Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 1, С. 22–36

УДК **517.51**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ОПЕРАТОРА РАДИАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Т. Э. Баграмян

В работе рассматривается задача оптимального восстановления гармонической в единичном шаре функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования. Информация о значении оператора задается в виде функции, отличающейся от точного значения в средне квадратичной метрике не более чем на фиксированную величину погрешности, либо в виде конечного набора коэффициентов Фурье, вычисленных с фиксированной погрешностью в средне квадратичной или равномерной метрике.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, гармоническая функция, пространство Харди, компьютерная томография.

В общем случае задача оптимального восстановления состоит в наилучшем приближении значения линейного оператора на некотором множестве по информации, являющейся значениями другого линейного оператора (называемого информационным), заданными с погрешностью в той или иной метрике (см. [1–3]). Во множестве случаев задачи оптимального восстановления операторов сводятся к задачам линейного программирования, впервые появившимся и получившим мощное развитие в работах Л. В. Канторовича, в которых были разработаны эффективные методы решения и анализа таких задач. В случае с задачами оптимального восстановления, соответствующие им задачи линейного программирования удается решить явно из-за небольшого числа присутствующих в них ограничений. В конкретных задачах восстановления в качестве информационного оператора обычно рассматривают линейные функционалы или операторы, сопоставляющие функции ее значения в точках, ее коэффициенты Фурье или просто саму функцию. Подобные задачи рассматривались во многих работах, начиная с [4]. Упомянем лишь некоторые из недавно опубликованных работ на эту тему — [5–8]. В настоящей работе рассматривается оператор, ставящий в соответствие функции множество ее интегралов, взятых вдоль радиусов единичного шара в $\mathbb{R}^d$. Такого рода операторы применяются для моделирования различных томографических процессов и подробно изучаются в теории компьютерной томографии [9]. В теории оптимального восстановления информационные операторы томографического типа рассматривались ранее в [2, пример 3.2].

Рассмотрим пространство h_2 гармонических в шаре $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geqslant 2$, функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{h_2} = \sup_{0 \leqslant r < 1} \|f(r\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}.$$

Следуя [10], будем называть h_2 пространством Харди гармонических функций. Известно представление функций из h_2 в виде разложения в ряд по ортонормированной системе сферических гармоник:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} f_{kl} |x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{1}$$

где

$$N(l,d) = \frac{(2l+d-2)(d+l-3)!}{l!(d-2)!}, \quad l \geqslant 1, \quad N(0,d) = 1.$$

Рассмотрим оператор радиального интегрирования K, определенный равенством

$$Kf(\zeta) = \int_0^1 f(r\zeta)\,dr, \quad \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2}$$

Предположим, что для любой функции $f \in Bh_2 = \{f \in h_2 : \|f\|_{h_2} \leqslant 1\}$ значение Kf известно с некоторой погрешностью, т. е. дана функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такая, что $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta$. Зная функцию g, мы хотим наилучшим образом восстановить функцию f. Воспользуемся тем, что h_2 непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{B}^d)$ и будем искать приближение в этом пространстве. Рассмотрим всевозможные методы восстановления — произвольные отображения $m\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Для каждого m определим величину, называемую погрешностью метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Оптимальным назовем метод, который имеет наименьшую погрешность, т. е. тот, на котором достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m). \tag{3}$$

Теорема 1. *Положим*

$$(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i+d-2}\right), \quad i = 1, 2 \ldots, \tag{4}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}, \tag{5}$$

где число $s \geqslant 0$ таково, что $x_s < \delta^{-2} \leqslant x_{s+1}$. Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{6}$$

где g_{kl} — коэффициенты разложения функции g в ряд Фурье по ортонормированной системе Y_k^l

$$g_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\zeta) Y_k^l(\zeta)\,d\zeta,$$

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1(l+1)^2+\widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl}\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}(l+1)}{\widehat{\lambda}_1(l+1)^2+\widehat{\lambda}_2}\sqrt{\widehat{\lambda}_1(2l+d)+\widehat{\lambda}_2\frac{2l+d}{(l+1)^2}-1}, \tag{7}$$

ϵ_{kl} — *произвольные числа из отрезка* $[-1;1]$, *которые являются оптимальными.*

$\lhd$ С экстремальной задачей (3) тесно связана двойственная к ней задача

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad f \in Bh_2, \quad \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta. \tag{8}$$

Эта связь подробно изучена и описана в [3] и других работах тех же авторов. Нам же потребуется следующее утверждение:

$$E(Bh_2,K,\delta) \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Действительно, если функция f допустима в (8), то функция $-f$ также является допустимой. Поэтому верна цепочка неравенств

$$\sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|m(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

$$\geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \frac{\|m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}+\|-m(0)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}{2} \geqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Таким образом, погрешность оптимального восстановления ограничена снизу значением двойственной задачи. Решив ее, получим явное выражение для этой оценки.

Из (1) следует

$$Kf(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}}{l+1}Y_k^l(\zeta). \tag{9}$$

Используя (1), (2), (9) и равенство Парсеваля, получим следующие формулы:

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d},$$

$$\|f\|^2_{h_2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2,$$

$$\|Kf\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2}.$$

Введем обозначение

$$b_l = \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2.$$

Тогда задача (8) может быть переписана в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{(l+1)^2} \leqslant \delta^2, \quad b_l \geqslant 0 \tag{10}$$

(для удобства мы рассматриваем квадраты функционала и ограничений). Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b,\lambda_1,\lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2\delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{(l+1)^2}\left(\lambda_1(l+1)^2 + \lambda_2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d}\right), \quad b = (b_0, b_1, \ldots).$$

Множество точек $\{(x_i, y_i) : i \geqslant 0\}$, определенное в (4), лежит на графике функции $y = \frac{x}{2\sqrt{x}+d-2}$, которая является вогнутой при $x \geqslant 0$. Отсюда следует, что все это множество лежит под прямой, соединяющей соседние точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) (см. рис. 1). Прямая, соединяющая точки (x_s, y_s) и (x_{s+1}, y_{s+1}), имеет вид $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ определены в (5). Тогда $y_i \leqslant \widehat{\lambda}_1 x_i + \widehat{\lambda}_2$, $i \geqslant 0$. Подставляя $i = l+1$, получим

$$\frac{(l+1)^2}{2l+d} \leqslant \widehat{\lambda}_1(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2,$$

откуда следует, что $L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2$.

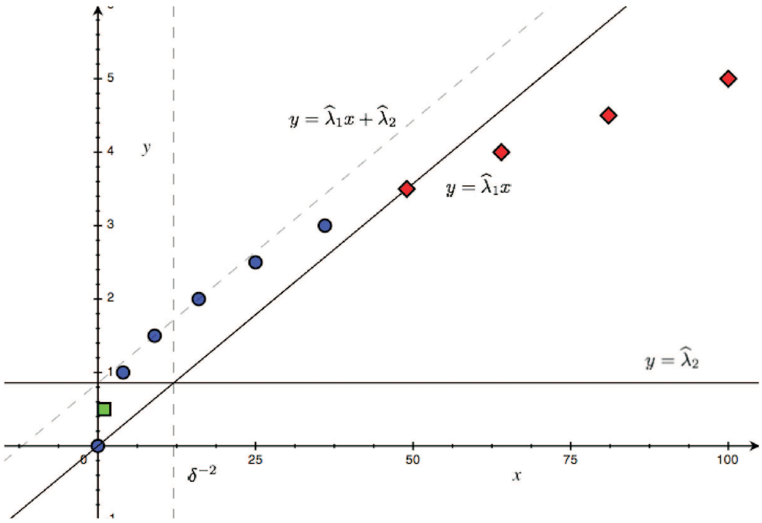

Рис. 1. На рисунке изображено множество точек $\{(x_l, y_l) \,|\, l \geqslant 0\}$, при $\delta^{-2} = 12$, $d = 2$. Точки, изображенные квадратом, соответствуют тем значениям l, для которых можно положить $a_{kl-1} = 1$, $k = 1, \ldots, N(l,d)$, ромбом — тем l, для которых $a_{kl-1} = 0$, $k = 1, \ldots, N(l,d)$.

Пусть $x_s < \delta^{-2} \leqslant x_{s+1}$. Тогда определены неотрицательные числа

$$\widehat{b}_s = x_s\frac{\delta^2 x_{s+1} - 1}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{b}_{s+1} = x_{s+1}\frac{1 - \delta^2 x_s}{x_{s+1} - x_s}.$$

Положим $\widehat{b}_i = 0$, при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор $\widehat{b}$ допустимый в (10), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b}_l - 1\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2\right) = 0 \qquad (11)$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2. \qquad (12)$$

В силу того, что $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geqslant 0$, верно неравенство

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \leqslant -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d},$$

откуда

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \leqslant \min_{\substack{b_l \geqslant 0, \\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \leqslant \delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d}.$$

Но из (11), (12) следует

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d}.$$

Таким образом,

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\widehat{b}_l}{2l+d} \leqslant \min_{\substack{b_l \geqslant 0, \\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \leqslant \delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d},$$

означает, что набор $\widehat{b}$ является точкой максимума в задаче (10). Решение этой задачи равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$, а решение задачи (8), соответственно, — $\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$.

Итак, мы оценили погрешность оптимального восстановления снизу $E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$. Покажем теперь, что на самом деле в этой оценке выполнено равенство.

Рассмотрим метод m_a, определенный в (6). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ (эквивалентно $s = 0$ или $\delta \geqslant 1$) из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta}} \|m_0(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sup_{f \in Bh_2} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$, используя (1), имеем

$$\begin{aligned}\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l+d} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{\left(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl} - 1)\right)^2}{2l+d}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ к векторам

$$x = \left(\frac{a_{kl}(l+1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \frac{a_{kl} - 1}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\right), \quad y = \left(\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\Big(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\Big), \sqrt{\widehat{\lambda}_1} f_{kl}\right),$$

получим

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl} - 1)^2}{\widehat{\lambda}_1}\right)\left(\widehat{\lambda}_2\Big(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\Big)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right).$$

Введем обозначение

$$A_{kl} = \frac{1}{2l+d}\left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1}\right). \tag{13}$$

Тогда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|m(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl}\left(\widehat{\lambda}_2\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right).$$

Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl}\leqslant 1$, откуда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 \leqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \left(\widehat{\lambda}_2\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right) \leqslant \widehat{\lambda}_2\delta^2 + \widehat{\lambda}_1.$$

Таким образом, мы получили, что оценки снизу и сверху для величины $E(Bh_2, K, \delta)$ совпадают. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы

$$\sqrt{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2} = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|f\|_{L_2(B^d)} \leqslant E(Bh_2,K,\delta) \leqslant e(Bh_2,K,\delta,m_a) \leqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2}. \ \rhd$$

Определенный в теореме 1 набор коэффициентов (a_{kl}) является фильтром, определяющим значение каждой гармоники в восстановлении функции f. Заметим, что при $\delta\geqslant 1$ погрешность оптимального восстановления становится равной $\sqrt{\frac{1}{d}}$, а оптимальным оказывается метод $m_0(g)=0$. Покажем, что в зависимости от величины погрешности δ некоторые гармоники не нуждаются в фильтрации, а другие вовсе можно не учитывать.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда можно положить* $a_{kl}=0$ *при* $\frac{1}{2l+d}\leqslant\widehat{\lambda}_1$ *и* $a_{kl}=1$ *при* $\frac{(l+1)^2}{2l+d}\leqslant\widehat{\lambda}_2$.

$\lhd$ Подставляя $a_{kl}=0$ и $a_{kl}=1$ в (13), получаем, что условие $A_{kl}\leqslant 1$ эквивалентно, соответственно, условиям $\frac{1}{2l+d}\leqslant\widehat{\lambda}_1$ и $\frac{(l+1)^2}{2l+d}\leqslant\widehat{\lambda}_2$. $\rhd$

Приведенное следствие означает, что, начиная с некоторой степени, все гармоники большего порядка не влияют на погрешность восстановления и коэффициент перед ними можно взять равным нулю. Также все гармоники, степень которых не превосходит определенного значения, не нуждаются в фильтрации и коэффициент может быть выбран равным единице. С ростом погрешности измерения δ число ненулевых коэффициентов в наборе a уменьшается, пока они все не становятся равными нулю при $\delta\geqslant 1$. При уменьшении погрешности измерения δ увеличивается число гармоник, не нуждающихся в фильтрации, а оптимальный метод m_a переходит в точную формулу восстановления

$$m_1(g) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} (l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Сказанное проиллюстрировано на рис. 1. На рис. 2 указаны области значений фильтра a, при которых метод $m_a(g)$ является оптимальным. Видно, для каких l значение a_{kl}, $k=1,\ldots,N(l,d)$, может быть взято равным 1 или 0.

Решая задачу оптимального восстановления функции f по неточно заданному значению оператора K, мы считали, что информация, которой мы владеем есть функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, удовлетворяющая условию $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta$. В действительности, мы сразу перешли от функций f и g к рассмотрению их рядов Фурье и далее работали лишь с наборами коэффициентов Фурье $\{f_{kl}\}$ и $\{g_{kl}\}$. Предположим теперь, что вместо всего множества $\{g_{kl}\}$ нам известно лишь конечное число первых его элементов. Получим следующую задачу. Пусть для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l,d)$ такой, что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{kl} - g_{kl}|^2 \leqslant \delta^2,$$

где

$$Kf_{kl} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} Kf(\zeta) Y_k^l(\zeta)\, d\zeta.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \leqslant \delta^2}} \|m(g) - f\|_{L_2(B^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m : \mathbb{R}^q \to L_2(B^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

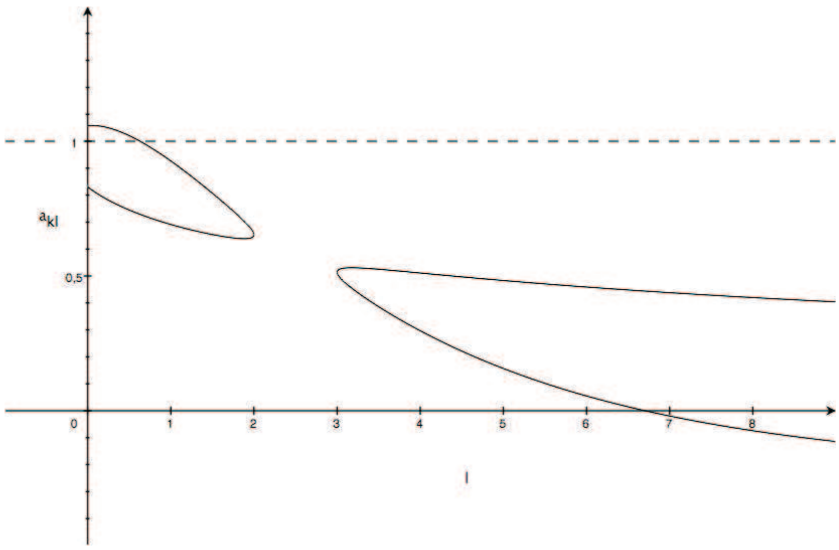

Рис. 2. На рисунке изображена область возможных значений фильтра a_{kl}, $k = 1, \ldots, N(l,d)$, в зависимости от параметра l, при $\delta^{-2} = 12$, $d = 2$.

Теорема 2. *Положим*

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, \quad s_N = \min\left\{s \geqslant 0 : \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} \geqslant \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}\right\},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s} \quad \text{при} \;\; x_s < \delta^{-2} < x_{s+1},\; 0 \leqslant s < s_N, \tag{14}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = y_{s_N} - x_{s_N}\widehat{\lambda}_1 \quad \text{при} \;\; \delta^{-2} \geqslant x_{s_N}. \tag{15}$$

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1) g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{16}$$

где a_{kl}, *определенные равенствами* (7), *являются оптимальными.*

$\lhd$ Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad f \in Bh_2, \quad \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk}|^2 \leqslant \delta^2. \tag{17}$$

Аналогично доказательству теоремы 1, получим оценку снизу

$$E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sup_{\substack{f \in Bh_2,\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}|^2 \leqslant \delta^2}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений, используя (9) и обозначение $b_l = \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2$, перепишем задачу (17) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leqslant 1, \quad \sum_{l=0}^{N-1} \frac{b_l}{(l+1)^2} \leqslant \delta^2, \quad b_l \geqslant 0. \tag{18}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2\delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2}\left(\lambda_1(l+1)^2 + \chi^N(l)\lambda_2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d}\right),$$

где $\chi^N(l)$ — характеристическая функция множества $\{0, \ldots, N-1\}$, $b = (b_0, b_1, \ldots)$.

Рассмотрим два случая.

Пусть $x_s < \delta^{-2} < x_{s+1}$, $s < s_N$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (14). Следуя тем же рассуждениям, что и в доказательстве теоремы 1, получим $y_{j+1} \leqslant \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2$, $j \leqslant N-1$. При $j \geqslant N$, имеем

$$\widehat{\lambda}_1 x_{j+1} - y_{j+1} = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s} x_{j+1} - y_{j+1} \geqslant \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} x_{j+1} - y_{j+1} \geqslant 0.$$

Таким образом, выполнено неравенство $L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2$. Положим

$$\widehat{b}_s = x_s \frac{\delta^2 x_{s+1} - 1}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{b}_{s+1} = x_{s+1} \frac{1 - \delta^2 x_s}{x_{s+1} - x_s},$$

$\widehat{b}_i = 0$ при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор $\widehat{b}$ допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b}_l - 1\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\sum_{l=0}^{N-1}\frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2\right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

Отсюда (аналогично доказательству теоремы 1) следует, что $\widehat{b}$ доставляет максимум в задаче (18), что означает

$$E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Пусть $\delta^{-2} \geqslant x_{s_N}$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (15), так что прямая $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$ проходит через точку (x_{s_N}, y_{s_N}) параллельно прямой $y = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}x$. Тогда при $0 \leqslant j \leqslant s_N - 1$ имеем

$$y_{j+1} \leqslant \frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}}x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N}\frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей (x_{s_N-1}, y_{s_N-1}) и (x_{s_N}, y_{s_N})), откуда

$$y_{j+1} \leqslant y_{s_N} - \frac{y_{s_N} - y_{s_N-1}}{x_{s_N} - x_{s_N-1}}(x_{s_N} - x_{j+1}) \leqslant y_{s_N} - \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}(x_{s_N} - x_{j+1}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

При $s_N \leqslant j \leqslant N - 1$ выполнено

$$y_{j+1} \leqslant \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}}x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N}\frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей (x_{s_N}, y_{s_N}) и (x_{s_N+1}, y_{s_N+1})), откуда

$$y_{j+1} \leqslant y_{s_N} + \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}}(x_{j+1} - x_{s_N}) \leqslant y_{s_N} + \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}(x_{j+1} - x_{s_N}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

Если $j > N$, то

$$\widehat{\lambda}_1 x_j - y_j = x_j\left(\frac{1}{2N + d - 2} - \frac{1}{2j + d - 2}\right) > 0.$$

Таким образом, выполнено

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

Положим $\widehat{b}_i = 0$, $i \notin \{s_N - 1, N\}$, $\widehat{b}_{s_N-1} = \delta^2 x_{s_N}$, $\widehat{b}_N = 1 - \delta^2 x_{s_N}$. Тогда набор $\widehat{b}$ допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b}_l - 1\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\sum_{l=0}^{N-1}\frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2\right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geqslant 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

Отсюда $E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$.

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a, определенный в (16). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\leqslant\delta^2}} \|m_0(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sup_{f\in Bh_2}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$ имеем

$$\|m_a(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl}-f_{kl})^2}{2l+d} + \sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d}$$

$$= \sum_{l=N-1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{\big(a_{kl}(l+1)(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1})+f_{kl}(a_{kl}-1)\big)^2}{2l+d} + \sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d}.$$

Аналогично теореме 1 применим неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|m_a(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl}\bigg(\widehat{\lambda}_2\Big(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\Big)^2+\widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\bigg) + \sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где A_{kl} определено в (13). Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl} \leqslant 1$. Заметим также, что $\frac{1}{2N+d} \leqslant \widehat{\lambda}_1$ и потому $\frac{1}{2l+d} \leqslant \widehat{\lambda}_1$ при $l \geqslant N$. Тогда

$$e(Bh_2,K,\delta,m_a)^2 = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\leqslant\delta^2}} \|m(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

$$\leqslant \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\leqslant\delta^2}} \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_2\Big(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\Big)^2 + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2 \leqslant \widehat{\lambda}_2\delta^2+\widehat{\lambda}_1. \ \triangleright$$

В рассмотренном выше случае мы располагали неточной информацией о конечном наборе первых коэффициентов Фурье функции Kf, причем отличие этой информации от точной мы измеряли в метрике l_2. Пусть теперь нам дан набор чисел $\{\delta_{kl} \geqslant 0 : l = 0,\dots,N-1,\ k = 1,\dots,N(l,d)\}$, характеризующий неточность информации для каждого коэффициента g_{kl} в отдельности, т. е. для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l,d)$ такой, что

$$|Kf_{kl}-g_{kl}| \leqslant \delta_{kl}, \quad l = 0,\dots,N-1, \quad k = 1,\dots,N(l,d).$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2,K,\delta,m) = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ |Kf_{kl}-g_{kl}|\leqslant\delta_{kl}}} \|m(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2,K,\delta) = \inf_{m:\mathbb{R}^q\to L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2,K,\delta,m).$$

Теорема 3. *Положим*

$$p = \max\left\{0 \leqslant p \leqslant N-1 : \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 \leqslant 1\right\},$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat{\lambda}(l+1)^2, \quad l = 0,\ldots,p,\ k = 1,\ldots,N(l,d), \tag{19}$$

при $\delta_{10} \leqslant 1$, *или*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = 0, \quad l = 0,\ldots,p,\ k = 1,\ldots,N(l,d), \tag{20}$$

при $\delta_{10} > 1$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda} + \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2}.$$

Метод

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{21}$$

где

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_{kl}}{\widehat{\lambda}(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_{kl}}, \tag{22}$$

является оптимальным.

$\lhd$ Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{gathered} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad f \in Bh_2, \quad |Kf_{kl}| \leqslant \delta_{kl}, \\ l = 0,\ldots,N-1, \quad k = 1,\ldots,N(l,d). \end{gathered} \tag{23}$$

Имеем оценку снизу

$$E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sup_{\substack{f \in Bh_2,\\ |Kf_{kl}| \leqslant \delta_{kl}}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений и используя (9), перепишем задачу (23) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2 \leqslant 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \leqslant \delta_{kl}^2, \tag{24}$$

$$l = 0,\ldots,N-1, \quad k = 1,\ldots,N(l,d).$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} L(f,\bar{\lambda}) = -\lambda - \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl}\delta_{kl}^2 + \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2}\left(\lambda(l+1)^2 + \lambda_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d}\right) \\ + \sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2}\left(\lambda(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d}\right), \end{aligned}$$

где $\bar{\lambda} = \{\lambda, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{N(l,d)N-1}\}$.

Пусть $\delta_{10} \leqslant 1$, возьмем

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = \begin{cases} \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat{\lambda}(l+1)^2, & l \leqslant p, \\ 0, & p < l \leqslant N-1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\widehat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} \geqslant 0, \quad l \leqslant p.$$

Тогда при $l \leqslant p$

$$\widehat{\lambda}(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = 0.$$

При $l > p$

$$\widehat{\lambda}(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$L(b, \widehat{\bar{\lambda}}) \geqslant -\widehat{\lambda} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl} \delta_{kl}^2 = -\widehat{\lambda} - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl} \delta_{kl}^2.$$

Положим

$$\widehat{f}_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl}(l+1), & l \leqslant p, \\ \sqrt{1 - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2}, & l = p+1, \\ 0, & l > p+1. \end{cases}$$

Функция $\widehat{f}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{f}_{kl} |x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right)$ допустима в (24), так как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |\widehat{f}_{kl}|^2 = 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} - \delta_{kl}^2 = 0, \quad l \leqslant p, \ k = 1, \ldots, N(l,d).$$

Если $p < N-1$, то

$$\frac{|f_{kp+1}|^2}{(p+2)^2} \leqslant \delta_{kp+1}^2,$$

так как в противном случае имели бы $\sum_{l=0}^{p+1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 < 1$, что противоречит определению p. Тогда

$$\widehat{\lambda}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |\widehat{f}_{kl}|^2 - 1\right) + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \left(\frac{|\widehat{f}_{kl}|}{(l+1)^2} - \delta_{kl}^2\right) = 0$$

и

$$L(\widehat{f}, \widehat{\bar{\lambda}}) = -\widehat{\lambda} - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2 = -\widehat{\lambda} - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2.$$

Следовательно,

$$E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sqrt{\widehat{\lambda} + \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2}.$$

Пусть $\delta_{10} > 1$. Положим $\widehat{\widehat{\lambda}} = (\frac{1}{d}, 0, \ldots, 0)$. Тогда, очевидно,

$$L(f, \widehat{\widehat{\lambda}}) \geqslant -\frac{1}{d}.$$

Функция $\widehat{f}(x) = Y_1^0\big(\frac{x}{|x|}\big)$ допустима в (24), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости и $L(\widehat{f}, \widehat{\widehat{\lambda}}) = -\frac{1}{d}$, откуда следует

$$E(Bh_2, K, \delta) \geqslant \sqrt{\frac{1}{d}}.$$

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a, определенный в (21). При $\widehat{\lambda}_{kl} = 0$ из (22) следует, что $a_{kl} = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2,\\ |Kf_{kl} - g_{kl}| \leqslant \delta_{kl}}} \|m_0(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sup_{f \in Bh_2} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}.$$

В противном случае, имеем

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{\big(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl}\big)^2}{2l+d} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d}$$
$$= \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{\big(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl} - 1)\big)^2}{2l+d} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d}.$$

Аналогично теореме 1 применим неравенство Коши — Буняковского. Получим

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leqslant \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl}\bigg(\widehat{\lambda}_{kl}\Big(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\Big)^2 + \widehat{\lambda} f_{kl}^2\bigg) + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где

$$A_{kl} = \frac{1}{2l+d}\bigg(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_{kl}} + \frac{(a_{kl} - 1)^2}{\widehat{\lambda}}\bigg).$$

Равенства (22) эквивалентны равенствам $A_{kl} = 1$. Заметим также, что $\frac{1}{2l+d} \leqslant \widehat{\lambda}$, при $l \geqslant p + 1$. Тогда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 = \sup_{\substack{f \in Bh_2,\\ |Kf_{lk}| \leqslant \delta_{kl}}} \|m(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$
$$\leqslant \sup_{\substack{f \in Bh_2,\\ |Kf_{lk}| \leqslant \delta_{kl}}} \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl}\Big(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\Big)^2 + \sum_{l=p+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda} f_{kl}^2 \leqslant \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl} \delta_{kl}^2 + \widehat{\lambda}. \ \triangleright$$

Если разложение функции f состоит только из гармоник степени не более $N - 1$, то при стремлении $\max \delta_{kl} \to 0$ оптимальный метод $m_a(g)$ переходит в точную формулу

$$m_1(g) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} (l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l\bigg(\frac{x}{|x|}\bigg).$$

Заметим, что величина p определяет, какое количество информации достаточно знать для оптимального восстановления, так как при $p < N-1$ мы не используем коэффициенты $\{g_{kl}\}$, $l = p, \ldots, N-1$. Более того, исключение лишней информации и применение фильтра a позволяет существенно улучшить результат восстановления, по сравнению с методом $m_1(g)$.

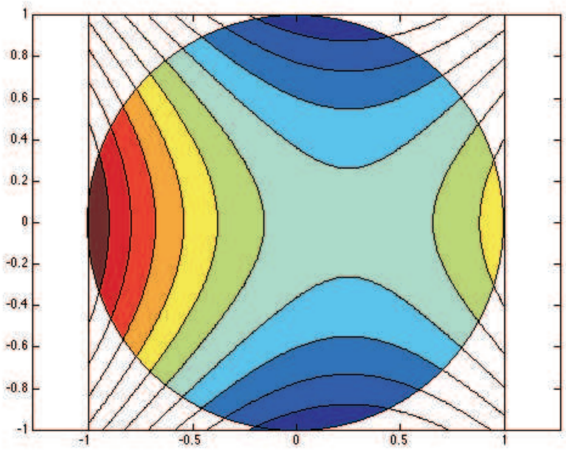

Рис. 3. Линии уровня функции $f(z) = \sqrt{\frac{4}{5\pi}}\,\mathrm{Re}\, z(z-\frac{1}{2})$.

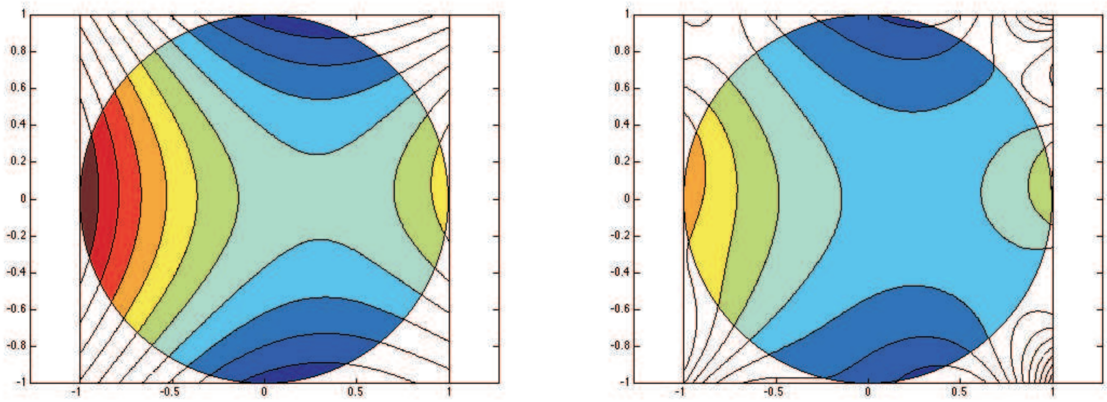

Рис. 4. Слева — результат восстановления оптимальным методом $m_a(g)$, справа — методом $m_1(g)$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{\frac{4}{5\pi}}\,\mathrm{Re}\, z(z-\frac{1}{2})$, гармоническую в круге $\mathbb{B}^2$, для которой $\|f\|_{h_2} = 1$ (рис. 3). Пусть $N = 10$, т. е. известны $\sum_{l=0}^{9} N(l,2) = 19$ первых коэффициентов Фурье функции Kf, заданных с погрешностями

$$(\delta_{kl}) = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,01 & 0,001 & 0,02 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,2 & 0,2 & 0,01 \\ & 0,01 & 0,001 & 0,02 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,2 & 0,2 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, $p = 6$ и в оптимальном методе используются только 13 первых коэффициентов. Результаты восстановления представлены на рис. 4. Из рисунка видно, что оптимальный метод $m_a(g)$ восстанавливает функцию f значительно точнее метода $m_1(g)$.

Литература

1. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Michelli, T. J. Rivlin.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
2. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Math. Numerical Anal. Lancaster.—Berlin: Springer-Verlag, 1984.—P. 21–93.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Мат. форум. Том 2. Исследования по выпуклому анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—С. 158–192.—(Итоги науки. Южный федеральный округ).
4. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, № 4.—С. 465–476.
5. *Osipenko K. Yu., Stessin M. I.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx.—2010.—Vol. 31, № 1.—P. 37–67.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информаци // Тр. МИАН.—М.: МАИК, 2010.—Т. 269.—С. 181–192.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анализ и его приложения.—2010.—Т. 44, № 3.—С. 76–79.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. АН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.
9. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography.—Stuttgart: John Wiley & Sons, 1986.—222 p.
10. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. Second edition.—New York: Springer-Verlag, 2001.—270 p.

Статья поступила 5 июля 2011 г.

Баграмян Тигран Эммануилович
Российский университет дружбы народов
аспирант каф. нелинейного анализа и оптимизации
РОССИЯ, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: `mybestzoo@gmail.com`

OPTIMAL RECOVERY OF A HARMONIC FUNCTION FROM INACCURATE INFORMATION ON THE VALUES OF THE RADIAL INTEGRATION OPERATOR

Bagramyan T.

We consider the problem of optimal recovery of a harmonic function in the unit ball from the inaccurate values of the radial integration operator. Information on the values of the operator is given as a function that differs from the exact values in the mean-square metric not more than a fixed error, either in the form of a finite set of Fourier coefficients calculated with a fixed error in the mean square or uniform metric.

Key words: optimal recovery, harmonic function, computerized tomography.