УДК 517

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Унучек С. А.

В работе рассматривается задача восстановления операторов разделенных разностей последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданному преобразованию Фурье этой поcделовательности. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оператор разделенной разности, преобразование Фурье.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления функционалов была поставлена С.А. Смоляком в работе [1]. Он же доказал, что среди оптимальных методов восстановления есть линейный. В общем случае метод оптимального восстановления линейных операторов по приближенной информации разработан Г.Г. Магарилом-Ильяевым и К.Ю. Осипенко в работе [2]. В данной работе рассматривается задача одновременного восстановления операторов разделенных разностей различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. Преобразование Фурье последовательности приближенно задано на отрезке. Аналогичная задача восстановления производной какого-либо порядка (или самой функции) на соболевском классе рассмтривалась в работе [3]. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работе [3].

2. Основные понятия

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$ - пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} =$

$\left(h \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mid x_j \mid^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathscr{W}^n_{2,h} = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le 1\}.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h(\mathbb{Z})}$ является функция $(Fx)(\omega) = h \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h])$, оператора разделенной разности первого порядка – функция $(F\Delta^1_h x)(\omega) = h \sum\limits_{j\in Z} \frac{x_{j+1}-x_j}{h} e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}(Fx)(\omega)$, преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m - функция $(F\Delta^m_h x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^m}{h^m}(Fx)(\omega)$.

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta^1_h x,\, \Delta^2_h x,\, \ldots,\, \Delta^{n-1}_h x)$ последовательности $x \in \mathscr{W}^n_{2,h}$, при условии, что ее преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 \le \sigma \le \pi/h$ нам известно с точностью до δ : $\|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta, \quad \delta > 0$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y))$,

$\varphi_k(y) : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$

Обозначим $\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1})$.

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) =$$
$$= \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\ y\in\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \\ \|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\le\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x - \varphi_k(y)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \ge 0$, $1 \le k \le n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) = \inf_{\varphi:\,\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

3. Основные результаты

Пусть x -корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^k = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{k-n}{n}} x^n,$$

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \arcsin \dfrac{h\sqrt{x}}{2}, & \sqrt{x} < \dfrac{2}{h} \\ \dfrac{\pi}{h}, & \sqrt{x} \geq \dfrac{2}{h} \end{cases}, \quad t(\omega) = \frac{4\sin^2 \dfrac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t(\sigma).$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$E(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) =$$
$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}\big(\alpha_k(\omega) y(\omega)\big), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}$, *где*

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}, \tag{1}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) |\theta_k(\omega)|^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \Big(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\Big), \tag{2}$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma \geq \widehat{\sigma} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma} \end{cases}$$

являются оптимальными.

4. Доказательство

Докажем , что

$$E(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in \mathscr{W}_{2,h}^n \\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2}. \tag{3}$$

Для любой последовательности $x \in \mathscr{W}_{2,h}^n$ такой, что $\|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta$, и для любого метода φ имеем

$$\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(x) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k(-x) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x \in \mathscr{W}_{2,h}^n \\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta}} p_k \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 - \varphi(0)\right)^{1/2} \leq \left(2e^2(\mathscr{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi)\right)^{1/2}.$$

То есть, для любого метода φ

$$e(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x\in\mathscr{W}^n_{2,h} \\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\leq\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Из данного неравенства следует неравенство (3).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max,\ \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1, \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta. \tag{4}$$

Перейдем к квадрату задачи и применим теорему Планшереля. Задача (4) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \to \max, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq 1.$$

Положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\arcsin\left(\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\right), & \sigma \geq \widehat{\sigma} \\ \dfrac{2}{h}\arcsin\left(\sin\dfrac{h\sigma}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\right), & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases}. \tag{6}$$

Так как в точке $x = \omega^n_{\widehat{\sigma}}$ выполняется равенство $\widehat{\lambda}_2 x = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ и $\widehat{\lambda}_1 > 0$, то $\widehat{\lambda}_2 x < \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ для всех $x \in [0; \left(\dfrac{2}{h}\right)^{2n}]$. Точка $x_0 = \dfrac{2\pi}{\delta^2}$ является точкой касания прямой $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ и функции $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$.

В силу вогнутости функции $\widetilde{y}$ при $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ выполняется двойное неравенство $\omega_\sigma^n \geq \omega_{\widehat{\sigma}}^n > x_0$. Это означает, что аргумент функции арксинус в равенстве (6) не превышает 1 при $\sigma \geq \widehat{\sigma}$. В противоположном случае выполнение этого условия очевидно.

Пусть $\sigma \geq \widehat{\sigma}$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых $(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$

Положим $D = \delta\sqrt{m}$. Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\, d\omega = \int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\, d\omega = \frac{D^2}{m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega)\|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\pi;\pi])}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega)D^2 d\omega =$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} \left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{h\omega}{2}\right)^n d\omega \leq \frac{\delta^2 2^{2n}\sin^{2n}\dfrac{h\omega_0}{2}}{2\pi h^{2n}} = 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Следовательно, при $D = \delta\sqrt{m}$ значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega)\|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^k(\omega)D^2 d\omega =$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} \frac{4^k}{h^{2k}}\sin^{2k}\frac{h\omega}{2}\, d\omega \geq \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{\delta^2 2^{2k}\sin^{2k}\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}}{2\pi h^{2k}}.$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \longrightarrow \infty$ стремится к величине $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}$.

В случае $\sigma < \widehat{\sigma}$ очевидно, что $\omega_0 < \sigma < \dfrac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$ такую, что

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D_1, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ D_2, & \omega \in [\sigma; \sigma + \frac{1}{m}], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \cup [\sigma; \sigma + \frac{1}{m}]. \end{cases}$$

Возьмем

$$D_1 = \delta\sqrt{m},\, D_2 = \left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-n} \sqrt{m\left(2\pi - \delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)}$$

. Тогда $\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\, d\omega = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} D_1^2\, d\omega = \delta^2$. Аналогично,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega)\|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega)D_1^2 d\omega + \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} t^n(\omega)D_2^2 d\omega\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left(\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\omega_0}{2}\right)^{2n} + \frac{D_2^2}{m}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2n}\right) = 1.$$

Таким образом, функции $x_m(\cdot)$ также допустимы в задаче (5). Значит, при указанных выше значениях δ, D_1 и D_2 значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega)\|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^k(\omega)D_1^2 d\omega + \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} t^k(\omega)D_2^2 d\omega\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left[\delta^2\left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2k} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-2n} \cdot \left(2\pi - \delta^2{\omega_\sigma}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)\omega_\sigma^k\right].$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \longrightarrow \infty$ стремится к величине $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\omega_\sigma^k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)$.

Таким образом, мы доказали, что

$$E(\mathscr{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) \geq \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\omega_\sigma^k\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Построим оптимальные методы. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\varphi_k(y) = \Lambda_k y$, где $\Lambda_k : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_k y)(\omega) = \begin{cases} \frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}\alpha_k(\omega)y(\omega), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}$$

где функция $\alpha_k(\omega) \in \mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma)), \alpha_k(\omega) = 0, \omega \notin (-\sigma;\sigma)$, $1 \leq k \leq n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k x-\Lambda_k y\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\longrightarrow \max$,

$\|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\le\delta, x\in\mathscr{W}^n_{2,h},\ y\in\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])$.

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\Big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)y(\omega)\Big|^2d\omega\longrightarrow\max,$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\big|Fx(\omega)-y(\omega)\big|^2d\omega\le\delta^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega\le 1. \quad (7)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}&|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)y(\omega)|^2=\\&\qquad=|Fx(\omega)(1-\alpha_k(\omega))+\alpha_k(\omega)(Fx(\omega)-y(\omega))|^2=\\&=\left|\frac{\alpha_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\big(Fx(\omega)-y(\omega)\big)+\frac{1-\alpha_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}Fx(\omega)\right|^2\\&\qquad\qquad\le q_k(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1|Fx(\omega)-y(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\right),\end{aligned}$$

где $q_k(\omega)=\frac{|\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1}+\frac{|1-\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}$.

Учитывая условия в задаче (7), имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\Big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)y(\omega)\Big|^2d\omega\le\\&\qquad\qquad\le\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}(\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2),\end{aligned}$$

где $Q(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)q_k(\omega)$.

Если $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\le 1$, то значение задачи (7)

$$\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma\geq\widehat{\sigma},\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\omega_\sigma^k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\dfrac{n-k}{n}+\omega_\sigma^{-n}\right), & \sigma<\widehat{\sigma}\end{cases},$$

не превосходит $\widehat{\lambda}_1\dfrac{\delta^2}{2\pi}+\widehat{\lambda}_2\leq E^2(\mathscr{W}_{2,h}^n,F,\overline{\Delta},\delta)$.

Из последнего неравенства следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления. Тем самым методы, в которых $a_k(\cdot)$, $k=1,\ldots,n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\leq 1$, будут оптимальными.

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\leq 1$ эквивалентно выражению (2) в условии теоремы. Имеем

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)q_k(\omega)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\left(\frac{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\cdot\left|\alpha_k(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right|^2+\frac{1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right).$$

Пусть $\theta_k(\omega)=\alpha_k(\omega)(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n)-\widehat{\lambda}_1$.

Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\leq 1$ эквивалентно условию (2).

В силу неотрицательности функции

$$g(\omega)=-\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)+\lambda_1\chi_{[-\sigma,\sigma]}+\lambda_2t^n(\omega),\quad \omega_h\in[0,4/h^2]$$

правая часть неравенства (2) неотрицательна.

Верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

Пусть $\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}),f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$ - соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ - множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций $\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}):\|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq 1,(Ff)(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$,где $(Ff)(\cdot)$ - преобразование Фурье функции f. Будем считать, что дана функция $y(\cdot)\in\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])$ такая, что

$\|(Ff)(\cdot)-y(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\le\delta$, где $\delta>0-$ заданная величина погрешности.

Заметим, что, в пределе при $h\to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x\in\mathscr{W}^n_{2,h}$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot)\in\mathbb{W}^n_2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0}t(\omega)=\omega^2,\ \lim_{h\to 0}\omega_\sigma=\sigma^2,\ \lim_{h\to 0}\widehat{\sigma}=\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}.$$

Погрешность одновременного оптимального восстановления производных всех порядков $(D^1f(\cdot),\, D^2f(\cdot),\,\dots,\, D^{n-1}f(\cdot))$ функции $f(\cdot)\in\mathbb{W}^n_2(\mathbb{R})$ равна

$$E(\mathbb{W}^n_2(\mathbb{R}),F,\overline{D},\delta)=\lim_{h\to 0}E(\mathscr{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta)=$$
$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma\ge\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\sigma^{2k}\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\dfrac{n-k}{n}+\sigma^{-2n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma<\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\end{cases},$$

где $\overline{D}=(D^1,\, D^2,\,\dots,\, D^{n-1})$.

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y)=\begin{cases}\left(F^{-1}\big(\alpha_k(\omega)y(\omega)\big)\right)^{(k)}, & \omega\in(-\sigma;\sigma)\\ 0, & \omega\notin(-\sigma;\sigma)\end{cases}$,
где $\alpha_k(\omega)=\begin{cases}\frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega^n}, & \omega\in(-\sigma;\sigma)\\ 0, & \omega\notin(-\sigma;\sigma)\end{cases}$,
а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega\in(-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega^{2k}|\theta_k(\omega)|^2\le\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2\omega^{2n}\left(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega^{2n}-\sum_{k=1}^{n-1}p_k\omega^{2k}\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma\geq\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\sigma^{2k}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma<\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma\geq\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\sigma^{2(k-n)}, & \sigma<\left(\dfrac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}\end{cases},$$

являются оптимальными, и при $p_k=\begin{cases}1, & k=r,\\ 0, & k\neq r\end{cases}$ мы получаем результат, аналогичный результату, полученному при восстановлении производной функции порядка r в работе [3].

Замечание 1. Если преобразование Фурье последовательности с ограниченной $n-$ой разделенной разностью на отрезке $[-\sigma;\sigma]$ известно приближенно, то с увеличением полудлины отрезка σ погрешность оптимального восстановления уменьшается, но лишь до определенного предела: при $\sigma\geq\widehat{\sigma}$ эта погрешность постоянна, то есть за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}]$ информация о преобразовании Фурье последовательности из данного класса не нужна.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум.—2009.—, № 2.—С. 158–192.
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Математические заметки.—2012.—Т. 92, № 1.—С. 59–67.

5. *Унучек С. А.* Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Дифференциальные уравнения.—2015.—Т. 51, № 7.—С. 951–957.

Унучек Светлана Александровна
РАНХиГС
старший преподаватель
Москва, пр. Вернадского, 82
E-mail: svun@mail.ru

Optimal recovery of the operators of the divided difference of the inaccurately given sequence by the Fourier transform

Unuchek Svetlana Aleksandrovna

In this paper we consider the problem of recovery operators of divided differences of a sequence in the mean square norm from an inaccurately given Fourier transform. A family of optimal recovery methods is constructed.

Key words: Optimal recovery, operator of a divided difference, Fourier transform