Е.В. Введенская
vm@rstu.ru

Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в d-мерном шаре по неточным исходным данным

Пусть Δ- оператор Лапласа в R^d и $a>0$. Определим оператор $(-\Delta)^{a/2}$ равенством

$(-\Delta)^{\frac{a}{2}} f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(m_s^p\right)^a\sum\limits_{j=1}^{a_k}C_{ksj}Y_{ksj}(x)$, где $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{a_k}C_{ksj}Y_{ksj}(x)$.

Здесь $\{Y_{ksj}(x)\}$- ортонормированный базис в пространстве $L_2(B^d)$, где

$B^d=\left\{x=(x_1,\ldots,x_d):\|x\|^2=\sum\limits_{j=1}^{d}x_j^2<1\right\}$, $Y_{ksj}=Z_{ksj}\Big/\|Z_{ksj}\|_{L_2(B^d)}$, а $Z_{ksj}(x)=\dfrac{J_p(m_s^{(p)}r)}{r^{d/2}-1}Y_j^{(k)}(x')$.

При этом $\{Y_j^{(k)}(x')\}$- зональные гармоники степени k с полюсом в точке $x'\in S^{d-1}$, где S^{d-1}- граница шара B^d, $r=\|x\|$, $m_s^{(p)}$ – s-й корень функции Бесселя $J_p(x)$ первого рода p-го порядка, причем $p=k+\dfrac{d-2}{2}$, а

$a_k=(d+2k-2)\dfrac{(d+k-3)!}{(d-2)!k!}$ - размерность пространства однородных гармонических многочленов степени k.

Исследуется следующая задача для обобщенного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases}U_t+(-\Delta)^{a/2}U=0\\ U(x,0)=f(x)\\ U(x,t)\big|_{x\in S^{d-1}}=0,\quad x\in B^d,\quad t>0\end{cases}\tag{1}$$

Предлагается алгоритм оптимального восстановления решения задачи (1) в момент времени $t:0<t<T$ по заданным с известными погрешностями значениям решения в моменты 0 и T:

$\|y_0(\cdot)-f(\cdot)\|_{L_2(B^d)}\le d_0$, $\|y_T(\cdot)-U(\cdot,T)\|_{L_2(B^d)}\le d_T$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $x:L_2(B^d)\times L_2(B^d)\to L_2(B^d)$.

Погрешностью метода x называется величина

$$e(a,L_2(B^d),d_0,d_T,x)=\sup_{f,y_0,y_T\in L_2(B^d):\|f(\cdot)-y_0(\cdot)\|_{L_2(B^d)}\le d_0,\ \|U(\cdot,T)-y_T(\cdot)\|_{L_2(B^d)}\le d_T}\|U(\cdot,t)-x(y_0,y_T)(\cdot)\|_{L_2(B^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(a,L_2(B^d),d_0,d_T)=\inf_{x:L_2(B^d)\times L_2(B^d)\to L_2(B^d)}e(a,L_2(B^d),d_0,d_T,x).$$

Предъявляется оптимальный метод, на котором достигается точная нижняя грань, а также вычисляется погрешность оптимального восстановления решения задачи (1).