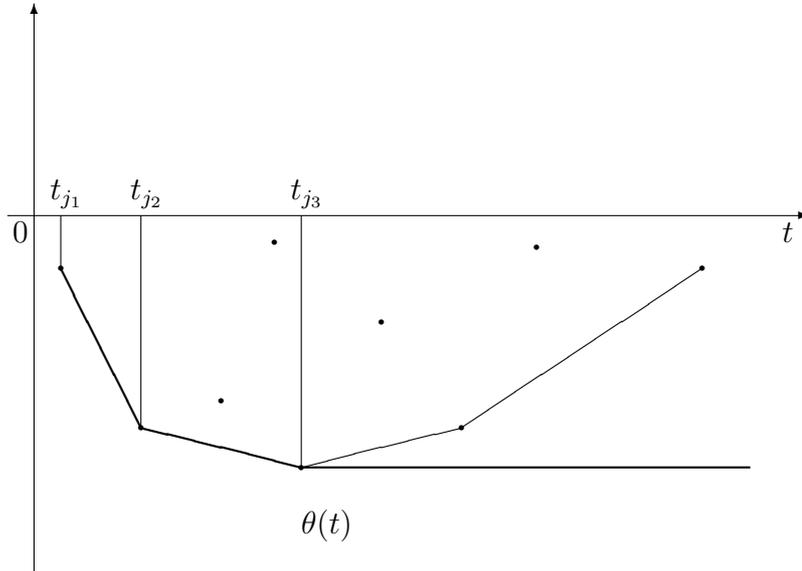
$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

В плоскости  $(t, y)$  определим множество

$$M = \text{co}\{(t_j, \log \delta_j), 1 \leq j \leq n\} + \{(t, 0) \mid t \geq 0\}$$

и

$$\theta(t) = \min\{y : (t, y) \in M\}.$$



**Теорема 7.** При всех  $\tau \geq t_1$

$$\sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1,2,\dots,n}} \|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = e^{\theta(\tau)}.$$

Рассмотренная экстремальная задача тесно связана со следующей задачей восстановления. Предположим, что в моменты времени  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  приближенно известны распределение температуры  $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Будем считать, что

$$\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Требуется восстановить распределение температуры в момент  $\tau$ .

Как и ранее, в качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения  $m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ .

Для данного метода  $m$  определяется его погрешность

$$\begin{aligned} e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta, m) \\ = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|u(\tau, \cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

Величина

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором она достигается, называется оптимальным.

**Теорема 8.** При всех  $\tau \geq t_1$

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d), \delta) = e^{\theta(\tau)}.$$

Пусть  $t_{j_1} < \dots < t_{j_r}$  — точки излома  $\theta(\cdot)$  и  $t_{j_s} < \tau < t_{j_{s+1}}$ , тогда метод  $\hat{m}(y)(\cdot) = (L_s * y_{j_s})(\cdot) + (R_{s+1} * y_{j_{s+1}})(\cdot)$ , где

$$\begin{aligned} FL_s(\xi) &= \frac{(t_{j_{s+1}} - \tau) \delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha (t_{j_{s+1}} - \tau)}}{(t_{j_{s+1}} - \tau) \delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha (t_{j_{s+1}} - t_{j_s})} + (\tau - t_{j_s}) \delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha (t_{j_{s+1}} - t_{j_s})}}, \\ FR_{s+1}(\xi) &= \frac{(\tau - t_{j_s}) \delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha (\tau - t_{j_s})}}{(t_{j_{s+1}} - \tau) \delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha (t_{j_{s+1}} - t_{j_s})} + (\tau - t_{j_s}) \delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha (t_{j_{s+1}} - t_{j_s})}}, \end{aligned}$$

оптимальный.

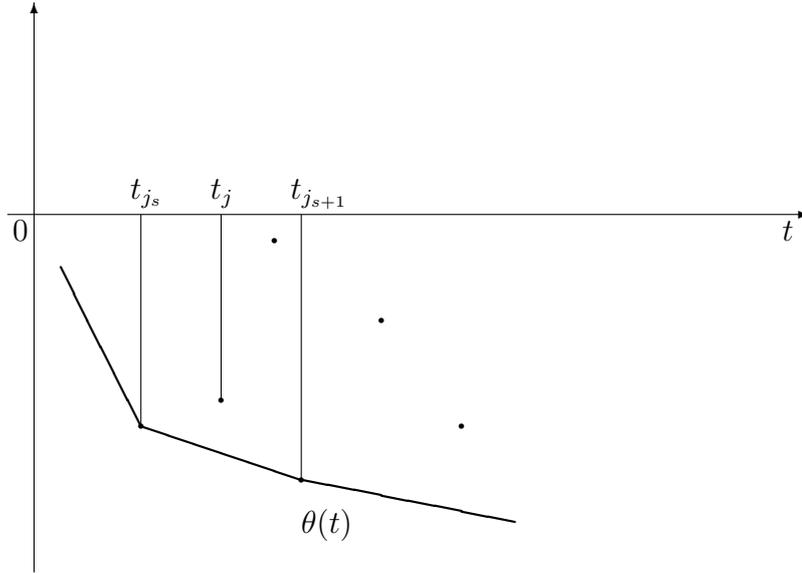
Если  $\tau > t_{j_r}$ , то метод, который сопоставляет у решение уравнения в момент времени  $\tau$ , совпадающего в момент времени  $t_{j_r}$  с  $y_{j_r}(\cdot)$ , является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний.

1. Оптимальный метод линеен и использует не более двух приближенных измерений.

2. Для нахождения этих измерений надо среди  $t_{j_1} < \dots < t_{j_r}$  найти ближайшие к  $\tau$  точки излома линии  $\theta(\cdot)$ .

3. В точках, не попадающих на изломы, сделанные измерения могут быть уточнены с помощью построенного оптимального метода.



Предположим, что для некоторого  $t_j$ ,  $t_{j_s} < t_j < t_{j_{s+1}}$  и  $\delta_j > e^{\theta(t_j)}$ . Для измерения  $y_j(\cdot)$  имеем

$$\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j.$$

А оптимальный метод в точке  $t_j$  дает погрешность меньшую, чем  $\delta_j$

$$\|u(t_j, \cdot) - \hat{m}(y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{\theta(t_j)} < \delta_j.$$

## 9. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Для простоты опишем схему получения оптимального метода восстановления для двух измерений в моменты  $t_1 = 0$  и  $t_2 = T$ .

Сначала рассматривается экстремальная задача

$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|u(0, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_0^2, \\ \|u(T, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \delta_T^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Переходя к преобразованию Фурье и пользуясь теоремой Планшереля, приходим к следующей задаче

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha\tau}} |Ff(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_0^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha T}} |Ff(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_T^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

В этой задаче нет существования. Мы рассматриваем ее расширение, переходя к мерам:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha\tau}} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi) \leq \delta_0^2, \\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha T}} d\mu(\xi) \leq \delta_T^2, \quad d\mu(\xi) \geq 0.$$

Для решения этой задачи рассматривается функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(d\mu, \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}^d} (-e^{-2|\xi|^{\alpha\tau}} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2|\xi|^{\alpha T}}) d\mu(\xi).$$

Затем ищется мера  $d\hat{\mu}(\xi)$  и множители Лагранжа  $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_T$  такие, что

$$(a) \quad \min_{d\mu(\xi) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_T) = \mathcal{L}(d\hat{\mu}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_T), \\ (b) \quad \hat{\lambda}_0 \left( \int_{\mathbb{R}^d} d\hat{\mu}(\xi) - \delta_0^2 \right) + \hat{\lambda}_T \left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha T}} d\hat{\mu}(\xi) - \delta_T^2 \right) = 0.$$

Далее, для фиксированных  $y_0(\cdot), y_T(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$  решается экстремальная задача

$$\hat{\lambda}_0 \|f(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_T \|u(T, \cdot) - y_T(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \min, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где  $u(\cdot, \cdot)$  — решение уравнения теплопроводности с начальным распределением температуры  $f(\cdot)$ .

Если  $\hat{f}(\cdot)$  — решение этой задачи, то метод

$$\hat{m}(y)(\cdot) = \hat{u}(\tau, \cdot),$$

в котором  $\hat{u}(\cdot, \cdot)$  — решение уравнения теплопроводности с начальным распределением  $\hat{f}(\cdot)$ , — оптимальный.

Рассмотрим более внимательно задачу

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha\tau}} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi) \leq \delta_0^2, \\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha T}} d\mu(\xi) \leq \delta_T^2, \quad d\mu(\xi) \geq 0.$$

Ясно, что для всех  $\sigma_0, \sigma_T > 0$  значение задачи

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^{\alpha\tau}} d\mu(\xi) \rightarrow \max, \quad \int_{|\xi| \geq \sigma_0} d\mu(\xi) \leq \delta_0^2, \\ \int_{|\xi| \leq \sigma_T} e^{-2|\xi|^{\alpha T}} d\mu(\xi) \leq \delta_T^2, \quad d\mu(\xi) \geq 0$$

не меньше, чем значение задачи (1).

В действительности, существует некоторое множество значений  $\sigma_0, \sigma_T > 0$ , при которых значения этих задач совпадают.

Предположим, что  $\delta_T < \delta_0$ . Положим

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{cases} \left( \frac{1}{2T} \log \left( \left( \frac{\tau}{T} \right)^{\frac{T}{T-\tau}} \frac{\delta_0^2}{\delta_T^2} \right) \right)^{1/\alpha}, & \frac{\delta_T^2}{\delta_0^2} < \left( \frac{\tau}{T} \right)^{\frac{T}{T-\tau}}, \\ 0, & \frac{\delta_T^2}{\delta_0^2} \geq \left( \frac{\tau}{T} \right)^{\frac{T}{T-\tau}}, \end{cases} \\ \hat{\sigma}_T = \left( \frac{1}{2T} \log \left( \left( \frac{T}{T-\tau} \right)^{\frac{T}{\tau}} \frac{\delta_0^2}{\delta_T^2} \right) \right)^{1/\alpha}.$$

**Теорема 9.** При всех  $0 \leq \sigma_0 \leq \hat{\sigma}_0$  и  $\sigma_T \geq \hat{\sigma}_T$  значения задач (1) и (2) совпадают.

Это приводит к тому, что удастся построить целое семейство оптимальных методов восстановления.

**Теорема 10.** При всех  $0 \leq \sigma_0 \leq \hat{\sigma}_0$  и  $\sigma_T \geq \hat{\sigma}_T$  методы

$$\hat{m}_{\sigma_0, \sigma_T}(y)(\cdot) = (K_0 * y_0)(\cdot) + (K_T * y_T)(\cdot)$$

оптимальны; здесь

$$FK_0(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\xi| \leq \sigma_0, \\ \frac{(T - \tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha(T-\tau)}}{(T - \tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha T} + \tau\delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0 < |\xi| < \sigma_T, \\ e^{-|\xi|^\alpha \tau}, & |\xi| \geq \sigma_T, \end{cases}$$

$$FK_T(\xi) = \begin{cases} e^{|\xi|^\alpha(T-\tau)}, & 0 \leq |\xi| \leq \sigma_0, \\ \frac{\tau\delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha \tau}}{(T - \tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha T} + \tau\delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0 < |\xi| < \sigma_T, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma_T. \end{cases}$$

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, e-mail: KOSIPENKO@YANOO.COM