На правах рукописи

Унучек Светлана Александровна

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОЙ ИНФОРМАЦИИ

01.01.01—вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва—2018

Работа выполнена в центре нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Научные руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор К. Ю. Осипенко,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета.
Консультант:
доктор физико-математических наук, профессор Г. Г. Магарил-Ильяев,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета;

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита диссертации состоится на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан

Учёный секретарь
диссертационного совета — Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В различных прикладных задачах часто нужно восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой (как правило, неполной и/или неточной) информации о других его характеристиках. Например, требуется восстановить производную функции или интеграл от нее, или саму функцию в той или иной метрике, или ее значение в некоторой фиксированной точке по приближенно известным значениям в других точках или по приближенно известному преобразованию Фурье этой функции. Существуют различные подходы к решению аналогичных задач. Одним из наиболее распространенных является регуляризация по А.Н. Тихонову. В данной работе используется другой подход, основанный на идеях А. Н. Колмогорова о наилучших средствах приближения классов функций, суть которого заключается в том, что ищется наилучший метод восстановления данной характеристики по априорной информации об объекте среди всех возможных методов восстановления. Раздел математики, который изучает задачи восстановления на основе указанного подхода, активно развивается в последние время как в России, так и за рубежом. Теория оптимального восстановления тесно связана с классическими задачами теории приближений, имеет широкое практическое применение.

Цели диссертационной работы

Целями диссертационной работы являются:

(1) исследование оптимальных методов восстановления оператора разделенной разности последовательности по неточной информации об этой последовательности.

(2) исследование оптимальных методов восстановления производной функции по неточной информации об этой функции.

Задачи диссертационной работы

Для достижения указанных целей необходимо было решить следующие задачи:

(1) Разработать способ построения семейства оптимальных методов одновременного восстановления операторов разностей последовательности различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью в случае, когда преобразование Фурье последовательности приближенно задано на отрезке.

(2) Решить ту же задачу, если сама последовательность задана приближенно.
(3) Разработать оптимальный метод восстановления либо самой последовательности, либо оператора её k-ой разности в случае, когда преобразование Фурье последовательности приближенно задано на отрезке в равномерной норме.
(4) Разработать оптимальный метод восстановления оператора k-ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям других порядков.
(5) Исследовать задачу одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Они обобщают и развивают ранее известные результаты, связанные с задачами оптимального восстановления функций и их производных. Впервые рассмотрена задача одновременного восстановления линейной комбинации операторов разделенных разностей последовательности различных порядков.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут иметь применение в математическом анализе и теории приближений. Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что для ряда задач были построены оптимальные методы восстановления операторов разделенных разностей последовательности, которые могут служить основой для разработки эффективных численных алгоритмов.

Апробация работы

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на следующих семинарах и конференциях:

научном семинаре “Задачи оптимального восстановления линейных операторов” механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Г. Г. Магарил-Ильяева, проф. К. Ю. Осипенко и проф. В. М. Тихомирова,

научных семинарах Московского государственного технического университета МИРЭА,

научном семинаре «Экстремальные задачи и нелинейный анализ» под руководством проф. А.В. Арутюнова, проф. В. И. Буренкова, научном семинаре кафедры прикладной математики РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством проф. А.Л. Скубачевского,

64 Научно-технической конференции МИРЭА (МГТУ МИРЭА, май 2015),

XII международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (с. Цей, 12-18 июля 2015 года),

XIII международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование" (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 года),

XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016),

XIV международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования" (с. Цей, 3-8 июля 2017 года).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ.

Структура диссертации

Работа состоит из введения, предварительных сведений, четырех глав и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 106 страниц. Список литературы содержит 28 наименований.

Содержание работы

В диссертации рассматриваются задачи оптимального восстановления операторов разделенной разности последовательности по неточной информации об этой последовательности.

Введение содержит краткий исторический обзор тематики диссертации, формулировки основных ее результатов и комментарии к ним.

В разделе **Предварительные сведения** собраны необходимые для доказательства утверждений диссертации сведения об операторах разделенной разности, свойствах преобразования Фурье, соболевских пространствах функций на $\mathbb{R}^d$ и методах выпуклой оптимизации.

В **первой главе** рассматриваются две задачи одновременного восстановления операторов всех разностей последовательности в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. В первой задаче преобразование Фурье последовательности приближенно задано на отрезке. Приведем точную постановку.

Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$ - пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой

$$\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid x_j \mid^2 \right)^{1/2}.$$

Оператор разделенных разностей определяется равенством:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \qquad \Delta_h^m x = \Delta_h\big(\Delta_h^{m-1} x\big).$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]),$$

а оператора разделенной разности - функция

$$(F\Delta_h^1 x)(\omega) = h \sum_{j\in Z} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} (Fx)(\omega),$$

$$(F\Delta_h^m x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^m}{h^m} (Fx)(\omega).$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathcal{W}_{2,h}^n = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le 1\}.$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей

$$(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \dots,\, \Delta_h^{n-1} x)$$

последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что её преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 \le \sigma \le \pi/h$ нам известно с точностью до δ :

$$\|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \dots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$$

Положим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) \qquad = \qquad \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h},\ y\in\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])\\ \|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\le\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \varphi_k(y)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Здесь $p=(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1})$, $p_k\ge 0$, $1\le k\le n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n} e(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Пусть x -положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x,$$

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\arcsin\dfrac{hx^{\frac{1}{2n}}}{2}, & x^{\frac{1}{2n}} < \dfrac{2}{h} \\[2ex] \dfrac{\pi}{h}, & x^{\frac{1}{2n}} \ge \dfrac{2}{h} \end{cases},$$

$$t(\omega) = \frac{4\sin^2\dfrac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t\left(\sigma\right).$$

Теорема 1.1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\delta>0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) =$$

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}\big(\alpha_k(\omega)y(\omega)\big), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases},$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases},$$

а $\theta_k(\cdot)$ *для почти всех* $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)|\theta_k(\omega)|^2 \le \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma \ge \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases}$$

являются оптимальными.

Затем рассматривается задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \ldots,\, \Delta_h^{n-1} x)$ последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что последовательность x задана неточно, то есть известна последовательность $y \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такая, что

$$\|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления снова рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : l_{2,h}(\mathbb{Z}) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$$

Положим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h},\ y\in l_{2,h}(\mathbb{Z})\\ \|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}p_k\|\Delta_h^kx-\varphi_k(y)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}},$$

где $p=(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$, $p_k\ge 0$, $1\le k\le n-1$, — весовые коэффициенты.

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta)=\inf_{\varphi:l_{2,h}(\mathbb{Z})\to(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n}e(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta,\varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Теорема 1.2. *Пусть $k,n\in\mathbb{N}$, $1\le k\le n-1$ и $\delta>0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta\ge\left(\dfrac{h}{2}\right)^n,\\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n.\end{cases}$$

При $\delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ метод $\widehat{\varphi}(y)=\Delta_h^ky$ является оптимальным. При $\delta\ge\left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ все методы $\widehat{\varphi}_k(y)=\Delta_h^kF^{-1}\big(\alpha_k(\omega)Fy(\omega)\big)$, где

$$\alpha_k(\omega)=\frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)},\qquad t(\omega)=\frac{4\sin^2\dfrac{\omega h}{2}}{h^2},$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех ω удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)|\theta_k(\omega)|^2\le\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)-\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{-2\frac{k}{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right),\quad \widehat{\lambda}_2=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\delta^{2\frac{n-k}{n}},$$

являются оптимальными.

Во **второй главе** рассматривается задача, аналогичная тем, которые рассматриваются в первой главе. Разница в том, что здесь преобразование Фурье последовательности известно приближенно в равномерной норме.

Снова рассмотрим пространство последовательностей $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h>0$. Обозначим класс последовательностей

$$\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})=\{x\in\mathcal{W}^n_{2,h}:(Fx)(\cdot)\in L_\infty([-\pi/h,\pi/h])\}.$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ приближенно известно её преобразование Фурье на множестве $(-\sigma;\sigma)$, $\sigma \le \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, то есть известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности $k-$ го порядка последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Любое отображение

$$\varphi(y):\ L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$$

объявляем методом восстановления и погрешностью этого метода называем величину

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) \\ y \in L_\infty(-\sigma;\sigma) \\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta}} \|(\Delta^k_h x) - \varphi(y(\cdot))\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Нас интересует величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) = \inf_{\varphi:\, L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta, \varphi),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

Положим

$$t(\omega) = \frac{\left|e^{ih\omega} - 1\right|^2}{h^2} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$

$\widehat{\sigma}-$ решение уравнения $\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega = \dfrac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$.

Теорема 2.1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), k, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^k(\omega)d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h, \end{cases}$$

где

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^k(\omega)d\omega + \omega_{\sigma_0}^{k-n}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^n(\omega)d\omega\right),$$

$$\omega_{\sigma_0} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma_0}{2}}{h}\right)^2.$$

При $\sigma_0 < \pi/h$ *метод* $\widehat{\varphi}(y)$ *такой, что*

$$F\widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| \le \sigma_0 \\ 0, & |\omega| > \sigma_0 \end{cases},$$

где

$$\alpha(\omega) = \left(1 - \left(\frac{t(\omega)}{\omega_{\sigma_0}}\right)^{n-k}\right) \cdot \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k},$$

является оптимальным. При $\sigma_0 = \pi/h$ *метод* $\widehat{\varphi}(y)$ *такой, что*

$$F\widehat{\varphi}(y) = \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k} y(\omega),$$

является оптимальным.

В **третьей главе** изучается задача восстановления оператора k-ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям $k_1, k_2, \ldots k_n$ порядков.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ порядков $(0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$, то есть известны последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, что

$$\|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-той разделенной разности $\Delta_h^k x \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$ последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi:\ (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью этого метода называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \overline{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\, j=1,\ldots,n}} \|\Delta_h^k x - \varphi(\overline{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \overline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Погрешность оптимального восстановления будет значением экстремальной задачи

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi),$$

а метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань – оптимальный метод.

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le k_1 < k_2 < \dots \le k_n, \qquad \delta > 0.$

Положим

$$M = co\,\{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \le j \le n\} + \{(t, t\ln\frac{h}{2}) : \, t \ge 0\},$$

где $co\,A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством

$$\theta(k) = \max\{x : \, (k, x) \in M\},$$

$k_{s_1}, k_{s_2}, \dots k_{s_r}$ – ее точки излома,

$$\widehat{\lambda}_{s_jL} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{2\frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_jR} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{2\frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}},$$

$$t(\omega) = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\omega}{2}}{h}\right)^2.$$

Теорема 3.1. *Для любого $k \ge 0$ погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(k)}.$$

(1) *Если $k_1 > 0$, $0 \le k < k_1$, то любой метод является оптимальным;*

(2) *если $k = k_{s_j}$, $1 \le j \le r$, то метод $\widehat{\varphi}$ такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = y_{s_j},$$

является оптимальным;

(3) *если $r \ge 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le r - 1$, то любой метод вида $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \beta_{s_jL} * y_{s_j} + \beta_{s_jR} * y_{s_{j+1}}$ является оптимальным, где $\beta_{s_jL}, \beta_{s_jR}$ - последовательности,*

преобразование Фурье которых удовлетворяет условиям:

$$\left|(F\beta_{s_jL})(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}\left(\dfrac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jL}}\right| \leq$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega)}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}+\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k}(\omega)-1},$$

$$(F\beta_{s_jR})(\omega) = \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}} - \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}\alpha_{s_jL}(\omega),$$

является оптимальным,

(4) *если $k > k_{s_r}$, то метод $\widehat{\varphi}$ такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r},$$

является оптимальным.

В **четвертой главе** изучается задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Этот случай показался интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля.

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно непрерывна, } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны её производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, то есть известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j,\ j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

Любой метод метод (отображение) $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2$ объявляется методом восстановления и его погрешность вычисляется по формуле

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \ge 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3\to(L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

Теорема 4.1. *Если* $\delta_1 \ge \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, *погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ *такой, что его преобразование Фурье*

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$*— произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию*

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \le 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$W = \sqrt{p_1^2\delta_0^2 + 2p_1p_2\delta_1^2 + p_2^2\delta_2^2},$$

$$\widehat{\lambda}_0 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1 + p_2\frac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} 0, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\frac{\delta_0}{\delta_2} + 3p_2\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

.

Теорема 4.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}_2^{4k}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0 + p_2\delta_2}, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \sqrt{\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2}. \end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) F y_j(\xi), s = 1, 2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)$– любые функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие в случае $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}$ условиям

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_0 - \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$\alpha_1^s(\xi) = 0,$$

$$\alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-5)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{8k} + \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$s = 1, 2,$$

а $\theta_s(\cdot)$– произвольные функции из $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$p_1\xi^{2k}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{6k}\theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}, s = 1, 2, \\ p_1\left(\sum_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) + p_2\left(\sum_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) \le 1 \end{cases},$$

является оптимальным .

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям Магарил-Ильяеву Георгию Георгиевичу и Осипенко Константину Юрьевичу за постоянную поддержку и полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

1 Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности “, *Дифференциальные уравнения* , (2015), **51**: 7, 951–957.

2 Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям “, *Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования*, XII Межд. научная конф., с. Цей, (2015), 110–111.

3 Унучек С. А. “ О восстановлении оператора разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье, *Владикавказский мат. журн.*, (2015), **17**: 3, 84–92.

4 Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление производной функции по неточно заданным производным других порядков и самой функции “, *Владикавказский мат. журн.*, (2016), **18**: 3, 60–71.

5 Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям “ , *Математический форум (Итоги науки. Юг России)*, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, (2016) **10**: 1, 215–225.

6 Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по двум неточно заданным разностям “, *XII Белорусская Математическая Конференция, Межд. научная конф.* , Материалы конференции, Минск, (2016), часть 1, 27–28 .

7 Унучек С. А. “ Восстановление производной функции по производным других порядков“, *Теория операторов, комплексный анализ и математическое*

моделирование. Межд. научная конф., пос. Дивноморское, тезисы докладов XIII Международной научной конференции, (2016), 78–80.

8 Унучек С. А. “ Одновременное восстановление операторов разделенной разности неточно заданной последовательности по преобразованию Фурье в среднеквадратичной норме“, *Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования*, XIV Межд. научная конф., с. Цей, (2017), 82–83.

Унучек С. А.

Восстановление операторов разделенной разности последовательности по неточно заданной информации

Аннотация

В работе получены оптимальные методы одновременного восстановления преобразования Фурье операторов всех разностей приближенно заданой на отрезке последовательности в среднеквадратичной и равномерной нормах на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. Исследована задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным других порядков и самой функции.

Unuchek S. A.

Optimal recovery of divided differences sequence from its inaccurate data

Abstract

In this work we obtain optimal methods for simultaneous recovery of operators’ Fourier transform for all the differences of the approximately given interval specified sequence in the root mean square and uniform norms for class of sequences with limited nth divided difference. We also studied the problem of simultaneous recovery of k_1th and k_2th order function derivatives in root mean square norm based on inaccurately given other orders derivatives and the function itself.