

УДК 517.51

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ
ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ОПЕРАТОРА
РАДИАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Т. Э. Баграмян

В работе рассматривается задача оптимального восстановления гармонической в единичном шаре функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования. Информация о значении оператора задается в виде функции, отличающейся от точного значения в средне квадратичной метрике не более чем на фиксированную величину погрешности, либо в виде конечного набора коэффициентов Фурье, вычисленных с фиксированной погрешностью в средне квадратичной или равномерной метрике.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, гармоническая функция, пространство Харди, компьютерная томография.

В общем случае задача оптимального восстановления состоит в наилучшем приближении значения линейного оператора на некотором множестве по информации, являющейся значениями другого линейного оператора (называемого информационным), заданными с погрешностью в той или иной метрике (см. [1–3]). Во множестве случаев задачи оптимального восстановления операторов сводятся к задачам линейного программирования, впервые появившимся и получившим мощное развитие в работах Л. В. Канторовича, в которых были разработаны эффективные методы решения и анализа таких задач. В случае с задачами оптимального восстановления, соответствующие им задачи линейного программирования удается решить явно из-за небольшого числа присутствующих в них ограничений. В конкретных задачах восстановления в качестве информационного оператора обычно рассматривают линейные функционалы или операторы, сопоставляющие функции ее значения в точках, ее коэффициенты Фурье или просто саму функцию. Подобные задачи рассматривались во многих работах, начиная с [4]. Упомянем лишь некоторые из недавно опубликованных работ на эту тему — [5–8]. В настоящей работе рассматривается оператор, ставящий в соответствие функции множество ее интегралов, взятых вдоль радиусов единичного шара в \mathbb{R}^d . Такого рода операторы применяются для моделирования различных томографических процессов и подробно изучаются в теории компьютерной томографии [9]. В теории оптимального восстановления информационные операторы томографического типа рассматривались ранее в [2, пример 3.2].

Рассмотрим пространство h_2 гармонических в шаре $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geq 2$, функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{h_2} = \sup_{0 \leq r < 1} \|f(r \cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}.$$

Следуя [10], будем называть h_2 пространством Харди гармонических функций. Известно представление функций из h_2 в виде разложения в ряд по ортонормированной системе сферических гармоник:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} f_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (1)$$

где

$$N(l, d) = \frac{(2l + d - 2)(d + l - 3)!}{l!(d - 2)!}, \quad l \geq 1, \quad N(0, d) = 1.$$

Рассмотрим оператор радиального интегрирования K , определенный равенством

$$Kf(\zeta) = \int_0^1 f(r\zeta) dr, \quad \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (2)$$

Предположим, что для любой функции $f \in Bh_2 = \{f \in h_2 : \|f\|_{h_2} \leq 1\}$ значение Kf известно с некоторой погрешностью, т. е. дана функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такая, что $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta$. Зная функцию g , мы хотим наилучшим образом восстановить функцию f . Воспользуемся тем, что h_2 непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{B}^d)$ и будем искать приближение в этом пространстве. Рассмотрим всевозможные методы восстановления — произвольные отображения $m: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Для каждого m определим величину, называемую погрешностью метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Оптимальным назовем метод, который имеет наименьшую погрешность, т. е. тот, на котором достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m). \quad (3)$$

Теорема 1. Положим

$$(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad (5)$$

где число $s \geq 0$ таково, что $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$. Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2} \delta^2.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl} (l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (6)$$

где g_{kl} — коэффициенты разложения функции g в ряд Фурье по ортонормированной системе Y_k^l

$$g_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\zeta) Y_k^l(\zeta) d\zeta,$$

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl} \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2} (l+1)}{\widehat{\lambda}_1(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_1(2l+d) + \widehat{\lambda}_2 \frac{2l+d}{(l+1)^2}} - 1, \quad (7)$$

ϵ_{kl} — произвольные числа из отрезка $[-1; 1]$, которые являются оптимальными.

◁ С экстремальной задачей (3) тесно связана двойственная к ней задача

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \rightarrow \max, \quad f \in Bh_2, \quad \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta. \quad (8)$$

Эта связь подробно изучена и описана в [3] и других работах тех же авторов. Нам же потребуется следующее утверждение:

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Действительно, если функция f допустима в (8), то функция $-f$ также является допустимой. Поэтому верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\ & \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \frac{\|m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} + \|-m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}{2} \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}. \end{aligned}$$

Таким образом, погрешность оптимального восстановления ограничена снизу значением двойственной задачи. Решив ее, получим явное выражение для этой оценки.

Из (1) следует

$$Kf(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}}{l+1} Y_k^l(\zeta). \quad (9)$$

Используя (1), (2), (9) и равенство Парсеваля, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d}, \\ \|f\|_{h_2}^2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2, \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$b_l = \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2.$$

Тогда задача (8) может быть переписана в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d} \rightarrow \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leq 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \leq \delta^2, \quad b_l \geq 0 \quad (10)$$

(для удобства мы рассматриваем квадраты функционала и ограничений). Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2 \delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \left(\lambda_1 (l+1)^2 + \lambda_2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right), \quad b = (b_0, b_1, \dots).$$

Множество точек $\{(x_i, y_i) : i \geq 0\}$, определенное в (4), лежит на графике функции $y = \frac{x}{2\sqrt{x+d-2}}$, которая является вогнутой при $x \geq 0$. Отсюда следует, что все это множество лежит под прямой, соединяющей соседние точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) (см. рис. 1). Прямая, соединяющая точки (x_s, y_s) и (x_{s+1}, y_{s+1}) , имеет вид $y = \hat{\lambda}_1 x + \hat{\lambda}_2$, где $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ определены в (5). Тогда $y_i \leq \hat{\lambda}_1 x_i + \hat{\lambda}_2, i \geq 0$. Подставляя $i = l + 1$, получим

$$\frac{(l+1)^2}{2l+d} \leq \hat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \hat{\lambda}_2,$$

откуда следует, что $L(b, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq -\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 \delta^2$.

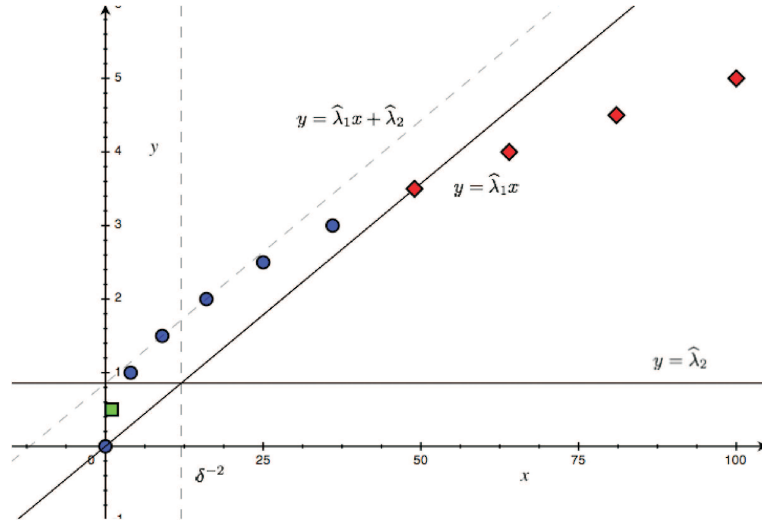


Рис. 1. На рисунке изображено множество точек $\{(x_l, y_l) | l \geq 0\}$, при $\delta^{-2} = 12, d = 2$. Точки, изображенные квадратом, соответствуют тем значениям l , для которых можно положить $a_{kl-1} = 1, k = 1, \dots, N(l, d)$, ромбом — тем l , для которых $a_{kl-1} = 0, k = 1, \dots, N(l, d)$.

Пусть $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$. Тогда определены неотрицательные числа

$$\hat{b}_s = x_s \frac{\delta^2 x_{s+1} - 1}{x_{s+1} - x_s}, \quad \hat{b}_{s+1} = x_{s+1} \frac{1 - \delta^2 x_s}{x_{s+1} - x_s}.$$

Положим $\hat{b}_i = 0$, при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор \hat{b} допустимый в (10), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\hat{\lambda}_1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \hat{b}_l - 1 \right) + \hat{\lambda}_2 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2 \right) = 0 \quad (11)$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = L(\hat{b}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = -\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 \delta^2. \quad (12)$$

В силу того, что $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, верно неравенство

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \leq - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d},$$

откуда

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \leq \min_{\substack{b_l \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \leq 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{(i+1)^2} \leq \delta^2}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d}.$$

Но из (11), (12) следует

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d}.$$

Таким образом,

$$- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d} \leq \min_{\substack{b_l \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \leq 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{(i+1)^2} \leq \delta^2}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d},$$

означает, что набор \widehat{b} является точкой максимума в задаче (10). Решение этой задачи равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2$, а решение задачи (8), соответственно, $-\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}$.

Итак, мы оценили погрешность оптимального восстановления снизу $E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}$. Покажем теперь, что на самом деле в этой оценке выполнено равенство.

Рассмотрим метод m_a , определенный в (6). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ (эквивалентно $s = 0$ или $\delta \geq 1$) из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m_0(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sup_{f \in Bh_2} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$, используя (1), имеем

$$\begin{aligned} \|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l+d} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl} - 1))^2}{2l+d}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ к векторам

$$x = \left(\frac{a_{kl}(l+1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \frac{a_{kl}-1}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \right), \quad y = \left(\sqrt{\widehat{\lambda}_2} \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right), \sqrt{\widehat{\lambda}_1} f_{kl} \right),$$

получим

$$\|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} \right) \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \right).$$

Введем обозначение

$$A_{kl} = \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} \right). \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 &= \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \\ &\leq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl} \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \right). \end{aligned}$$

Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl} \leq 1$, откуда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 \leq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \right) \leq \widehat{\lambda}_2 \delta^2 + \widehat{\lambda}_1.$$

Таким образом, мы получили, что оценки снизу и сверху для величины $E(Bh_2, K, \delta)$ совпадают. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы

$$\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2} = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq E(Bh_2, K, \delta) \leq e(Bh_2, K, \delta, m_a) \leq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}. \triangleright$$

Определенный в теореме 1 набор коэффициентов (a_{kl}) является фильтром, определяющим значение каждой гармоники в восстановлении функции f . Заметим, что при $\delta \geq 1$ погрешность оптимального восстановления становится равной $\sqrt{\frac{1}{d}}$, а оптимальным оказывается метод $m_0(g) = 0$. Покажем, что в зависимости от величины погрешности δ некоторые гармоники не нуждаются в фильтрации, а другие вовсе можно не учитывать.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда можно положить $a_{kl} = 0$ при $\frac{1}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_1$ и $a_{kl} = 1$ при $\frac{(l+1)^2}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_2$.

\triangleleft Подставляя $a_{kl} = 0$ и $a_{kl} = 1$ в (13), получаем, что условие $A_{kl} \leq 1$ эквивалентно, соответственно, условиям $\frac{1}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_1$ и $\frac{(l+1)^2}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_2$. \triangleright

Приведенное следствие означает, что, начиная с некоторой степени, все гармоники большего порядка не влияют на погрешность восстановления и коэффициент перед ними можно взять равным нулю. Также все гармоники, степень которых не превосходит определенного значения, не нуждаются в фильтрации и коэффициент может быть выбран равным единице. С ростом погрешности измерения δ число ненулевых коэффициентов в наборе a уменьшается, пока они все не становятся равными нулю при $\delta \geq 1$. При уменьшении погрешности измерения δ увеличивается число гармоник, не нуждающихся в фильтрации, а оптимальный метод m_a переходит в точную формулу восстановления

$$m_1(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} (l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right).$$

Сказанное проиллюстрировано на рис. 1. На рис. 2 указаны области значений фильтра a , при которых метод $m_a(g)$ является оптимальным. Видно, для каких l значение a_{kl} , $k = 1, \dots, N(l, d)$, может быть взято равным 1 или 0.

Решая задачу оптимального восстановления функции f по неточно заданному значению оператора K , мы считали, что информация, которой мы владеем есть функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, удовлетворяющая условию $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta$. В действительности, мы сразу перешли от функций f и g к рассмотрению их рядов Фурье и далее работали лишь с наборами коэффициентов Фурье $\{f_{kl}\}$ и $\{g_{kl}\}$. Предположим теперь, что вместо всего множества $\{g_{kl}\}$ нам известно лишь конечное число первых его элементов. Получим следующую задачу. Пусть для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l, d)$ такой, что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l, d)} |Kf_{kl} - g_{kl}|^2 \leq \delta^2,$$

где

$$Kf_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Kf(\zeta) Y_k^l(\zeta) d\zeta.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l, d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m: \mathbb{R}^q \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

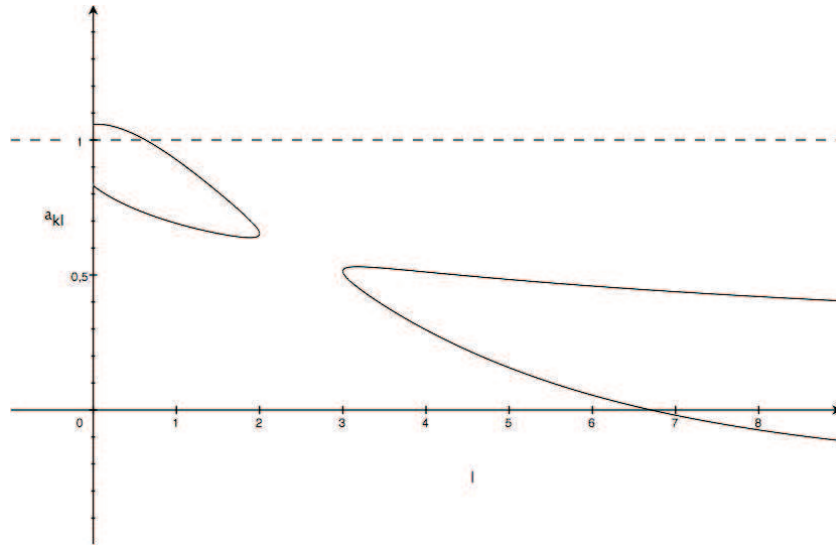


Рис. 2. На рисунке изображена область возможных значений фильтра a_{kl} , $k = 1, \dots, N(l, d)$, в зависимости от параметра l , при $\delta^{-2} = 12$, $d = 2$.

Теорема 2. Положим

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2} \right), \quad i = 0, 1, \dots, \quad s_N = \min \left\{ s \geq 0 : \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} \geq \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s} \right\},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s} \quad \text{при } x_s < \delta^{-2} < x_{s+1}, \quad 0 \leq s < s_N, \quad (14)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = y_{s_N} - x_{s_N} \widehat{\lambda}_1 \quad \text{при } \delta^{-2} \geq x_{s_N}. \quad (15)$$

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl} (l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (16)$$

где a_{kl} , определенные равенствами (7), являются оптимальными.

◁ Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \rightarrow \max, \quad f \in Bh_2, \quad \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |K f_{lk}|^2 \leq \delta^2. \quad (17)$$

Аналогично доказательству теоремы 1, получим оценку снизу

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |K f_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений, используя (9) и обозначение $b_l = \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2$, перепишем задачу (17) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d} \rightarrow \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leq 1, \quad \sum_{l=0}^{N-1} \frac{b_l}{(l+1)^2} \leq \delta^2, \quad b_l \geq 0. \quad (18)$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2 \delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \left(\lambda_1 (l+1)^2 + \chi^N(l) \lambda_2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right),$$

где $\chi^N(l)$ — характеристическая функция множества $\{0, \dots, N-1\}$, $b = (b_0, b_1, \dots)$.

Рассмотрим два случая.

Пусть $x_s < \delta^{-2} < x_{s+1}$, $s < s_N$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (14). Следуя тем же рассуждениям, что и в доказательстве теоремы 1, получим $y_{j+1} \leq \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2$, $j \leq N-1$. При $j \geq N$, имеем

$$\widehat{\lambda}_1 x_{j+1} - y_{j+1} = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s} x_{j+1} - y_{j+1} \geq \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} x_{j+1} - y_{j+1} \geq 0.$$

Таким образом, выполнено неравенство $L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2$. Положим

$$\widehat{b}_s = x_s \frac{\delta^2 x_{s+1} - 1}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{b}_{s+1} = x_{s+1} \frac{1 - \delta^2 x_s}{x_{s+1} - x_s},$$

$\widehat{b}_i = 0$ при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор \widehat{b} допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{b}_l - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2 \right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Отсюда (аналогично доказательству теоремы 1) следует, что \widehat{b} доставляет максимум в задаче (18), что означает

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Пусть $\delta^{-2} \geq x_{s_N}$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (15), так что прямая $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$ проходит через точку (x_{s_N}, y_{s_N}) параллельно прямой $y = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} x$. Тогда при $0 \leq j \leq s_N - 1$ имеем

$$y_{j+1} \leq \frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}} x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N} \frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей (x_{s_N-1}, y_{s_N-1}) и (x_{s_N}, y_{s_N})), откуда

$$y_{j+1} \leq y_{s_N} - \frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}} (x_{s_N} - x_{j+1}) \leq y_{s_N} - \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} (x_{s_N} - x_{j+1}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

При $s_N \leq j \leq N - 1$ выполнено

$$y_{j+1} \leq \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}} x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N} \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей (x_{s_N}, y_{s_N}) и (x_{s_N+1}, y_{s_N+1})), откуда

$$y_{j+1} \leq y_{s_N} + \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}} (x_{j+1} - x_{s_N}) \leq y_{s_N} + \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} (x_{j+1} - x_{s_N}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

Если $j > N$, то

$$\widehat{\lambda}_1 x_j - y_j = x_j \left(\frac{1}{2N + d - 2} - \frac{1}{2j + d - 2} \right) > 0.$$

Таким образом, выполнено

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Положим $\widehat{b}_i = 0$, $i \notin \{s_N - 1, N\}$, $\widehat{b}_{s_N-1} = \delta^2 x_{s_N}$, $\widehat{b}_N = 1 - \delta^2 x_{s_N}$. Тогда набор \widehat{b} допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{b}_l - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2 \right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Отсюда $E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}$.

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a , определенный в (16). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \|m_0(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sup_{f \in Bh_2} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l+d} + \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d} \\ &= \sum_{l=N-1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl} - 1))^2}{2l+d} + \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d}. \end{aligned}$$

Аналогично теореме 1 применим неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl} \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \right) + \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где A_{kl} определено в (13). Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl} \leq 1$. Заметим также, что $\frac{1}{2N+d} \leq \widehat{\lambda}_1$ и потому $\frac{1}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}_1$ при $l \geq N$. Тогда

$$\begin{aligned} e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 &= \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \\ &\leq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \leq \widehat{\lambda}_2 \delta^2 + \widehat{\lambda}_1. \triangleright \end{aligned}$$

В рассмотренном выше случае мы располагали неточной информацией о конечном наборе первых коэффициентов Фурье функции Kf , причем отличие этой информации от точной мы измеряли в метрике l_2 . Пусть теперь нам дан набор чисел $\{\delta_{kl} \geq 0 : l = 0, \dots, N-1, k = 1, \dots, N(l, d)\}$, характеризующий неточность информации для каждого коэффициента g_{kl} в отдельности, т. е. для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l, d)$ такой, что

$$|Kf_{kl} - g_{kl}| \leq \delta_{kl}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N(l, d).$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ |Kf_{kl} - g_{kl}| \leq \delta_{kl}}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m: \mathbb{R}^q \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

Теорема 3. Положим

$$p = \max \left\{ 0 \leq p \leq N-1 : \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 \leq 1 \right\},$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat{\lambda}(l+1)^2, \quad l = 0, \dots, p, \quad k = 1, \dots, N(l,d), \quad (19)$$

при $\delta_{10} \leq 1$, или

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = 0, \quad l = 0, \dots, p, \quad k = 1, \dots, N(l,d), \quad (20)$$

при $\delta_{10} > 1$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda} + \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2}.$$

Метод

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl} (l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (21)$$

где

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_{kl}}{\widehat{\lambda}(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_{kl}}, \quad (22)$$

является оптимальным.

◁ Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \rightarrow \max, \quad f \in Bh_2, \quad |Kf_{kl}| \leq \delta_{kl}, \quad (23)$$

$$l = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N(l,d).$$

Имеем оценку снизу

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ |Kf_{kl}| \leq \delta_{kl}}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений и используя (9), перепишем задачу (23) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d} \rightarrow \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2 \leq 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \leq \delta_{kl}^2, \quad (24)$$

$$l = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N(l,d).$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(f, \bar{\lambda}) = -\lambda - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl} \delta_{kl}^2 + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \left(\lambda(l+1)^2 + \lambda_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right) + \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \left(\lambda(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right),$$

где $\bar{\lambda} = \{\lambda, \lambda_{10}, \dots, \lambda_{N(l,d)N-1}\}$.

Пусть $\delta_{10} \leq 1$, возьмем

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \hat{\lambda}_{kl} = \begin{cases} \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \hat{\lambda}(l+1)^2, & l \leq p, \\ 0, & p < l \leq N-1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\hat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} \geq 0, \quad l \leq p.$$

Тогда при $l \leq p$

$$\hat{\lambda}(l+1)^2 + \hat{\lambda}_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = 0.$$

При $l > p$

$$\hat{\lambda}(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \geq 0.$$

Таким образом,

$$L(b, \hat{\lambda}) \geq -\hat{\lambda} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl} \delta_{kl}^2 = -\hat{\lambda} - \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl} \delta_{kl}^2.$$

Положим

$$\hat{f}_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl}(l+1), & l \leq p, \\ \sqrt{1 - \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2}, & l = p+1, \\ 0, & l > p+1. \end{cases}$$

Функция $\hat{f}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \hat{f}_{kl} |x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right)$ допустима в (24), так как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |\hat{f}_{kl}|^2 = 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} - \delta_{kl}^2 = 0, \quad l \leq p, \quad k = 1, \dots, N(l,d).$$

Если $p < N-1$, то

$$\frac{|f_{kp+1}|^2}{(p+2)^2} \leq \delta_{kp+1}^2,$$

так как в противном случае имели бы $\sum_{l=0}^{p+1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 < 1$, что противоречит определению p . Тогда

$$\hat{\lambda} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |\hat{f}_{kl}|^2 - 1 \right) + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \hat{\lambda}_{kl} \left(\frac{|\hat{f}_{kl}|}{(l+1)^2} - \delta_{kl}^2 \right) = 0$$

и

$$L(\hat{f}, \hat{\lambda}) = -\hat{\lambda} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \hat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2 = -\hat{\lambda} - \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \hat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2.$$

Следовательно,

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\hat{\lambda} + \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \hat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2}.$$

Пусть $\delta_{10} > 1$. Положим $\widehat{\lambda} = (\frac{1}{d}, 0, \dots, 0)$. Тогда, очевидно,

$$L(f, \widehat{\lambda}) \geq -\frac{1}{d}.$$

Функция $\widehat{f}(x) = Y_1^0(\frac{x}{|x|})$ допустима в (24), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости и $L(\widehat{f}, \widehat{\lambda}) = -\frac{1}{d}$, откуда следует

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\frac{1}{d}}.$$

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a , определенный в (21). При $\widehat{\lambda}_{kl} = 0$ из (22) следует, что $a_{kl} = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ |Kf_{kl} - g_{kl}| \leq \delta_{kl}}} \|m_0(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sup_{f \in Bh_2} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \widehat{\lambda}.$$

В противном случае, имеем

$$\begin{aligned} \|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 &= \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l+d} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d} \\ &= \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl} - 1))^2}{2l+d} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d}. \end{aligned}$$

Аналогично теореме 1 применим неравенство Коши — Буняковского. Получим

$$\|m_a(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \leq \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl} \left(\widehat{\lambda}_{kl} \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \widehat{\lambda} f_{kl}^2 \right) + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где

$$A_{kl} = \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_{kl}} + \frac{(a_{kl} - 1)^2}{\widehat{\lambda}} \right).$$

Равенства (22) эквивалентны равенствам $A_{kl} = 1$. Заметим также, что $\frac{1}{2l+d} \leq \widehat{\lambda}$, при $l \geq p+1$. Тогда

$$\begin{aligned} e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 &= \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ |Kf_{kl}| \leq \delta_{kl}}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \\ &\leq \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ |Kf_{kl}| \leq \delta_{kl}}} \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1} \right)^2 + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda} f_{kl}^2 \leq \sum_{l=0}^p \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2 + \widehat{\lambda}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Если разложение функции f состоит только из гармоник степени не более $N-1$, то при стремлении $\max \delta_{kl} \rightarrow 0$ оптимальный метод $m_a(g)$ переходит в точную формулу

$$m_1(g) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} (l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right).$$

Заметим, что величина p определяет, какое количество информации достаточно знать для оптимального восстановления, так как при $p < N - 1$ мы не используем коэффициенты $\{g_{kl}\}$, $l = p, \dots, N - 1$. Более того, исключение лишней информации и применение фильтра a позволяет существенно улучшить результат восстановления, по сравнению с методом $m_1(g)$.

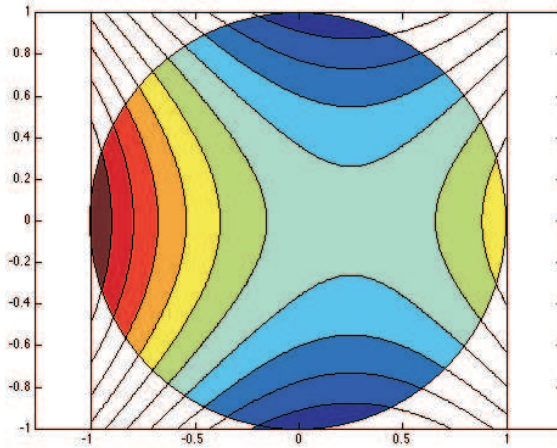


Рис. 3. Линии уровня функции $f(z) = \sqrt{\frac{4}{5\pi}} \operatorname{Re} z(z - \frac{1}{2})$.

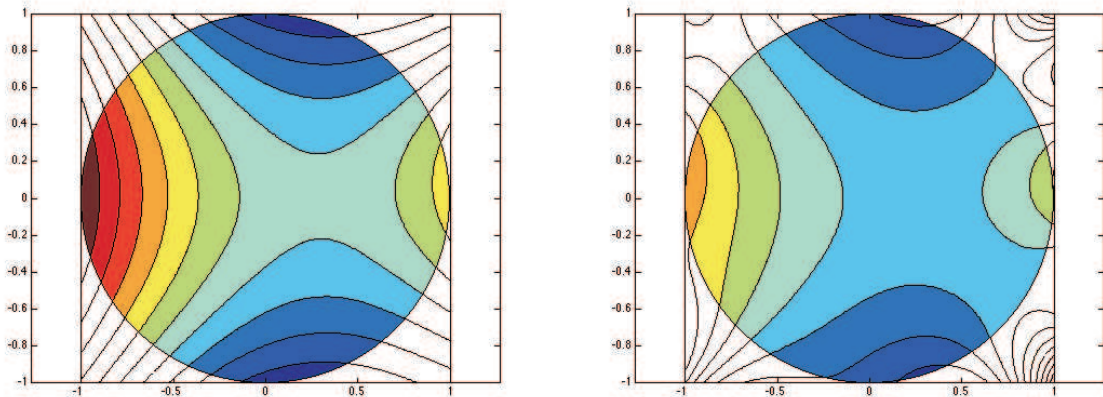


Рис. 4. Слева — результат восстановления оптимальным методом $m_a(g)$, справа — методом $m_1(g)$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{\frac{4}{5\pi}} \operatorname{Re} z(z - \frac{1}{2})$, гармоническую в круге \mathbb{B}^2 , для которой $\|f\|_{h_2} = 1$ (рис. 3). Пусть $N = 10$, т. е. известны $\sum_{l=0}^9 N(l, 2) = 19$ первых коэффициентов Фурье функции Kf , заданных с погрешностями

$$(\delta_{kl}) = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,01 & 0,001 & 0,02 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,2 & 0,2 & 0,01 \\ & & 0,01 & 0,001 & 0,02 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,2 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, $p = 6$ и в оптимальном методе используются только 13 первых коэффициентов. Результаты восстановления представлены на рис. 4. Из рисунка видно, что оптимальный метод $m_a(g)$ восстанавливает функцию f значительно точнее метода $m_1(g)$.

Литература

1. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // *Optimal Estimation in Approximation Theory* / Eds. C. A. Michelli, T. J. Rivlin.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
2. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // *Lecture Notes in Math. Numerical Anal.* Lancaster.—Berlin: Springer-Verlag, 1984.—P. 21–93.
3. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // *Мат. форум. Том 2. Исследования по выпуклому анализу.*—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. Южный федеральный округ).
4. Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // *Мат. заметки.*—1972.—Т. 12, № 4.—С. 465–476.
5. *Osipenko K. Yu., Stessin M. I.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // *Constr. Approx.*—2010.—Vol. 31, № 1.—P. 37–67.
6. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // *Тр. МИАН.*—М.: МАИК, 2010.—Т. 269.—С. 181–192.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // *Функ. анализ и его приложения.*—2010.—Т. 44, № 3.—С. 76–79.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди — Литтлвуда — Поля и восстановление производных по неточной информации // *Докл. АН.*—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.
9. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography.—Stuttgart: John Wiley & Sons, 1986.—222 p.
10. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. Second edition.—New York: Springer-Verlag, 2001.—270 p.

Статья поступила 5 июля 2011 г.

БАГРАМЯН ТИГРАН ЭММАНУИЛОВИЧ
 Российский университет дружбы народов
 аспирант каф. нелинейного анализа и оптимизации
 РОССИЯ, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
 E-mail: mybestzoo@gmail.com

OPTIMAL RECOVERY OF A HARMONIC FUNCTION
 FROM INACCURATE INFORMATION ON THE VALUES
 OF THE RADIAL INTEGRATION OPERATOR

Bagramyan T.

We consider the problem of optimal recovery of a harmonic function in the unit ball from the inaccurate values of the radial integration operator. Information on the values of the operator is given as a function that differs from the exact values in the mean-square metric not more than a fixed error, either in the form of a finite set of Fourier coefficients calculated with a fixed error in the mean square or uniform metric.

Key words: optimal recovery, harmonic function, computerized tomography.