ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

К.Ю. Осипенко

1. Восстановление линейных функционалов

Одни из первых задач восстановления были задачи интерполяции функции. Пусть известны значения некоторой функции $x(\cdot)$ в системе точек $t_1, \ldots, t_n$ $x(t_1), \ldots, x(t_n)$. Как "восстановить" значение функции в некоторой точке τ?

Нам хотелось бы по информации $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$ указать число, которое можно было бы принять за приближенное значение $x(\tau)$. Это можно сделать различными способами. Например, соединить точки $(t_j, x(t_j))$ ломаной или построить многочлен степени $n-1$, проходящий через эти точки (многочлен Лагранжа). Наконец, можно строить полиномиальные сплайны различных степеней, проходящие через те же точки.

Какой из всех этих методов лучше?

Вместо вычисления значения $x(\tau)$ можно рассматривать вычисление интеграла от этой функции

$$\int_a^b x(t)\,dt$$

по той же информации. Здесь тоже большое количество разнообразных методов: квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и т.д.

Такая же ситуация с численными решениями дифференциальных уравнений и многих других задач вычислительной математики.

В связи с этим возникает много вопросов.

Как разобраться во всем этом множестве методов?

Как их сравнивать и можно ли выбрать лучший?

Как строить новые хорошие методы?

Оценка эффективности того или иного метода требует некоторой дополнительной, априорной информации. Например, если оценивается погрешность интерполяции или вычисления интеграла, то часто в качестве такой априорной информации участвуют оценки максимума модуля какой-либо из производной функции $x(\cdot)$.

Одним из самых распространенных подходов к рассмотренным задачам является следующий: предлагается некоторый метод, а затем исследуется его эффективность с помощью оценки его погрешности при некоторых условиях на функции, с которыми этот метод работает (например, гладкость и ограниченность соответствующих производных).

А.Н. Колмогоровым был инициирован другой подход к подобным задачам.

2. Колмогоровский подход к задачам восстановления

Одной из первых задач восстановления, на которой хорошо видна колмогоровская идея, явилась задача о построении наилучшей (или оптимальной) квадратурной формулы.

Пусть дан некоторый класс функций W. Требуется вычислить

$$\int_a^b x(t)\,dt,$$

зная значения $x(t_1),\dots,x(t_n)$.

В качестве методов восстановления значения интеграла рассматриваются всевозможные квадратурные формулы

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^n a_j x(t_j).$$

Ставится задача о нахождении наилучшей квадратурной формулы, т.е. формулы, на которой достигалась бы нижняя грань

$$\inf_{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}} \sup_{x(\cdot)\in W} \left| \int_a^b x(t)\,dt - \sum_{j=1}^n a_j x(t_j) \right|.$$

Такого рода постановки впервые стали рассматриваться в работах A. Sard (American J. of Math., 1949) и С.М. Никольского (Успехи матем. наук, 1950).

В 1965 г. С.А. Смоляком была поставлена общая задача оптимального восстановления линейного функционала.

3. Постановка С.А. Смоляка

Пусть X — линейное пространство, $W \subset X$, $L, l_1,\dots,l_n$ — линейные функционалы на X. Требуется восстановить значения Lx, $x \in W$, по значениям $Ix = (l_1x,\dots,l_nx)$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции

$$m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Погрешностью данного метода m называется величина

$$e(L,W,I,m) = \sup_{x\in W} |Lx - m(Ix)|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(L,W,I) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}} e(L,W,I,m).$$

Теорема 1 (Смоляк, 1965)**.** *Если W — выпуклое и центрально-симметричное множество, то среди оптимальных методов имеется линейный, т.е. имеющий вид*

$$\widehat{m}(Ix) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_j l_j x,$$

и

$$E(L,W,I) = \sup_{\substack{x\in W\\ Ix=0}} |Lx|.$$

4. Оптимальное восстановление линейных операторов

Сформулируем общую задачу об оптимальном восстановлении линейного оператора. Пусть X — линейное пространство, Y, Z — линейные нормированные пространства, $T\colon X \to Z$, $I\colon X \to Y$ — линейные операторы. Требуется восстановить значения оператора T на множестве $W \subset X$ по неточной информации о значениях Ix.

Считается, что для каждого $x \in W$ нам известен $y \in Y$ такой, что $\|Ix - y\|_Y \le \delta$.

В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения

$$m\colon Y \to Z.$$

$$\begin{tikzcd}
X \supset W \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "I"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Погрешностью метода m называется величина

$$e(T,W,I,\delta,m) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y\\ \|Ix-y\|_Y\le\delta}} \|Tx - m(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{m\colon Y \to Z} e(T, W, I, \delta, m).$$

Лемма 1. *Если W — центрально-симметричное множество, то*

$$E(T, W, I, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\|_Y \leq \delta}} \|Tx\|_Z.$$

Довольно часто само множество W задается в виде

$$W = \{\, x \in X : \|T_0 x\|_{Z_0} \leq \delta_0 \,\},$$

где Z_0 — линейное пространство, а $T_0\colon X \to Z_0$ — некоторый линейный оператор. Поэтому задачи вида

$$\|Tx\|_Z \to \max, \quad \|T_0 x\|_{Z_0} \leq \delta_0, \quad \|Ix\|_Y \leq \delta, \quad x \in X,$$

играют важную роль в задачах восстановления.

Наиболее частая ситуация, когда все три оператора T, T_0 и I задаются одним оператором, зависящим от некоторого параметра. В этом случае предыдущая экстремальная задача принимает вид

$$\|T_r x\| \to \max, \quad \|T_{r_1} x\| \leq \delta_1, \quad \|T_{r_2} x\| \leq \delta_2, \quad x \in X.$$

Такого рода задачи называются интерполяционными: известны оценки норм при двух значениях параметра и надо оценить норму при некотором промежуточном значении параметра.

5. Теорема Адамара о трех кругах и неравенства для производных

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в кольце

$$r_1 \leq |z| \leq r_2.$$

Положим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Теорема 2 (Адамар)**.** $\log M(r)$ *— выпуклая функция относительно* $\log r$.

Это утверждение можно сформулировать и в следующем виде: при всех $r_1 < r < r_2$ имеет место неравенство

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\log r_2/r}{\log r_2/r_1}} M(r_2)^{\frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1}}.$$

Теорема Адамара о трех кругах дает оценку значения следующей экстремальной задачи

$$M(r) \to \max, \quad M(r_1) \leq \delta_1, \quad M(r_2) \leq \delta_2.$$

Точное решение ее (оно дается в терминах эллиптических функций) было найдено Р. Робинсоном в 1943.

В 1913 г. Э. Ландау рассмотрел подобную задачу. Вместо кругов он рассматривал производные. Для функций $x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ с локально абсолютно непрерывной первой производной на $\mathbb{R}_+$ и таких, что $x''(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ он получил точное неравенство

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 2\|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\|x''(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

В действительности, им была решена следующая экстремальная задача

$$\|x'(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_1, \quad \|x''(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta_2.$$

Сам Адамар в 1914 г. решил ту же задачу для $\mathbb{R}$.

В 1939 г. А.Н. Колмогоров получил общий результат в этом направлении. Он нашел решение экстремальной задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \delta_2.$$

Значение этой задачи

$$\frac{K_{r-k}}{K_r^{1-\frac{k}{r}}}\delta_1^{1-k/r}\delta_2^{k/r},$$

где

$$K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s(m+1)}}{(2s+1)^{m+1}}$$

— константы Фавара.

Экстремальные задачи подобного типа получили название неравенства для производных типа Ландау–Колмогорова.

6. Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа

Одним из представителей такого типа неравенств, где удается получить достаточно общий результат, является неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа.

В 1939 г. Харди, Литтлвуд и Полиа доказали, что для всех целых $0 < k < r$ имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|x(\cdot)\|^{1-\frac{k}{r}}_{L_2(\mathbb{R})}\|x^{(r)}(\cdot)\|^{\frac{k}{r}}_{L_2(\mathbb{R})},$$

справедливое для всех функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$ (функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$).

Этот результат можно сформулировать в том же виде, как и теорему Адамара

Теорема 3. $\log \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$ — *выпуклая функция аргумента* k.

Можно определить дробные производные (например, по Вейлю) и тогда аргумент k станет непрерывной переменной.

Само понятие выпуклости позволяет легко перейти от трех кругов в случае теоремы Адамара или трех производных в случае неравенства Харди–Литтвуда–Полиа к произвольному числу кругов или производных. Чем больше значений выпуклой функции известно, тем точнее ее можно оценить в промежуточной точке.

Пусть $k_1 < \ldots < k_n$ и $k_1 \le k \le k_n$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу

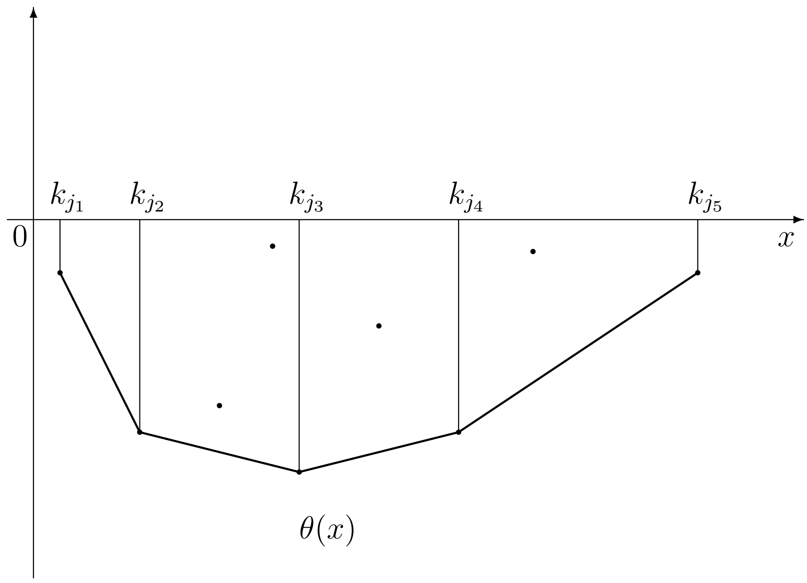
$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, \ j = 1, \ldots, n, \quad x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим в плоскости (x, y) множество точек

$$M = \operatorname{co}\{\, (k_j, \log \delta_j), \ j = 1, \ldots, n \,\}.$$

Положим

$$\theta(x) = \min\{\, y : (x, y) \in M \,\}.$$



Теорема 4.

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}) \\ \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, \ j=1,\ldots,n}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = e^{\theta(k)}.$$

7. Оптимальное восстановление производных

Предположим, что известны функции $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, такие, что
$$\|x^{(k_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$
Требуется как можно точнее восстановить функцию $x^{(k)}(\cdot)$.

Под методами восстановления будем понимать произвольные отображения $m\colon (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})$.

Погрешностью данного метода m будем называть величину
$$e(D^k, K, \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{k_n}(\mathbb{R}) \\ \|x^{(k_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$
здесь $K = (k_1, \dots, k_n)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ и $y = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$.

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину
$$E(D^k, K, \delta) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}))^n \to L_2(\mathbb{R})} e(D^k, K, \delta, m).$$

Метод, на котором эта нижняя грань достигается, назовем оптимальным.

Обозначим через $k_{j_1}, \dots, k_{j_r}$ точки излома линии $\theta(\cdot)$. Через $Fx(\cdot)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $x(\cdot)$.

Теорема 5. *При всех* $k_1 \le k \le k_n$
$$E(D^k, K, \delta) = e^{\theta(k)}.$$
Если $k_{j_s} < k < k_{j_{s+1}}$, $1 \le s \le r-1$, *то метод*
$$\widehat{m}(y)(\cdot) = (L_s * y_{j_s})(\cdot) + (R_{s+1} * y_{j_{s+1}})(\cdot),$$
где
$$FL_s(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 (-i\tau)^{k_{j_s}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$
$$FR_{s+1}(\tau) = (i\tau)^k \frac{(k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 (-i\tau)^{k_{j_{s+1}}}}{(k_{j_{s+1}} - k)\delta_{j_{s+1}}^2 \tau^{2k_{j_s}} + (k - k_{j_s})\delta_{j_s}^2 \tau^{2k_{j_{s+1}}}},$$
является оптимальным. При $k = k_{j_s}$, $1 \le s \le r-1$, *метод* $\widehat{m}(y)(\cdot) = y_{j_s}(\cdot)$ *— оптимальный.*

8. Теорема Адамара для уравнения теплопроводности

Рассмотрим обобщенное уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^d$
$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определяется следующим образом

$$(-\Delta)^{\alpha/2}g(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Fg(\xi))(x),$$

где F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Единственным решением этого уравнение является функция

$$u(t,x) = F^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t}Ff(\xi))(x)$$

Теорема 6. $\log\|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ *— выпуклая функция* t*.*

Иными словами, при всех τ, $0 \le t_1 < \tau < t_2$

$$\|u(\tau,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|u(t_1,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{t_2-\tau}{t_2-t_1}}\|u(t_2,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\tau-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Перейдем теперь к задаче с $n+1$ “кругом”:

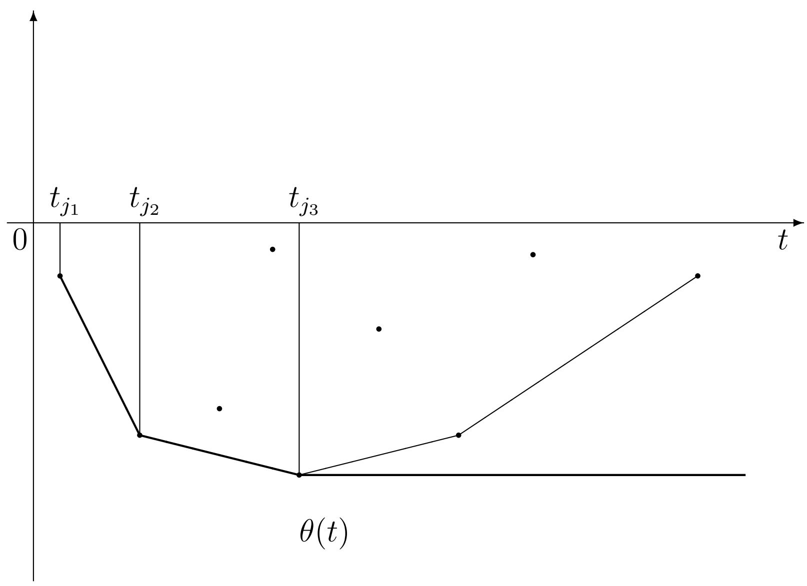
$$\|u(\tau,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$
$$f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

В плоскости (t,y) определим множество

$$M = \operatorname{co}\{\,(t_j, \log\delta_j),\ 1 \le j \le n\,\} + \{\,(t,0) \mid\ t \ge 0\,\}$$

и

$$\theta(t) = \min\{\,y : (t,y) \in M\,\}.$$



Теорема 7. *При всех* $\tau \ge t_1$

$$\sup_{\substack{f\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,2,\ldots,n}} \|u(\tau,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = e^{\theta(\tau)}.$$

Рассмотренная экстремальная задача тесно связана со следующей задачей восстановления. Предположим, что в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределение температуры $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \ldots, n$. Будем считать, что

$$\|u(t_j,\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Требуется восстановить распределение температуры в момент τ.

Как и ранее, в качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$.

Для данного метода m определяется его погрешность

$$e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d),\delta,m) = \sup_{\substack{f(\cdot),y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|u(\tau,\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

Величина

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d),\delta) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)} e_\tau(L_2(\mathbb{R}^d),\delta,m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором она достигается, называется оптимальным.

Теорема 8. *При всех* $\tau \ge t_1$

$$E_\tau(L_2(\mathbb{R}^d),\delta) = e^{\theta(\tau)}.$$

Пусть $t_{j_1} < \ldots < t_{j_r}$ *— точки излома* $\theta(\cdot)$ *и* $t_{j_s} < \tau < t_{j_{s+1}}$*, тогда метод* $\widehat{m}(y)(\cdot) = (L_s * y_{j_s})(\cdot) + (R_{s+1} * y_{j_{s+1}})(\cdot)$*, где*

$$FL_s(\xi) = \frac{(t_{j_{s+1}} - \tau)\delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha(t_{j_{s+1}}-\tau)}}{(t_{j_{s+1}} - \tau)\delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha(t_{j_{s+1}}-t_{j_s})} + (\tau - t_{j_s})\delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha(t_{j_{s+1}}-t_{j_s})}},$$

$$FR_{s+1}(\xi) = \frac{(\tau - t_{j_s})\delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha(\tau-t_{j_s})}}{(t_{j_{s+1}} - \tau)\delta_{j_{s+1}}^2 e^{|\xi|^\alpha(t_{j_{s+1}}-t_{j_s})} + (\tau - t_{j_s})\delta_{j_s}^2 e^{-|\xi|^\alpha(t_{j_{s+1}}-t_{j_s})}},$$

оптимальный.

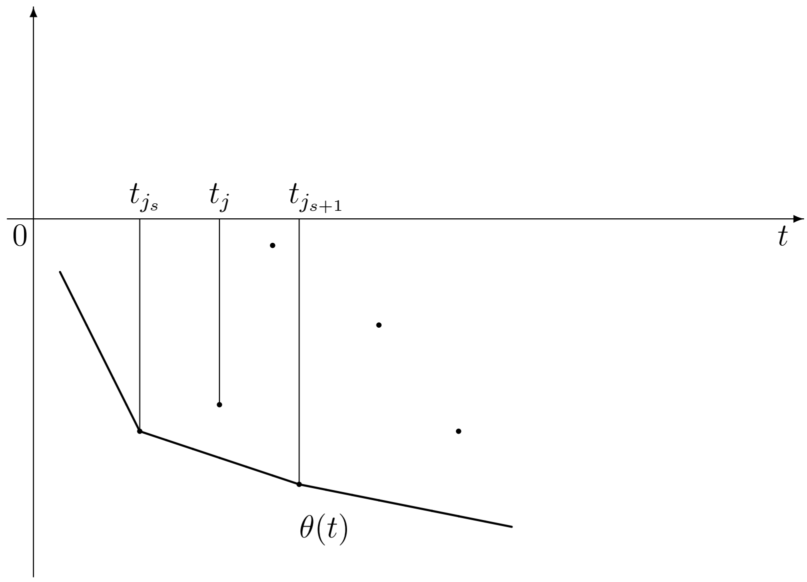
Если $\tau > t_{j_r}$*, то метод, который сопоставляет* y *решение уравнения в момент времени* τ*, совпадающего в момент времени* t_{j_r} *с* $y_{j_r}(\cdot)$*, является оптимальным.*

Сделаем несколько замечаний.

1. Оптимальный метод линеен и использует не более двух приближенных измерений.

2. Для нахождения этих измерений надо среди $t_{j_1} < \ldots < t_{j_r}$ найти ближайшие к τ точки излома линии $\theta(\cdot)$.

3. В точках, не попадающих на изломы, сделанные измерения могут быть уточнены с помощью построенного оптимального метода.



Предположим, что для некоторого t_j, $t_{j_s} < t_j < t_{j_{s+1}}$ и $\delta_j > e^{\theta(t_j)}$. Для измерения $y_j(\cdot)$ имеем

$$\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j.$$

А оптимальный метод в точке t_j дает погрешность меньшую, чем δ_j

$$\|u(t_j, \cdot) - \widehat{m}(y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le e^{\theta(t_j)} < \delta_j.$$

9. Схема построения оптимальных методов восстановления

Для простоты опишем схему получения оптимального метода восстановления для двух измерений в моменты $t_1 = 0$ и $t_2 = T$.

Сначала рассматривается экстремальная задача

$$\|u(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|u(0,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_0^2,$$
$$\|u(T,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_T^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Переходя к преобразованию Фурье и пользуясь теоремой Планшереля, приходим к следующей задаче

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha\tau}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \to \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \le \delta_0^2,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha T}|Ff(\xi)|^2\,d\xi \le \delta_T^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

В этой задаче нет существования. Мы рассматриваем ее расширение, переходя к мерам:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha\tau}\,d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi) \le \delta_0^2,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha T}\,d\mu(\xi) \le \delta_T^2, \quad d\mu(\xi) \ge 0.$$

Для решения этой задачи рассматривается функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(d\mu,\lambda_0,\lambda_T) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(-e^{-2|\xi|^\alpha\tau} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2|\xi|^\alpha T}\right)\,d\mu(\xi).$$

Затем ищется мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_T$ такие, что

$$(a) \qquad \min_{d\mu(\xi)\ge 0}\mathcal{L}(d\mu,\widehat{\lambda}_0,\widehat{\lambda}_T) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu},\widehat{\lambda}_0,\widehat{\lambda}_T),$$
$$(b) \qquad \widehat{\lambda}_0\left(\int_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_0^2\right) + \widehat{\lambda}_T\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha T}\,d\mu(\xi) - \delta_T^2\right) = 0.$$

Далее, для фиксированных $y_0(\cdot), y_T(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ решается экстремальная задача

$$\widehat{\lambda}_0\|f(\cdot) - y_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_T\|u(T,\cdot) - y_T(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где $u(\cdot,\cdot)$ — решение уравнения теплопроводности с начальным распределением температуры $f(\cdot)$.

Если $\widehat{f}(\cdot)$ — решение этой задачи, то метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = \widehat{u}(\tau,\cdot),$$

в котором $\widehat{u}(\cdot,\cdot)$ — решение уравнения теплопроводности с начальным распределением $\widehat{f}(\cdot)$, — оптимальный.

Рассмотрим более внимательно задачу

$$(1)\quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha\tau}\,d\mu(\xi)\to\max,\quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\xi)\le\delta_0^2,\\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha T}\,d\mu(\xi)\le\delta_T^2,\quad d\mu(\xi)\ge 0.$$

Ясно, что для всех $\sigma_0,\sigma_T>0$ значение задачи

$$(2)\quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^\alpha\tau}\,d\mu(\xi)\to\max,\quad \int_{|\xi|\ge\sigma_0} d\mu(\xi)\le\delta_0^2,\\ \int_{|\xi|\le\sigma_T} e^{-2|\xi|^\alpha T}\,d\mu(\xi)\le\delta_T^2,\quad d\mu(\xi)\ge 0$$

не меньше, чем значение задачи (1).

В действительности, существует некоторое множество значений $\sigma_0,\sigma_T>0$, при которых значения этих задач совпадают.

Предположим, что $\delta_T<\delta_0$. Положим

$$\widehat{\sigma}_0=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2T}\log\left(\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^{\frac{T}{T-\tau}}\dfrac{\delta_0^2}{\delta_T^2}\right)\right)^{1/\alpha}, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2}<\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^{\frac{T}{T-\tau}},\\ 0, & \dfrac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\ge\left(\dfrac{\tau}{T}\right)^{\frac{T}{T-\tau}},\end{cases}$$
$$\widehat{\sigma}_T=\left(\frac{1}{2T}\log\left(\left(\frac{T}{T-\tau}\right)^{\frac{T}{\tau}}\frac{\delta_0^2}{\delta_T^2}\right)\right)^{1/\alpha}.$$

Теорема 9. *При всех $0\le\sigma_0\le\widehat{\sigma}_0$ и $\sigma_T\ge\widehat{\sigma}_T$ значения задач* (1) *и* (2) *совпадают.*

Это приводит к тому, что удается построить целое семейство оптимальных методов восстановления.

Теорема 10. *При всех $0\le\sigma_0\le\widehat{\sigma}_0$ и $\sigma_T\ge\widehat{\sigma}_T$ методы*

$$\widehat{m}_{\sigma_0,\sigma_T}(y)(\cdot)=(K_0*y_0)(\cdot)+(K_T*y_T)(\cdot)$$

оптимальны; здесь

$$FK_0(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\xi| \le \sigma_0, \\ \dfrac{(T-\tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha (T-\tau)}}{(T-\tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha T} + \tau \delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0 < |\xi| < \sigma_T, \\ e^{-|\xi|^\alpha \tau}, & |\xi| \ge \sigma_T, \end{cases}$$

$$FK_T(\xi) = \begin{cases} e^{|\xi|^\alpha (T-\tau)}, & 0 \le |\xi| \le \sigma_0, \\ \dfrac{\tau \delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha \tau}}{(T-\tau)\delta_T^2 e^{|\xi|^\alpha T} + \tau \delta_0^2 e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0 < |\xi| < \sigma_T, \\ 0, & |\xi| \ge \sigma_T. \end{cases}$$

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, e-mail: kosipenko@yahoo.com