

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ ПРОИЗВОДНЫМ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ И САМОЙ ФУНКЦИИ

С. А. УНУЧЕК

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления производной k_1 -го и k_2 -го порядков функции по ее неточно заданным производным других порядков и самой функции. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Общая постановка задачи оптимального восстановления функционала принадлежит С.А. Смоляку [1]. Она явилась обобщением задачи о наилучших квадратурных формулах С.М. Никольского [2], которая в свою очередь возникла на основе идей А.Н. Колмогорова. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [3]. В данной работе изучается задача одномоментного восстановления производных функций k_1 -го и k_2 -го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1 -го и n_2 -го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = 1$, $n_1 = 2$, $k_2 = 3$, $n_2 = 4$. Нам показался этот случай интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля. Для заданной погрешности в равномерной норме ситуация, когда много множителей Лагранжа отлично от нуля, достаточно распространен (см [4], [5]). Ранее задача оптимального восстановления k -ой производной функции по приближенной информации о самой функции и ее n -ой производной рассматривалась в работе [6].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно непрерывна, } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны её производные n_1 -го и n_2 -го порядков и сама функция, то есть известны функции $y_0(\cdot), y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1 -го и k_2 -го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi: (L_2(\mathbb{R}))^3 \rightarrow (L_2(\mathbb{R}))^2.$$

Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{K}, \bar{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{Y} \in (L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^2 p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\bar{Y})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2},$$

где $\bar{K} = (k_1, k_2)$, $\bar{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\bar{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\bar{Y}), \varphi_2(\bar{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geq 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{K}, \bar{\delta}) = \inf_{\varphi: (L_2(\mathbb{R}))^3 \rightarrow (L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{K}, \bar{\delta}, \varphi).$$

Методы $\hat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Если $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, погрешность оптимального восстановления равна

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{K}, \bar{\delta}) = \sqrt{\hat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2}, \quad (1)$$

где

$$\hat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\hat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi) |\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 (\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2})}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$ – произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$W = \sqrt{p_1^2 \delta_0^2 + 2p_1 p_2 \delta_1^2 + p_2^2 \delta_2^2},$$

$$\widehat{\lambda}_0 = \begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}} \left(3p_1 + p_2 \frac{\delta_2}{\delta_0} \right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}, \\ \frac{p_1^2 \delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0 \delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} 0, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}, \\ \frac{p_2^2 W^2 + 2p_1 p_2 \delta_1^2}{2\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0 \delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}} \left(p_1 \frac{\delta_0}{\delta_2} + 3p_2 \right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}, \\ \frac{p_2^2 \delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0 \delta_2} \end{cases},$$

Теорема 2. Пусть $k_1 = 1$, $n_1 = 2$, $k_2 = 3$, $n_2 = 4$. Тогда

$$E(\mathcal{W}_2^4(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\delta_0 \delta_2} \sqrt{p_1 \delta_0 + p_2 \delta_2}, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}, \\ \sqrt{\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0 \delta_2}. \end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}) = \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) Fy_j(\xi), s = 1, 2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)$ – любые функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие в случае $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ условиям

$$\begin{aligned} \alpha_0^s(\xi) &= (i\xi)^{2s-1} \frac{\widehat{\lambda}_0 - \theta_s(\xi)\xi^4 \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 (\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^8 - p_1 \xi^2 - p_2 \xi^6)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^8}, \\ \alpha_1^s(\xi) &= 0, \\ \alpha_2^s(\xi) &= (i\xi)^{2s-5} \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^8 + \theta_s(\xi)\xi^4 \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 (\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^2 - p_2 \xi^6)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^8}, \\ & s = 1, 2, \end{aligned}$$

а $\theta_s(\cdot)$ – произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1 \xi^2 \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^6 \theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ условиям

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^2 (i\xi)^{2j} \alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}, \quad s = 1, 2, \\ p_1 \left(\sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \right) + p_2 \left(\sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \right) \leq 1 \end{cases},$$

является оптимальным.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Сначала рассмотрим задачу оптимального восстановления производных k_1 -го и k_2 -го порядков в общем виде. Докажем, что имеет место неравенство

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^2 p_j \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2}. \quad (2)$$

Для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ такой, что выполнены условия $\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j$, $j = 0, 1, 2$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned} & 2 \left(p_1 \|x^{(k_1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + p_2 \|x^{(k_2)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(p_1 \|x^{(k_1)}(\cdot) - (-x)^{(k_1)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right. \\ & \quad \left. + p_2 \|x^{(k_2)}(\cdot) - (-x)^{(k_2)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(p_1 \|x^{(k_1)}(\cdot) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + p_2 \|x^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \left(p_1 \|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + p_2 \|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq 2e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi). \end{aligned}$$

То есть, для любого метода φ выполняется

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \bar{K}, \bar{\delta}, \varphi) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^2 p_j \|x^{(k_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2}.$$

Отсюда следует неравенство (2).

Это означает, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sqrt{p_1 \|x^{(k_1)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + p_2 \|x^{(k_2)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2} \rightarrow \max, \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем её в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|x^{(m)}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|Fx^{(m)}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ = \frac{1}{2\pi} \|(i\xi)^m (Fx)(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2m} |(Fx)(\xi)|^2 d\xi.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (p_1 \xi^{2k_1} + p_2 \xi^{2k_2}) |(Fx)(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n_j} |(Fx)(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Теперь докажем теорему 1. Пусть $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$. Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \end{cases}$$

где $\xi_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n_2}}$, $D(m) = \delta_0 \sqrt{2\pi m}$. Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} D^2(m) d\xi \leq \\ \frac{1}{2\pi m} \cdot D^2(m) = \delta_0^2,$$

и, учитывая условие $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{2n_1} D^2(m) d\xi \leq$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi m} \cdot \xi_0^{2n_1} \leq \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n_2} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{D^2(m)}{2\pi m} \cdot \xi_0^{2n_2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} p_1 \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k_1} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} p_2 \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k_2} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi} \int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} \left(p_1 \xi^{2k_1} + p_2 \xi^{2k_2} \right) d\xi \geq$$

$$\delta_0^2 \left(p_1 \left(\xi_0 - \frac{1}{m} \right)^{2k_1} + p_2 \left(\xi_0 - \frac{1}{m} \right)^{2k_2} \right).$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к величине

$$Q = \delta_0^2 \left(p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_1}{n_2}} + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_2}{n_2}} \right) = \widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2$$

при

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_1}{n_2}} \left(1 - \frac{k_1}{n_2} \right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_2}{n_2}} \left(1 - \frac{k_2}{n_2} \right), \quad (5)$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_1-n_2}{n_2}} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{2\frac{k_2-n_2}{n_2}}.$$

То есть в случае $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Оптимальные методы в общем случае будем искать среди методов $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ вида $\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}(\cdot)) = \Lambda_0^s y_0(\cdot) + \Lambda_1^s y_1(\cdot) + \Lambda_2^s y_2(\cdot)$, где $\Lambda_j^s : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_j^s y_j)(\cdot) = \alpha_j^s(\cdot)(F y_j)(\cdot), \quad j = 0, 1, 2, \quad s = 1, 2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Для оценки оптимальной погрешности для фиксированных $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{s=1}^2 \left(p_s \|x^{(k_s)}(\cdot) - \sum_{j=0}^2 \Lambda_j^s y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \right) \rightarrow \max,$$

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2, \quad s = 1, 2.$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) Fy_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi), \quad j = 0, 1, 2.$$

Задача (6) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) + \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

В случае $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ положим

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)), \quad \alpha_1^s(\xi) = 0, \quad \alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi), \quad s = 1, 2.$$

Задача (7) переписывается в виде

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)) z_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) z_2(\xi) \right|^2 d\xi \right) \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

Оценим подынтегральные функции с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} & |(i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)) z_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) z_2(\xi)|^2 = \\ & \xi^{2k_s} \left| \frac{1 - \alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_0}} \sqrt{\widehat{\lambda}_0} \cdot z_0(\xi) + \frac{(i\xi)^{-n_2} \alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}} \sqrt{\widehat{\lambda}_2} \cdot z_2(\xi) \right|^2 \leq \\ & \xi^{2k_s} \left(\frac{|1 - \alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0} + \frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right) \cdot (\widehat{\lambda}_0 |z_0(\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_2 |z_2(\xi)|^2), \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)) z_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) z_2(\xi)|^2 d\xi \right) \leq \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k_s} \left(\frac{|1 - \alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0} + \frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right) (\widehat{\lambda}_0 |z_0(\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_2 |z_2(\xi)|^2) d\xi \right). \end{aligned}$$

Если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^2 \xi^{2k_s} p_s \left(\frac{|1 - \alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0} + \frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right) \leq 1, \quad (8)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 p_s \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^{k_s} (1 - \alpha_s(\xi)) z_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) z_2(\xi)|^2 d\xi \leq \\ & \widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2, \end{aligned}$$

то есть оценка сверху совпадает с оценкой снизу, что означает оптимальность метода. Покажем, что множество оптимальных методов не пусто. Из условия (8) найдем ограничения на $\alpha_s(\xi)$ и построим явно какой-либо из методов.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \xi^{2k_s} p_s \left(\frac{|1 - \alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0} + \frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right) = \\ & \frac{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2} \cdot \sum_{s=1}^2 \xi^{2(k_s - n_2)} p_s \left| \alpha_s(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right|^2 + \frac{\sum_{s=1}^2 p_s \xi^{2k_s}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^2 \xi^{2(k_s-n_2)} p_s \left| \alpha_s(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right|^2 \leq \frac{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2}{(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2})^2} \cdot \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^2 p_s \xi^{2k_s} \right)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi) = -p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2} + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}, \quad \xi \geq 0,$$

и параметрически заданную кривую (см. рис. 1):

$$\begin{cases} x = \xi^{2n_2}, \\ y = p_1 \xi^{2k_1} + p_2 \xi^{2k_2}. \end{cases}$$

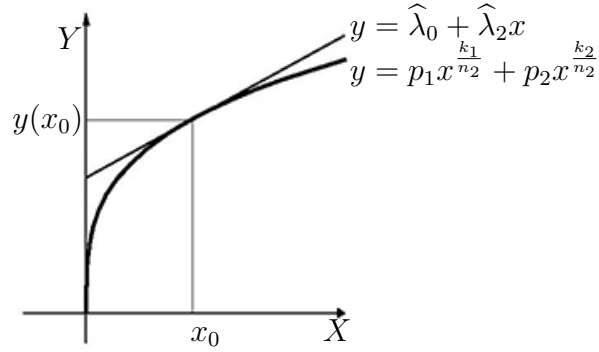


рис. 1

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leq \tilde{y}$, где $\tilde{y} = kx + b$ - касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$. Построим касательную в точке $x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2$. Значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \tilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_0$. График функции $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ расположен ниже прямой $y \leq \tilde{y} = \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 x$. Это означает, что $g(\xi) \geq 0$, то есть

$$\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^2 p_s \xi^{2k_s} \geq 0.$$

Положим

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi) |\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 (\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2})}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

тогда условие (8) выполняется при всех $\theta_s(\xi) \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условию

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в частности, при $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi) = 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $k_1 = 1$, $n_1 = 2$, $k_2 = 3$, $n_2 = 4$. В случае $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Пусть

$$\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}. \quad (9)$$

Покажем, что в этом случае погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\sqrt{\delta_1 W}$. Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad P = \frac{p_1^2}{p_2^2}, \\ \xi_0 &= \frac{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} = \\ &= \left(\frac{p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2 - \sqrt{(p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2)^2 - 4p_1^2 p_2^2 \delta_1^4}}{2p_2^2 \delta_1^2} \right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} = \\ &= \left(\frac{p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2 + \sqrt{(p_1^2 \delta_0^2 + p_2^2 \delta_2^2)^2 - 4p_1^2 p_2^2 \delta_1^4}}{2p_2^2 \delta_1^2} \right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$D_1(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_0^2 \xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4}}, \quad D_2(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2 \xi_0^4}{\xi_1^4 - \xi_0^4}}.$$

Подкоренное выражение в равенствах (10) и (11) положительно, т.к. из (9) следует, что $\Delta_0 \Delta_2 > 1$, и, следовательно,

$$\Delta_2 + P\Delta_0 \geq 2\sqrt{\Delta_2 P\Delta_0} \geq 2\sqrt{P}.$$

Тем самым доказано, что $\xi_0 < \xi_1$.

Покажем, что

$$\frac{\delta_0^2 \xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4} > 0.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\delta_0^2 \xi_1^4 - \delta_1^2 > 0$$

или $\Delta_0 \xi_1^4 > 1$. Это неравенство можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} > 1.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > \Delta_2 - P\Delta_0.$$

Если правая часть этого неравенства отрицательна, то оно очевидно выполнено, а если правая часть неотрицательна, то неравенство выполнено в силу очевидного соотношения

$$(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P > (\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P\Delta_0\Delta_2 = (\Delta_2 - P\Delta_0)^2.$$

Осталось показать, что

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2 \xi_0^4}{\xi_1^4 - \xi_0^4} = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^2 \xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4} > 0.$$

Нетрудно убедиться, что для доказательства этого неравенства достаточно убедиться в справедливости неравенства $\Delta_0 \xi_0^4 < 1$, которое можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} < 1.$$

Доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > P\Delta_0 - \Delta_2,$$

которое фактически уже было доказано.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D_1(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ D_2(m), & \xi \in [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \cup [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1]. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} D_1^2(m) d\xi + \int_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} D_2^2(m) d\xi \right) \leq \\ &= \frac{D_1^2(m) + D_2^2(m)}{2\pi m} = \delta_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^4 |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^4 D_1^2(m) d\xi + \int_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^4 D_2^2(m) d\xi \right) \leq \\ &= \frac{D_1^2(m)\xi_0^4 + D_2^2(m)\xi_1^4}{2\pi m} = \frac{2\pi m (\delta_0^2 \xi_0^4 \xi_1^4 - \delta_1^2 \xi_0^4 + \delta_1^2 \xi_1^4 - \delta_0^2 \xi_0^4 \xi_1^4)}{2\pi m (\xi_1^4 - \xi_0^4)} = \delta_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^8 |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^8 D_1^2(m) d\xi + \int_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^8 D_2^2(m) d\xi \right) \leq \\ &= \frac{D_1^2(m)\xi_0^8 + D_2^2(m)\xi_1^8}{2\pi m} = \frac{2\pi m (\delta_0^2 \xi_0^8 \xi_1^4 - \delta_1^2 \xi_0^8 + \delta_1^2 \xi_1^8 - \delta_0^2 \xi_0^4 \xi_1^8)}{2\pi m (\xi_1^4 - \xi_0^4)} = \\ &= \delta_1^2 (\xi_1^4 + \xi_0^4) - \delta_0^2 \frac{p_1^2}{p_2^2} = \delta_2^2, \end{aligned}$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \left(p_1 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi + p_2 \int_{\mathbb{R}} \xi^6 |(Fx_m)(\xi)|^2 d\xi \right) = \\ &\frac{1}{2\pi} \left(D_1^2(m) \int_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} (p_1 \xi^2 + p_2 \xi^6) d\xi + D_2^2(m) \int_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} (p_1 \xi^2 + p_2 \xi^6) d\xi \right) \geq \\ &\frac{D_1^2(m) \left(p_1 \left(\xi_0 - \frac{1}{m} \right)^2 + p_2 \left(\xi_0 - \frac{1}{m} \right)^6 \right) + D_2^2(m) \left(p_1 \left(\xi_1 - \frac{1}{m} \right)^2 + p_2 \left(\xi_1 - \frac{1}{m} \right)^6 \right)}{2\pi m}. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ данная дробь стремится к величине

$$Q = \frac{W^2}{p_2 (\xi_0^2 + \xi_1^2)} = \delta_1 W = \widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2$$

при указанных выше значениях ξ_0, ξ_1 и

$$\widehat{\lambda}_0 = \frac{p_1^2 \delta_1}{2W}, \quad \widehat{\lambda}_1 = \frac{p_2^2 W^2 + 2p_1 p_2 \delta_1^2}{2\delta_1 W}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{p_2^2 \delta_1}{2W}.$$

То есть в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2}.$$

Перейдем к построению оптимальных методов. При $k_1 = 1, n_1 = 2, k_2 = 3, n_2 = 4$ задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{2s-1} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) (i\xi)^{2j} Fx(\xi) + \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

В случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0 \delta_2}$, возьмем такие $\alpha_j^s(\xi)$, $s = 1, 2$, чтобы они удовлетворяли условию

$$\sum_{j=0}^2 (i\xi)^{2j} \alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}.$$

Задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \rightarrow \max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |z_j(\xi)|^2 d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского для оценки подынтегральных функций:

$$\left| \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^2 \frac{\alpha_j^s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_j}} \sqrt{\widehat{\lambda}_j} \cdot z_j(\xi) \right|^2 \leq$$

$$\left(\sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^2 \right), \quad s = 1, 2.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j |z_j(\xi)|^2 \right) d\xi \right).$$

При выполнении условия

$$\sum_{s=1}^2 p_s \sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} \leq 1, \quad (13)$$

также выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=0}^2 \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \leq \sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,$$

то есть указанные методы оптимальны. Докажем, что множество оптимальных методов также не пусто. Пусть

$$\alpha_j^s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_j (i\xi)^{2s-1} (-i\xi)^{2j}}{\sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}},$$

тогда условие $\sum_{j=0}^2 (i\xi)^{2j} \alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}$, $s = 1, 2$, выполняется. Покажем, что условие (13) также выполняется.

$$\sum_{s=1}^2 p_s \sum_{j=0}^2 \frac{|\alpha_j^s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j} = \frac{p_1 \xi^2 + p_2 \xi^6}{\sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= -p_1 \xi^2 - p_2 \xi^6 + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_1 \xi^4 + \widehat{\lambda}_2 \xi^8 = \\ &= \frac{p_1^2 \delta_1}{2W} - p_1 \xi^2 + \frac{p_2^2 W^2 + 2p_1 p_2 \delta_1^2}{2\delta_1 W} \xi^4 - p_2 \xi^6 + \frac{p_2^2 \delta_1}{2W} \xi^8 = \\ &= \frac{p_2^2 \delta_1}{2W} (\xi_0^4 \xi_1^4 - 2\xi_0^2 \xi_1^2 \xi^2 + (\xi_0^4 + 4\xi_0^2 \xi_1^2 + \xi_1^4) \xi^4 - 2(\xi_0^2 + \xi_1^2) \xi^6 + \xi^8) = \\ &= \frac{p_2^2 \delta_1}{2W} (\xi^2 - \xi_0^2)^2 (\xi^2 - \xi_1^2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

это означает что

$$\frac{p_1 \xi^2 + p_2 \xi^6}{\sum_{j=0}^2 \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}} \leq 1,$$

условие (13) выполнено, множество оптимальных методов не пусто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
- [2] Никольский С. М. Квадратурные формулы, М.: Наука, 1988.
- [3] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, 17, 3, 1975, с. 359–368
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой. Мат. сб., 2002, 193, 79-100.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации. Функциональный анализ и его приложения, 2003, 37, 51-64
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди-Литтлвуда-Поля и восстановление производных по неточной информации. Докл. РАН, 2011, 438, 3, 300-302.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, г. МОСКВА