УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.В. ВВЕДЕНСКАЯ

Аннотация. Рассматривается задача оптимального восстановления решения системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с самосопряженной матрицей постоянных коэффициентов по неточно заданным значениям решения в два момента времени.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что решение задачи (1) известно с некоторыми погрешностями в моменты $t = 0$ и $t = T$. Требуется восстановить решение в момент τ, $0 < \tau < T$. При этом

$$\|x_0 - \widetilde{x}_0\| \leq \delta_0,$$
$$\|x(T) - \widetilde{x}_T\| \leq \delta_T.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $\delta_0, \delta_T > 0$. Зная векторы $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{x}_T$, надо по возможности точнее определить приближенное значение вектора $x(\tau)$.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что заранее мы не требуем каких-либо дополнительных свойств этих отображений, например, непрерывности или линейности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №07-01-90102).

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e_\tau(\delta_0,\delta_T,\varphi)=\sup_{\substack{x_0,\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_T\in\mathbb{R}^n\\ \|x_0-\widetilde{x}_0\|\le\delta_0\\ \|x(T)-\widetilde{x}_T\|\le\delta_T}}\|x(\tau)-\varphi(\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_T)\|.$$

Погрешностью оптимального восстановления будем называть величину

$$E_\tau(\delta_0,\delta_T)=\inf_{\varphi\colon\,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}e_\tau(\delta_0,\delta_T,\varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом восстановления. Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимального метода восстановления.

В основе решения сформулированной задачи лежит метод оптимального восстановления линейных операторов, изложенный в работах [1] и [2] (см. также [3]). Центральным моментом в этом методе является сведение исходной задачи к некоторой экстремальной задаче с ограничениями, сводящейся в рассматриваемом случае к задаче линейного программирования, которую удается точно решить с помощью принципа Лагранжа снятия ограничений. Для задач оптимального восстановления решений уравнений в частных производных этот метод применялся в работах [4]—[6].

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_m$$

— собственные числа матрицы A и r_k — кратность собственного числа μ_k, $k=1,\ldots,m$. Обозначим через $\{e_{k,j}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению μ_k. Тогда система векторов

$$e_{11},\ldots,e_{1r_1},\ldots,e_{m1},\ldots,e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Положим

$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases}\dfrac{e^{2\mu_{i+1}(T-\tau)}-e^{2\mu_i(T-\tau)}}{e^{-2\tau(\mu_i+\mu_{i+1})}\big(e^{2\mu_{i+1}T}-e^{2\mu_iT}\big)}, & \delta_0e^{\mu_iT}\le\delta_T<\delta_0e^{\mu_{i+1}T},\\ & \qquad i=1,\ldots,m-1,\\ e^{2\mu_m\tau}, & \delta_T\ge\delta_0e^{\mu_mT},\\ 0, & \delta_T<\delta_0e^{\mu_1T}.\end{cases}$$

(2)

$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\dfrac{e^{-2\mu_i\tau}-e^{-2\mu_{i+1}\tau}}{e^{-2\tau(\mu_i+\mu_{i+1})}\big(e^{2\mu_{i+1}T}-e^{2\mu_iT}\big)}, & \delta_0e^{\mu_iT}\le\delta_T<\delta_0e^{\mu_{i+1}T},\\ & \qquad i=1,\ldots,m-1,\\ 0, & \delta_T\ge\delta_0e^{\mu_mT},\\ e^{-2\mu_1(T-\tau)}, & \delta_T<\delta_0e^{\mu_1T}.\end{cases}$$

Теорема 1. *Для погрешности оптимального восстановления решения задачи* (1) *в момент* τ *справедливо равенство*

$$E_\tau(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

при этом метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T) = \sum_{k=1}^{m} e^{\mu_k \tau} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 \widetilde{x}_{0kj} + \widehat{\lambda}_2 \widetilde{x}_{Tkj} e^{\mu_k T}}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_k T}} e_{kj}, \tag{3}$$

где $\widetilde{x}_{0kj}$ *и* $\widetilde{x}_{Tkj}$ *— координаты векторов* $\widetilde{x}_0$ *и* $\widetilde{x}_T$

$$\widetilde{x}_0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{x}_{0kj} e_{kj},$$

$$\widetilde{x}_T = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{x}_{Tkj} e_{kj},$$

является оптимальным.

Доказательство. С исходной задачей восстановления тесно связана так называемая двойственная экстремальная задача

$$\|x(\tau)\|^2 \to \max, \quad \|x_0\|^2 \le \delta_0^2, \quad \|x(T)\|^2 \le \delta_T^2, \tag{4}$$

где $x(\cdot)$ — решение задачи (1). Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = -\|x(\tau)\|^2 + \lambda_1 \|x_0\|^2 + \lambda_2 \|x(T)\|^2.$$

Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$, что для допустимого в задаче (4) элемента $\widehat{x}_0$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{x}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_1 \left(\|\widehat{x}_0\|^2 - \delta_0^2\right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\|\widehat{x}(T)\|^2 - \delta_T^2\right) = 0,$$

то $\widehat{x}_0$ — решение задачи (4), а ее значение равно $\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2$. Если при этом для всех $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T \in \mathbb{R}^n$ существует решение $y_0 = y_0(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)$ экстремальной задачи

$$\widehat{\lambda}_1 \|x_0 - \widetilde{x}_0\|^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x(T) - \widetilde{x}_T\|^2 \to \min, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

то

$$E_\tau(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T) = \widetilde{x}(\tau),$$

где $\widetilde{x}(\cdot)$ — решение задачи (1) с начальным условием y_0, является оптимальным.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\mu_k t} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тем самым функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} \left(-e^{2\mu_k \tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{2\mu_k T}\right) c_{kj}^2.$$

Положив

$$b_k = \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2,$$

приходим к виду

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{m} e^{2\mu_k \tau} \left(-1 + \lambda_1 e^{-2\mu_k \tau} + \lambda_2 e^{2\mu_k (T-\tau)}\right) b_k.$$

Легко убедиться, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ функция

$$g(z) = -1 + \lambda_1 e^{-2z\tau} + \lambda_2 e^{2z(T-\tau)}$$

выпукла при $z \in \mathbb{R}$, поэтому, если $g(\mu_i) = 0$ и $g(\mu_{i+1}) = 0$ при каком-либо $1 \leq i \leq m-1$, то для всех k, $1 \leq k \leq m$, справедливы неравенства $g(\mu_k) \geq 0$. Пусть $1 \leq i \leq m-1$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условий $g(\mu_i) = g(\mu_{i+1}) = 0$. Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 e^{-2\mu_i \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_i (T-\tau)} = 1,$$
$$\widehat{\lambda}_1 e^{-2\mu_{i+1} \tau} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\mu_{i+1} (T-\tau)} = 1.$$

Отсюда

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{e^{2\mu_{i+1}(T-\tau)} - e^{2\mu_i (T-\tau)}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}\big(e^{2\mu_{i+1} T} - e^{2\mu_i T}\big)},$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2\mu_i \tau} - e^{-2\mu_{i+1} \tau}}{e^{-2\tau(\mu_i + \mu_{i+1})}\big(e^{2\mu_{i+1} T} - e^{2\mu_i T}\big)}.$$

Положим $\widehat{b}_k = 0$ при $k \neq i, i+1$, а $\widehat{b}_i$ и $\widehat{b}_{i+1}$ выберем из условия, чтобы для элемента

$$\widehat{x}_0 = \sqrt{\widehat{b}_i} e_{i1} + \sqrt{\widehat{b}_{i+1}} e_{i+1,1}$$

были выполнены равенства (b). Тогда $\widehat{b}_i$ и $\widehat{b}_{i+1}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}\widehat{b}_i+\widehat{b}_{i+1}=\delta_0^2\\ \widehat{b}_ie^{2\mu_iT}+\widehat{b}_{i+1}e^{2\mu_{i+1}T}=\delta_T^2.\end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{b}_i&=\frac{\delta_0^2e^{2\mu_{i+1}T}-\delta_T^2}{e^{2\mu_{i+1}T}-e^{2\mu_iT}},\\ \widehat{b}_{i+1}&=\frac{\delta_T^2-\delta_0^2e^{2\mu_iT}}{e^{2\mu_{i+1}T}-e^{2\mu_iT}}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{\delta_T}{\delta_0}\in\left[e^{\mu_iT},e^{\mu_{i+1}T}\right).$$

Тогда очевидно, что $\widehat{b}_i\ge 0$ и $\widehat{b}_{i+1}\ge 0$. Тем самым для элемента $\widehat{x}_0$ выполнены равенства (b). Кроме того, $\mathcal{L}(\widehat{x}_0,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0$, а $\mathcal{L}(x_0,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge 0$. Следовательно, условие (a) тоже выполнено. При $\delta_T<\delta_0e^{\mu_1T}$ положим $\widehat{b}_1=\delta_T^2e^{-2\mu_1T}$, $\widehat{b}_k=0$, $2\le k\le m$, а при $\delta_T\ge\delta_0e^{\mu_mT}$ положим $\widehat{b}_m=\delta_0^2$, $\widehat{b}_k=0$, $1\le k\le m-1$. Тогда для соответствующих $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ и $\widehat{x}_0$ легко убедиться в выполнении условий (a) и (b).

Решим теперь задачу (5), которая имеет вид

$$\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{r_k}\left(\widehat{\lambda}_1(c_{kj}-\widetilde{x}_{0kj})^2+\widehat{\lambda}_2\left(c_{kj}e^{\mu_kT}-\widetilde{x}_{Tkj}\right)^2\right)\to\min,\quad c_{kj}\in\mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи являются

$$c_{kj}=\frac{\widehat{\lambda}_1\widetilde{x}_{0kj}+\widehat{\lambda}_2\widetilde{x}_{Tkj}e^{\mu_kT}}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2e^{2\mu_kT}},\quad k=1,\dots,m,\ j=1,\dots,r_k.$$

Тем самым

$$y_0=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\widehat{\lambda}_1\widetilde{x}_{0kj}+\widehat{\lambda}_2\widetilde{x}_{Tkj}e^{\mu_kT}}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2e^{2\mu_kT}}e_{kj},$$

а решение задачи (1) с начальным условием y_0 в момент времени τ имеет вид

$$\sum_{k=1}^m e^{\mu_k\tau}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\widehat{\lambda}_1\widetilde{x}_{0kj}+\widehat{\lambda}_2\widetilde{x}_{Tkj}e^{\mu_kT}}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2e^{2\mu_kT}}e_{kj},$$

что и является оптимальным методом восстановления. □

Предположим теперь, что нам известны лишь приближенные данные $\widetilde{x}_T$ с погрешностью δ_T о решении в момент времени T, а о начальном значении решения известна априорная информация в виде ограничения $\|x_0\| \le \delta_0$. Требуется восстановить значение решения в момент времени τ, $0 < \tau < T$ Погрешностью оптимального восстановления в этой задаче будем называть величину

$$E_\tau^T(\delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x_0, \widetilde{x}_T \in \mathbb{R}^n \\ \|x_0\| \le \delta_0 \\ \|x(T) - \widetilde{x}_T\| \le \delta_T}} \|x(\tau) - \varphi(0, \widetilde{x}_T)\|. \tag{6}$$

Можно рассмотреть также задачу об оптимальном восстановлении в момент времени τ решения задачи (1) по приближенным значениям в начальный момент времени $\widetilde{x}_0$, заданным с погрешностью δ_0, и априорной информации в виде ограничения в правом конце $\|x(T)\| \le \delta_T$. Здесь погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\tau^0(\delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x_0, \widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \|x_0 - \widetilde{x}_0\| \le \delta_0 \\ \|x(T)\| \le \delta_T}} \|x(\tau) - \varphi(\widetilde{x}_0, 0)\|. \tag{7}$$

Методы, на которых достигается нижняя грань в задачах (6) и (7), называются оптимальными для соответствующих задач.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$E_\tau^T(\delta_0, \delta_T) = E_\tau^0(\delta_0, \delta_T) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_T^2},$$

где $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ определены равенствами (2)*, при этом метод $\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T)$ является оптимальным для задачи* (6)*, а метод $\widehat{\varphi}(\widetilde{x}_0, 0)$ — оптимальным для задачи* (7) *($\widehat{\varphi}$ определяется равенством* (3)*).*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для задачи (6). Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что двойственная экстремальная задача совпадает в этом случае с задачей (4), а метод $\widetilde{x}(\tau)$, где $\widetilde{x}(\cdot)$ — решение задачи (1) с начальным условием, определяемым из задачи

$$\widehat{\lambda}_1 \|x_0\|^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x(T) - \widetilde{x}_T\|^2 \to \min, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

является оптимальным. Очевидно, что этот метод есть не что иное, как $\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T)$. Утверждение теоремы для задачи (7) доказывается аналогичным образом. □

В заключении выпишем в более подробном виде оптимальный метод восстановления для задачи (6). При $\delta_T \ge \delta_0 e^{\mu_m T}$

$$\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T) = 0.$$

Этот случай соответствует слишком большой погрешности в наблюдаемых данных, которая не дает возможности воспользоваться этими данными. При $\delta_T < \delta_0 e^{\mu_1 T}$

$$\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T) = \sum_{k=1}^{m} e^{\mu_k(\tau - T)} \sum_{j=1}^{r_k} \widetilde{x}_{Tkj} e_{kj}.$$

Этот случай соответствует слишком большой погрешности в априорных данных. Наконец, в промежуточных случаях, когда $\delta_0 e^{\mu_i T} \leq \delta_T < \delta_0 e^{\mu_{i+1} T}$, $i = 1, \dots, m-1$, имеем

$$\widehat{\varphi}(0, \widetilde{x}_T) = \sum_{k=1}^{m} e^{\mu_k(\tau - T)} \sum_{j=1}^{r_k} (\widehat{\lambda}_1/\widehat{\lambda}_2 + e^{2\mu_k T})^{-1} \widetilde{x}_{Tkj} e_{kj}.$$

Автор выражает благодарность проф. К. Ю. Осипенко за постановку задач и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[3] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.

[4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[5] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[6] *Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 803–815.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского