

УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.В. ВВЕДЕНСКАЯ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального восстановления решения системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с самосопряженной матрицей постоянных коэффициентов по неточно заданным значениям решения в два момента времени.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что решение задачи (1) известно с некоторыми погрешностями в моменты $t = 0$ и $t = T$. Требуется восстановить решение в момент τ , $0 < \tau < T$. При этом

$$\begin{aligned} \|x_0 - \tilde{x}_0\| &\leq \delta_0, \\ \|x(T) - \tilde{x}_T\| &\leq \delta_T. \end{aligned}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n , $\delta_0, \delta_T > 0$. Зная векторы \tilde{x}_0 и \tilde{x}_T , надо по возможности точнее определить приближенное значение вектора $x(\tau)$.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что заранее мы не требуем каких-либо дополнительных свойств этих отображений, например, непрерывности или линейности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №07-01-90102).

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e_\tau(\delta_0, \delta_T, \varphi) = \sup_{\substack{x_0, \tilde{x}_0, \tilde{x}_T \in \mathbb{R}^n \\ \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta_0 \\ \|x(T) - \tilde{x}_T\| \leq \delta_T}} \|x(\tau) - \varphi(\tilde{x}_0, \tilde{x}_T)\|.$$

Погрешностью оптимального восстановления будем называть величину

$$E_\tau(\delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n} e_\tau(\delta_0, \delta_T, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом восстановления. Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления.

В основе решения сформулированной задачи лежит метод оптимального восстановления линейных операторов, изложенный в работах [1] и [2] (см. также [3]). Центральным моментом в этом методе является сведение исходной задачи к некоторой экстремальной задаче с ограничениями, сводящейся в рассматриваемом случае к задаче линейного программирования, которую удается точно решить с помощью принципа Лагранжа снятия ограничений. Для задач оптимального восстановления решений уравнений в частных производных этот метод применялся в работах [4]–[6].

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$$

— собственные числа матрицы A и r_k — кратность собственного числа μ_k , $k = 1, \dots, m$. Обозначим через $\{e_{k,j}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению μ_k . Тогда система векторов

$$e_{11}, \dots, e_{1r_1}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в \mathbb{R}^n .

Положим

$$(2) \quad \begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \begin{cases} \frac{e^{2\mu_{i+1}(T-\tau)} - e^{2\mu_i(T-\tau)}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}(e^{2\mu_{i+1}T} - e^{2\mu_iT})}, & \delta_0 e^{\mu_i T} \leq \delta_T < \delta_0 e^{\mu_{i+1}T}, \\ e^{2\mu_m \tau}, & \delta_T \geq \delta_0 e^{\mu_m T}, \\ 0, & \delta_T < \delta_0 e^{\mu_1 T}. \end{cases} & i = 1, \dots, m-1, \\ \widehat{\lambda}_2 &= \begin{cases} \frac{e^{-2\mu_i \tau} - e^{-2\mu_{i+1} \tau}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}(e^{2\mu_{i+1}T} - e^{2\mu_iT})}, & \delta_0 e^{\mu_i T} \leq \delta_T < \delta_0 e^{\mu_{i+1}T}, \\ 0, & \delta_T \geq \delta_0 e^{\mu_m T}, \\ e^{-2\mu_1(T-\tau)}, & \delta_T < \delta_0 e^{\mu_1 T}. \end{cases} & i = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

Теорема 1. Для погрешности оптимального восстановления решения задачи (1) в момент τ справедливо равенство

$$E_\tau(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

при этом метод

$$(3) \quad \widehat{\varphi}(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T) = \sum_{k=1}^m e^{\mu_k \tau} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 \widetilde{x}_{0kj} + \widehat{\lambda}_2 \widetilde{x}_{Tkj} e^{\mu_k T}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_k T}} e_{kj},$$

где \widetilde{x}_{0kj} и \widetilde{x}_{Tkj} — координаты векторов \widetilde{x}_0 и \widetilde{x}_T

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_0 &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{x}_{0kj} e_{kj}, \\ \widetilde{x}_T &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{x}_{Tkj} e_{kj}, \end{aligned}$$

является оптимальным.

Доказательство. С исходной задачей восстановления тесно связана так называемая двойственная экстремальная задача

$$(4) \quad \|x(\tau)\|^2 \rightarrow \max, \quad \|x_0\|^2 \leq \delta_0^2, \quad \|x(T)\|^2 \leq \delta_T^2,$$

где $x(\cdot)$ — решение задачи (1). Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = -\|x(\tau)\|^2 + \lambda_1 \|x_0\|^2 + \lambda_2 \|x(T)\|^2.$$

Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, что для допустимого в задаче (4) элемента \widehat{x}_0 выполнены условия

$$\begin{aligned} (a) \quad & \min_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{x}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2), \\ (b) \quad & \widehat{\lambda}_1 (\|\widehat{x}_0\|^2 - \delta_0^2) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 (\|\widehat{x}(T)\|^2 - \delta_T^2) = 0, \end{aligned}$$

то \widehat{x}_0 — решение задачи (4), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2$. Если при этом для всех $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T \in \mathbb{R}^n$ существует решение $y_0 = y_0(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)$ экстремальной задачи

$$(5) \quad \widehat{\lambda}_1 \|x_0 - \widetilde{x}_0\|^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x(T) - \widetilde{x}_T\|^2 \rightarrow \min, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$E_\tau(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T) = \widetilde{x}(\tau),$$

где $\widetilde{x}(\cdot)$ — решение задачи (1) с начальным условием y_0 , является оптимальным.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^m e^{\mu_k t} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тем самым функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} (-e^{2\mu_k \tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{2\mu_k T}) c_{kj}^2.$$

Положив

$$b_k = \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2,$$

приходим к виду

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^m e^{2\mu_k \tau} (-1 + \lambda_1 e^{-2\mu_k \tau} + \lambda_2 e^{2\mu_k(T-\tau)}) b_k.$$

Легко убедиться, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ функция

$$g(z) = -1 + \lambda_1 e^{-2z\tau} + \lambda_2 e^{2z(T-\tau)}$$

выпукла при $z \in \mathbb{R}$, поэтому, если $g(\mu_i) = 0$ и $g(\mu_{i+1}) = 0$ при каком-либо $1 \leq i \leq m-1$, то для всех k , $1 \leq k \leq m$, справедливы неравенства $g(\mu_k) \geq 0$. Пусть $1 \leq i \leq m-1$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условий $g(\mu_i) = g(\mu_{i+1}) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 e^{-2\mu_i \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_i(T-\tau)} &= 1, \\ \widehat{\lambda}_1 e^{-2\mu_{i+1} \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_{i+1}(T-\tau)} &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \frac{e^{2\mu_{i+1}(T-\tau)} - e^{2\mu_i(T-\tau)}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}(e^{2\mu_{i+1}T} - e^{2\mu_i T})}, \\ \widehat{\lambda}_2 &= \frac{e^{-2\mu_i \tau} - e^{-2\mu_{i+1} \tau}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}(e^{2\mu_{i+1}T} - e^{2\mu_i T})}. \end{aligned}$$

Положим $\widehat{b}_k = 0$ при $k \neq i, i+1$, а \widehat{b}_i и \widehat{b}_{i+1} выберем из условия, чтобы для элемента

$$\widehat{x}_0 = \sqrt{\widehat{b}_i} e_{i1} + \sqrt{\widehat{b}_{i+1}} e_{i+1,1}$$

были выполнены равенства (b). Тогда \widehat{b}_i и \widehat{b}_{i+1} определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}\widehat{b}_i + \widehat{b}_{i+1} &= \delta_0^2 \\ \widehat{b}_i e^{2\mu_i T} + \widehat{b}_{i+1} e^{2\mu_{i+1} T} &= \delta_T^2.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{b}_i &= \frac{\delta_0^2 e^{2\mu_{i+1} T} - \delta_T^2}{e^{2\mu_{i+1} T} - e^{2\mu_i T}}, \\ \widehat{b}_{i+1} &= \frac{\delta_T^2 - \delta_0^2 e^{2\mu_i T}}{e^{2\mu_{i+1} T} - e^{2\mu_i T}}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{\delta_T}{\delta_0} \in [e^{\mu_i T}, e^{\mu_{i+1} T}).$$

Тогда очевидно, что $\widehat{b}_i \geq 0$ и $\widehat{b}_{i+1} \geq 0$. Тем самым для элемента \widehat{x}_0 выполнены равенства (b). Кроме того, $\mathcal{L}(\widehat{x}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$, а $\mathcal{L}(x_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0$. Следовательно, условие (a) тоже выполнено. При $\delta_T < \delta_0 e^{\mu_1 T}$ положим $\widehat{b}_1 = \delta_T^2 e^{-2\mu_1 T}$, $\widehat{b}_k = 0$, $2 \leq k \leq m$, а при $\delta_T \geq \delta_0 e^{\mu_m T}$ положим $\widehat{b}_m = \delta_0^2$, $\widehat{b}_k = 0$, $1 \leq k \leq m-1$. Тогда для соответствующих $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ и \widehat{x}_0 легко убедиться в выполнении условий (a) и (b).

Решим теперь задачу (5), которая имеет вид

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} \left(\widehat{\lambda}_1 (c_{kj} - \widetilde{x}_{0kj})^2 + \widehat{\lambda}_2 (c_{kj} e^{\mu_k T} - \widetilde{x}_{Tkj})^2 \right) \rightarrow \min, \quad c_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются

$$c_{kj} = \frac{\widehat{\lambda}_1 \widetilde{x}_{0kj} + \widehat{\lambda}_2 \widetilde{x}_{Tkj} e^{\mu_k T}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_k T}}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r_k.$$

Тем самым

$$y_0 = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 \widetilde{x}_{0kj} + \widehat{\lambda}_2 \widetilde{x}_{Tkj} e^{\mu_k T}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_k T}} e_{kj},$$

а решение задачи (1) с начальным условием y_0 в момент времени τ имеет вид

$$\sum_{k=1}^m e^{\mu_k \tau} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 \widetilde{x}_{0kj} + \widehat{\lambda}_2 \widetilde{x}_{Tkj} e^{\mu_k T}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_k T}} e_{kj},$$

что и является оптимальным методом восстановления. \square

Предположим теперь, что нам известны лишь приближенные данные \widetilde{x}_T с погрешностью δ_T о решении в момент времени T , а о начальном значении решения известна априорная информация в

виде ограничения $\|x_0\| \leq \delta_0$. Требуется восстановить значение решения в момент времени τ , $0 < \tau < T$. Погрешностью оптимального восстановления в этой задаче будем называть величину

$$(6) \quad E_\tau^T(\delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x_0, \tilde{x}_T \in \mathbb{R}^n \\ \|x_0\| \leq \delta_0 \\ \|x(T) - \tilde{x}_T\| \leq \delta_T}} \|x(\tau) - \varphi(0, \tilde{x}_T)\|.$$

Можно рассмотреть также задачу об оптимальном восстановлении в момент времени τ решения задачи (1) по приближенным значениям в начальный момент времени \tilde{x}_0 , заданным с погрешностью δ_0 , и априорной информации в виде ограничения в правом конце $\|x(T)\| \leq \delta_T$. Здесь погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$(7) \quad E_\tau^0(\delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta_0 \\ \|x(T)\| \leq \delta_T}} \|x(\tau) - \varphi(\tilde{x}_0, 0)\|.$$

Методы, на которых достигается нижняя грань в задачах (6) и (7), называются оптимальными для соответствующих задач.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$E_\tau^T(\delta_0, \delta_T) = E_\tau^0(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

где $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ определены равенствами (2), при этом метод $\hat{\varphi}(0, \tilde{x}_T)$ является оптимальным для задачи (6), а метод $\hat{\varphi}(\tilde{x}_0, 0)$ — оптимальным для задачи (7) ($\hat{\varphi}$ определяется равенством (3)).

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для задачи (6). Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что двойственная экстремальная задача совпадает в этом случае с задачей (4), а метод $\tilde{x}(\tau)$, где $\tilde{x}(\cdot)$ — решение задачи (1) с начальным условием, определяемым из задачи

$$(8) \quad \hat{\lambda}_1 \|x_0\|^2 + \hat{\lambda}_2 \|x(T) - \tilde{x}_T\|^2 \rightarrow \min, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

является оптимальным. Очевидно, что этот метод есть не что иное, как $\hat{\varphi}(0, \tilde{x}_T)$. Утверждение теоремы для задачи (7) доказывается аналогичным образом. \square

В заключении выпишем в более подробном виде оптимальный метод восстановления для задачи (6). При $\delta_T \geq \delta_0 e^{\mu_m T}$

$$\hat{\varphi}(0, \tilde{x}_T) = 0.$$

Этот случай соответствует слишком большой погрешности в наблюдаемых данных, которая не дает возможности воспользоваться этими данными. При $\delta_T < \delta_0 e^{\mu_1 T}$

$$\hat{\varphi}(0, \tilde{x}_T) = \sum_{k=1}^m e^{\mu_k(\tau-T)} \sum_{j=1}^{r_k} \tilde{x}_{Tkj} e_{kj}.$$

Этот случай соответствует слишком большой погрешности в априорных данных. Наконец, в промежуточных случаях, когда $\delta_0 e^{\mu_i T} \leq \delta_T < \delta_0 e^{\mu_{i+1} T}$, $i = 1, \dots, m - 1$, имеем

$$\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T) = \sum_{k=1}^m e^{\mu_k(\tau-T)} \sum_{j=1}^{r_k} (\widehat{\lambda}_1 / \widehat{\lambda}_2 + e^{2\mu_k T})^{-1} \widetilde{x}_{Tkj} e_{kj}.$$

Автор выражает благодарность проф. К. Ю. Осипенко за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.
- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [3] Осипенко К. Ю. Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.
- [5] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.
- [6] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 803–815.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО