РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

УНУЧЕК Светлана Александровна

Восстановление операторов разделенной разности последовательности по неточно заданной информации

(01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор К. Ю. Осипенко.
Консультант—
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Г. Магарил-Ильяев.

Москва—2018

Оглавление

Введение

Работа посвящена вопросам оптимального восстановления оператора разделенной разности последовательности по информации о самой последовательности или ее разделенных разностей других порядков, известных точно или приближенно (в той или иной метрике).

В различных прикладных задачах часто нужно восстановить какую-либо характеристику объекта по некоторой (как правило, неполной и неточной) информации о других его характеристиках. Например, требуется восстановить производную функции или интеграл от нее, или саму функцию в той или иной метрике, или ее значение в некоторой фиксированной точке по приближенно известным значениям в других точках или по приближенно известному преобразованию Фурье этой функции. Существуют различные подходы к решению аналогичных задач. Одним из наиболее распространенных является регуляризация по А.Н. Тихонову. В данной работе используется другой подход, основанный на идеях А. Н. Колмогорова [**1**] о наилучших средствах приближения классов функций конечномерными подпространствами, суть которого заключается в том, что ищется наилучший метод восстановления данной характеристики по априорной информации об объекте среди всех возможных методов восстановления.

Одними из первых решались задачи о построении наилучшей квадратурной формулы. Пусть дан класс W функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и зафиксированы точки $a \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n \leq b$.

Для каждой функции $f(\cdot) \in W$ известны значения в данных точках. Требуется вычислить приближенное значение определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

В качестве методов приближения предлагаются следующие квадратурные формулы

$$\int\limits_a^b f(t)dt \approx \sum_{j=1}^n p_i f(t_i).$$

Набор весовых коэффициентов p_1, $p_2, \ldots p_n$, на котором достигается нижняя грань

$$\inf_{p_1,\ldots,p_n} \sup_{f(\cdot)\in W} \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{j=1}^n p_i f(t_i) \right|,$$

задает наилучшую квадратурную формулу. Важные результаты в решении данной задачи были получены С.М. Никольским [**2**], который указал оптимальный выбор точек, в которых вычисляется подынтегральная функция.

Точная постановка задачи оптимального восстановления впервые была сформулирована С.А. Смоляком [**3**], который исследовал оптимальное восстановление линейного функционала на некотором множестве W линейного пространства по значениям других линейных функционалов. Он же получил первый результат в этой постановке, доказав, что, если W- выпуклое, центрально-симметричное множество ($W = -W$), то среди всех оптимальных методов восстановления вещественного линейного функционала на W существует линейный. Аналогичное утверждение для комплекснозначных функционалов было доказано К.Ю. Осипенко [**4**]. В дальнейшем этот результат обобщался многими авторами. В обзорах C.A. Michelli и T.J. Rivlin [**5, 6**] формулируются и решаются различные задачи оптимального восстановления. В работе A.A. Melkman и C.A. Michelli **[7]** рассматриваются линейные методы восстановления линейных операторов в гильбертовом пространстве.

В работе Смоляка объекты были заданы точно, на практике часто приходится иметь дело с объектами, информация о которых известна приближенно, с некоторой погрешностью. В начале 2000-х годов в работах Г.Г. Магарила-Ильяева и К.Ю. Осипенко был разработан метод оптимального восстановления линейных операторов по приближенной информации (**[8, 9, 10, 11]** и др.). Получен критерий существования линейного оптимального метода **[12]** в достаточно общей постановке.

В конкретных задачах восстановления в качестве информационного оператора обычно рассматривают линейные функционалы или операторы, сопоставляющие функции или ее производной значения в точках, коэффициенты Фурье или просто саму функцию. При обработке данных различной природы часто приходится иметь дело с дискретной информацией. В этом случае производные заменяются на конечные разности, интегралы - на конечные суммы. В диссертации рассматриваются различные задачи восстановления операторов разделенной разности последовательности. Во всех задачах информация о последовательности дана неточно. Получены оптимальные методы восстанвления.

Приведем общую постановку задачи оптимального восстановления. Пусть $X-$ линейное пространство, $W \subset X-$ класс элементов, $Y, Z-$ нормированное пространство, $I-$ линейный оператор такой, что $I : X \to Y$. Элементы из W известны приближенно, то есть $\forall x \in W$ известен $y \in Y : \|Ix - y\|_Y \leq \delta$, $\delta \geq 0$. По этой информации хотим восстановить значение линейного оператора $\Lambda : X \to Z$. Схематично задачу можно изобразить так:

$$
\begin{tikzcd}
W \subset X \arrow[rr, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Методом восстановления назовем любое отображение $\varphi : Y \to Z$. Его погрешностью называем величину

$$e(W, \Lambda, Y, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \le \delta}} \|\Lambda(x) - \varphi(y)\|_Z.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(W, \Lambda, Y, \delta) = \inf_{\varphi: Y \to Z} e(W, \Lambda, Y, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам φ. Методы, на которых достигается нижняя грань, называются *оптимальными методами восстановления*.

Задачу нахождения оптимального метода и оптимальной погрешности будем называть *задачей оптимального восстановления* оператора Λ на классе W по информации I.

Краткое содержание работы

В диссертации рассматриваются задачи оптимального восстановления операторов разделенной разности последовательности по неточной информации об этой последовательности.

В первой главе рассматриваются две задачи одновременного восстановления операторов разностей различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. В первой задаче преобразование

Фурье последовательности приближенно задано на отрезке. Аналогичная задача восстановления производной какого-либо порядка (или самой функции) на соболевском классе рассмтривалась в работе [**13**]. Во второй задаче неточно задана сама последовательность. Задача, когда k-ая разделенная разность восстанавливалась в фиксированной точке, расссматривалась в работе [**14**]. Некоторый частный случай рассматриваемой задачи был получен в работе [**15**]. В диссертации используется другой метод, позволяющий найти семейство оптимальных методов для одновременного восстановления сразу нескольких операторов разделенной разности любого порядка. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работах [**11**], [**13**] и [**16**]. Решение данной задачи изложено автором в работе [**21**].

Перед формулировкой теорем дадим определения. Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$ - пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой

$$\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid x_j \mid^2 \right)^{1/2}.$$

Оператор разделенных разностей определяется равенством:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \qquad \Delta_h^m x = \Delta_h\big(\Delta_h^{m-1} x\big).$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]),$$

а оператора разделенной разности - функция

$$F(\Delta_h x)(\omega) = h \sum_{j\in Z} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} Fx(\omega),$$

$$F(\Delta_h^m x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^m}{h^m} Fx(\omega).$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathcal{W}_{2,h}^n = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le 1\}.$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей

$$(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \ldots,\, \Delta_h^{n-1} x)$$

последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что её преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 \le \sigma \le \pi/h$ нам известно с точностью до δ :

$$\|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$$

Обозначим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_{2,h}^n,\ y \in \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \\ \|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \varphi_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \ge 0$, $1 \le k \le n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta)=\inf_{\varphi\colon\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])\to\left(l_{2,h}(\mathbb{Z})\right)^n} e(\mathcal{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta,\varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Пусть x - положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_kx^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}x,$$

$$\widehat{\sigma}=\begin{cases}\dfrac{2}{h}\arcsin\dfrac{hx^{\frac{1}{2n}}}{2}, & x^{\frac{1}{2n}}<\dfrac{2}{h}\\ \\ \dfrac{\pi}{h}, & x^{\frac{1}{2n}}\geq\dfrac{2}{h}\end{cases},$$

$$t(\omega)=\frac{4\sin^2\dfrac{\omega h}{2}}{h^2},\quad \omega_\sigma=t\left(\sigma\right).$$

Теорема 1.1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\delta>0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta)=$$

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma\geq\widehat{\sigma},\\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\omega_\sigma^k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\dfrac{n-k}{n}+\omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma<\widehat{\sigma}.\end{cases}$$

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y)=\begin{cases}\Delta_h^kF^{-1}\big(\alpha_k(\omega)y(\omega)\big), & \omega\in(-\sigma;\sigma)\\ 0, & \omega\notin(-\sigma;\sigma)\end{cases},$

где

$$\alpha_k(\omega)=\begin{cases}\frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}, & \omega\in(-\sigma;\sigma)\\ 0, & \omega\notin(-\sigma;\sigma)\end{cases},$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega\in(-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)|\theta_k(\omega)|^2\leq\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)-\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}, \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases}$$

являются оптимальными.

Затем рассмотрим задачу одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \ldots,\, \Delta_h^{n-1} x)$ последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что последовательность x задана неточно, то есть известна последовательность $y \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такая, что

$$\|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления снова рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : l_{2,h}(\mathbb{Z}) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Положим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\mathcal{W}_{2,h}^n, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_{2,h}^n,\ y \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \varphi_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2},$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n-1$, — весовые коэффициенты.

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta) = \inf_{\varphi: l_{2,h}(\mathbb{Z}) \to \left(l_{2,h}(\mathbb{Z})\right)^n} e(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Теорема 1.2. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta \ge \left(\dfrac{h}{2}\right)^n, \\ \delta \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n. \end{cases}$$

При $\delta < \left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ метод $\widehat{\varphi}(y) = \Delta_h^k y$ является оптимальным. При $\delta \ge \left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ все методы $\widehat{\varphi}_k(y) = \Delta_h^k F^{-1}\big(\alpha_k(\omega) F y(\omega)\big)$, где

$$\alpha_k(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_1 + \theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, \qquad t(\omega) = \frac{4 \sin^2 \dfrac{\omega h}{2}}{h^2},$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех ω удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) |\theta_k(\omega)|^2 \le \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{-2\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n}\right), \quad \widehat{\lambda}_2 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \delta^{2\frac{n-k}{n}},$$

являются оптимальными.

Во второй главе рассматривается задача, аналогичная тем, которые рассматриваются в первой главе. Разница в том, что здесь преобразование Фурье последовательности известно приближенно в равномерной норме. Задача восстановления функции и ее k-ой производной по неточно заданному преобразованию Фурье этой функции в равномерной норме рассматривалась в работе [**11**]. Результат, полученный в данной главе, приведен автором в работе [**23**] и в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [**11**].

Перед формулировкой теоремы вновь введем некоторые обозначения. Снова рассмотрим пространство последовательностей $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$. Обозначим класс последовательностей

$$\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathcal{W}^n_{2,h} : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\}.$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ также приближенно известно её преобразование Фурье на множестве $(-\sigma; \sigma)$, $\sigma \leq \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, то есть известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности $k-$ го порядка последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Любое отображение

$$\varphi(y) : \ L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$$

объявляем методом восстановления и погрешностью этого метода называем величину

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) \\ y \in L_\infty(-\sigma;\sigma) \\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta}} \|(\Delta^k_h x) - \varphi(y(\cdot))\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Нас интересует величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta) = \inf_{\varphi :\, L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

Положим

$$t(\omega) = \frac{\left|e^{ih\omega} - 1\right|^2}{h^2} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$

$\widehat{\sigma}-$ решение уравнения $\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega = \frac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$.

Теорема 2.1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^k(\omega)d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h, \end{cases}$$

где

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^k(\omega)d\omega + \omega_{\sigma_0}^{k-n}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^n(\omega)d\omega\right),$$

$$\omega_{\sigma_0} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma_0}{2}}{h}\right)^2.$$

При $\sigma_0 < \pi/h$ метод $\widehat{\varphi}(y)$ такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| \le \sigma_0 \\ 0, & |\omega| > \sigma_0 \end{cases},$$

где

$$\alpha(\omega) = \left(1 - \left(\frac{t(\omega)}{\omega_{\sigma_0}}\right)^{n-k}\right) \cdot \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k},$$

является оптимальным. При $\sigma_0 = \pi/h$ метод $\widehat{\varphi}(y)$ такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k} y(\omega),$$

является оптимальным.

В третьей главе изучается задача восстановления оператора k-ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям $k_1, k_2, \dots k_n$ порядков. В этой главе используются результаты, опубликованные автором в работах [**22, 25, 26**]. Аналогичная задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по приближенным измерениям в другие моменты времени рассматривалась в работе [**17**]. Задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенно известным производным других порядков рассматривалась в работе [**18**]. Результат, полученный в диссертации, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [**18**]. Снова перед фдомулировкой теоремы введем некоторые обозначения.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \dots, k_n$ порядков ($0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n$), то есть известны последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n$ такие, что

$$\|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-той разделенной разности $\Delta_h^k x \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$ последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi:\ (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью этого метода называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \overline{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\, j=1,\dots,n}} \|\Delta_h^k x - \varphi(\overline{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \overline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Погрешность оптимального восстановления будет значением экстремальной задачи

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta})=\inf_{\varphi\colon(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n\to l_{2,h}(\mathbb{Z})}e(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta},\varphi),$$

а метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань – оптимальный метод.

Пусть $k,k_1,k_2,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_+$, $0\le k_1<k_2<\dots\le k_n,\ \delta>0$.

Положим

$$M=co\,\{(k_j,\ln 1/\delta_j),1\le j\le n\}+\{(t,t\ln\frac{h}{2}):\ t\ge 0\},$$

где $co\,A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0,+\infty)$ задана равенством

$$\theta(k)=\max\{x:\ (k,x)\in M\},$$

$k_{s_1},k_{s_2},\dots k_{s_r}$ – ее точки излома,

$$\widehat{\lambda}_{s_jL}=\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}\left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_jR}=\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}\left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}},$$

$$t(\omega)=\frac{4\sin^2\dfrac{h\omega}{2}}{h^2}.$$

Теорема 3.1. *Для любого $k\ge 0$ погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta})=e^{-\theta(k)}.$$

(1) *Если $k_1>0$, $0\le k<k_1$, то любой метод является оптимальным;*

(2) *если $k=k_{s_j}$, $1\le j\le r$, то метод $\widehat{\varphi}$ такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y})=y_{s_j},$$

является оптимальным;

(3) *если* $r \geq 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq r-1$, *то любой метод вида* $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \beta_{s_{jL}} * y_{s_j} + \beta_{s_{jR}} * y_{s_{j+1}}$ *является оптимальным, где* $\beta_{s_{jL}}, \beta_{s_{jR}}$ *- последовательности, преобразование Фурье которых удовлетворяет условиям:*

$$\left|(F\beta_{s_{jL}})(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_{jL}}\left(\dfrac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega) + \widehat{\lambda}_{s_{jL}}}\right| \leq$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}}\widehat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega)}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}} t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} t^{k_{s_j}-k}(\omega) + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k_{s_{j+1}}-k}(\omega) - 1},$$

$$(F\beta_{s_{jR}})(\omega) = \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}} - \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}} \alpha_{s_{jL}}(\omega),$$

является оптимальным,

(4) *если* $k > k_{s_r}$, *то метод* $\widehat{\varphi}$ *такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r},$$

является оптимальным.

В четвертой, заключительной главе изучается задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция ([**27**]) . Полностью задача решена ([**24**]) для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Этот случай показался интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля. Для заданной погрешности в равномерной норме ситуация, когда много множителей Лагранжа отлично от нуля, достаточно распространен (см [**10**], [**11**]). Ранее задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенной информации о самой функции и ее n-ой производной рассматривалась в работе [**16**].

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно}$$
$$\text{непрерывна, } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны её производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, то есть известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j,\ j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

Любой метод метод (отображение) $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2$ объявляется методом восстановления и его погрешность вычисляется по формуле

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) =$$
$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \ge 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

Теорема 4.1. *Если* $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, *погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2 - 1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2 - 1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ *такой, что его преобразование Фурье*

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi) |\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$*– произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию*

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$
\begin{aligned}
W =& \sqrt{p_1^2\delta_0^2 + 2p_1p_2\delta_1^2 + p_2^2\delta_2^2},\\
\widehat{\lambda}_0 =& \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1 + p_2\dfrac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},\\
\widehat{\lambda}_1 =& \begin{cases} 0, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},\\
\widehat{\lambda}_2 =& \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\dfrac{\delta_0}{\delta_2} + 3p_2\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \dfrac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},
\end{aligned}
$$

.

Теорема 4.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$. Тогда*

$$
E(\mathcal{W}_2^{4k}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0 + p_2\delta_2}, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2},\\ \sqrt{\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2}. \end{cases}
$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$
F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) F y_j(\xi), s = 1, 2,
$$

где $\alpha_j^s(\cdot)-$ *любые функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие в случае* $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_0 - \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$\alpha_1^s(\xi) = 0,$$

$$\alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-5)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{8k} + \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$s = 1, 2,$$

а $\theta_s(\cdot)-$ *произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию*

$$p_1\xi^{2k}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{6k}\theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^2 (i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}, s = 1, 2, \\ p_1\left(\sum_{j=0}^2 \dfrac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) + p_2\left(\sum_{j=0}^2 \dfrac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) \leq 1 \end{cases},$$

является оптимальным .

Предварительные сведения

Обозначения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, неотрицательных целых, действительных и комплексных чисел.

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$) обозначим евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d)$. Длину (евклидову норму) вектора $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ обозначим $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$.

Пусть $1 \le p \le \infty$. Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^d)$ совокупность измеримых комплекснозначных функций $f(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$ с конечной нормой

$$\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \inf\{\alpha > 0 \mid \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| > \alpha\} = 0\}.$$

Скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^d)$ определяется по формуле

$$(g(\cdot), f(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\overline{f(x)} \, dx.$$

Оператор разделенной разности

Пусть $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$ - пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$, с нормой

$$\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid x_j \mid^2\right)^{1/2}.$$

Оператор разделенных разностей определим равенством:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \qquad \Delta_h^m x = \Delta_h\big(\Delta_h^{m-1} x\big).$$

Гармонический анализ

Пусть $f(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Функция $(Ff)(\cdot)$, заданная на $\mathbb{R}^d$ и определенная равенством

$$(Ff)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{0.1}$$

называется *преобразованием Фурье функции* $f(\cdot)$.

Теорема 0.1 (Планшереля). *Существует единственный линейный непрерывный оператор, отображающий $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\mathbb{R}^d)$ (также называемый преобразованием Фурье и также обозначаемый через F), который на $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ совпадает с* (0.1) *и при этом, справедливо равенство*

$$\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|(Ff)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.2}$$

Из (0.2) следует, что F — взаимно однозначное отображение. Обратный оператор к F называется обратным преобразованием Фурье и обозначается F^{-1}. Это линейный непрерывный оператор.

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ называется функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]).$$

Преобразованием Фурье оператора разделенной разности первого порядка последовательностей называется функция

$$(F\Delta_h^1 x)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{x_{j+1}-x_j}{h} e^{-ijh\omega} =$$

$$\frac{1}{h}\left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega}e^{ih\omega} - h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega}\right) =$$

$$\frac{e^{ih\omega}}{h}\cdot h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j+1}e^{-i(j+1)h\omega} - \frac{1}{h}\cdot h\sum_{j\in Z} x_j e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}(Fx)(w).$$

Следовательно,

$$(F\Delta_h^m x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^m}{h^m}(Fx)(\omega).$$

По теореме Планшереля получаем

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(Z)} = \frac{1}{2\pi}\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(Z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2m}}{h^{2m}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Свертка последовательностей x и y определяется следующим образом:

$$(x*y)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{j-k.}$$

Теорема 0.2 (о свертке). *Преобразование Фурье переводит свертку последовательностей в произведение преобразований фурье этих последовательностей:*

$$(F(x*y))(\omega) = (Fx)(\omega)\cdot(Fy)(\omega).$$

Соболевским пространством $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d)$, $n\in\mathbb{N}$ называется совокупность таких функций $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, что для любого $k = (k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, для которого $k_1+\ldots+k_d\le n$, производная

$$x\mapsto D^k f(x) = \frac{\partial f^{k_1+\ldots+k_d}(x)}{\partial x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_d^{k_d}}$$

также принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть

$$d=1,\ \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})=\{x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):x^{(n-1)}(\cdot)\text{ - локально абсолютно}$$
$$\text{непрерывна, } x^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Преобразованием Фурье производной $x'(\cdot)$ функции $x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})$ является функция

$$(Fx')(\xi)=i\xi(Fx)(\xi)\in L_2(\mathbb{R}),$$

$$(Fx^{(m)})(\xi)=(i\xi)^m\,(Fx)(\xi).$$

По теореме Planшереля получаем

$$\|x^{(m)}(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\|Fx^{(m)})(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\|(i\xi)^m(Fx)(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2m}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi.$$

Выпуклая оптимизация

Пусть X — линейное пространство, функция $f\colon X\to\mathbb{R}$. *Надграфиком* функции f называется множество

$$\operatorname{epi}f=\{\,(x,\alpha)\in X\times\mathbb{R}\mid\alpha\geq f(x)\,\}$$

Функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если ее надграфик $\operatorname{epi}f$ является выпуклым множеством.

Пусть A — выпуклое подмножество X, функции $f_i\colon X\to\mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,m,$ — выпуклые , $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$.

Выпуклой задачей, или задачей *выпуклого программирования* называется следующая задача ортимизации:

$$f_0(x)\to\min,\quad f_i(x)\leq a_i,\quad i=1,\ldots,m,\quad x\in A.\qquad(0.3)$$

Точки $x \in A$, удовлетворяющие неравенствам $f_i(x) \le a_i$, $i = 1, \ldots, m$, называются *допустимыми* точками. Точки минимума функции $f_0(x)$ называются *решениями* данной задачи.

Функция $\mathcal{L}\colon X \times \mathbb{R}^{m+1}$, заданная равенством

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, называется *функцией Лагранжа* задачи (0.3), а числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа.*

Теорема 0.3 (Каруша–Куна–Таккера). *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (0.3)*. Тогда существует такой ненулевой набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$, что*

(*a*) $\min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$;

(*b*) $\widehat{\lambda}_i \ge 0,\ i = 0, 1, \ldots, m$;

(*c*) $\widehat{\lambda}_i (f_i(\widehat{x}) - a_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Если существуют $\widehat{x}$ – допустимая в задаче (0.3) *точка, и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m)$, которые удовлетворят условиям* (*a*)*,* (*b*) *и* (*c*) *и при этом $\widehat{\lambda}_0 > 0$, то $\widehat{x}$ — решение задачи* (0.3)*.*

Если найдется по крайней мере одна допустимая в задаче точка $\widehat{x} \in A$, такая, что $f_i(\widehat{x}) < a_i$, $i = 1, \ldots, m$ (условие регулярности или условие Слейтера), то $\widehat{\lambda}_0 \ne 0$.

Если выполнено условие Слейтера, то ограничения (*a*), (*b*) и (*c*) – необходимые и достаточные условия того, что допустимая в задаче (0.3) точка $\widehat{x}$ является решением этой задачи.

Очевидно, что, если условия (*a*), (*b*) и (*c*) выполнены для некоторого набора $\widehat{\lambda}$, то они выполнены и для набора $c\widehat{\lambda}$, где $c > 0$. То есть при $\widehat{\lambda}_0 > 0$ будем полагать, что $\widehat{\lambda}_0 = 1$.

Значением задачи (0.3) называется нижняя грань чисел $f_0(x)$ по всем допустимым x. Если $\widehat{x}$ — решение задачи (0.3), то, очевидно, значение задачи равно $f_0(\widehat{x})$.

Глава 1

Восстановление оператора разделенной разности по преобразованию Фурье последовательности в среднеквадратичной норме

В данной главе рассматриваются задачи одновременного восстановления операторов разностей последовательности различных порядков в среднеквадратичной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. В первой задаче преобразование Фурье последовательности приближенно задано на отрезке. Во второй задаче неточно задана сама последовательность. Предельным переходом из полученных результатов вытекает непрерывный случай, исследованный в работах [**13**], [**11**] и [**16**]. Решение второй задачи изложено автором в работе [**21**].

Перед формулировкой основных результатов данной главы введем некоторые обозначения. Пусть $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathcal{W}^n_{2,h} = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1\}.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h(\mathbb{Z})}$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]),$$

а оператора разделенной разности первого порядка – функция

$$(F\Delta^1_h x)(\omega) = h\sum_{j\in Z} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h}(Fx)(\omega),$$

преобразованием Фурье оператора разделенной разности порядка m - функция

$$(F\Delta_h^m x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^m}{h^m}(Fx)(\omega).$$

Ставится задача одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей

$$(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \ldots,\, \Delta_h^{n-1} x)$$

последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$, при условии, что её преобразование Фурье на отрезке $[-\sigma;\sigma]$, $0 \le \sigma \le \pi/h$ нам известно с точностью до δ :

$$\|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$$

Обозначим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) =$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}_{2,h}^n,\ y \in \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \\ \|Fx(\omega)-y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \varphi_k(y)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$, $p_k \ge 0$, $1 \le k \le n-1$, — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению оператора какой-либо разности.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to \left(l_{2,h}(\mathbb{Z})\right)^n} e(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Пусть x -положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x.$$

Рассмотрим обе части уравнения. Функция $y = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$ вогнута, $\lim\limits_{x\to 0} y' = 0$. Функция $y = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \dfrac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} x$ - прямая с положительным угловым коэффициентом, проходящая через начало координат. Это означает, что при $x > 0$ графики этих функций имеют единственную точку пересечения, то есть данное уравнение всегда имеет единственный корень.

Введем обозначения:

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \arcsin \dfrac{hx^{\frac{1}{2n}}}{2}, & x^{\frac{1}{2n}} < \dfrac{2}{h} \\ \\ \dfrac{\pi}{h}, & x^{\frac{1}{2n}} \geq \dfrac{2}{h} \end{cases},$$

$$t(\omega) = \frac{4\sin^2 \dfrac{\omega h}{2}}{h^2}, \quad \omega_\sigma = t\left(\sigma\right).$$

Теорема 1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) =$$
$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \Delta_h^k F^{-1}\big(\alpha_k(\omega)y(\omega)\big), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases},$

где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}, \tag{1.4}$$

а $\theta_k(\cdot)$ *для почти всех* $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)|\theta_k(\omega)|^2 \le \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)\right), \tag{1.5}$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma \ge \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \ge \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n}, & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases}$$

являются оптимальными.

Доказательство.

Докажем , что

$$E(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta) \ge \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}_{2,h}^n \\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\le\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}. \tag{1.6}$$

Для любой последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$ такой, что

$$\|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta,$$

и для любого метода φ имеем

$$\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k(x) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k(-x) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h}\\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\leq\delta}} p_k\|\Delta_h^k x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(2e^2(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi)\right)^{1/2}.$$

То есть, для любого метода φ

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h}\\ \|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\leq\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Из данного неравенства следует неравенство (1.6).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k\|\Delta_h^k x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max,\ \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1, \tag{1.7}$$

$$\|Fx(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta.$$

Перейдем к квадрату задачи и применим теорему Планшереля. Задача (1.7) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \to \max, \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq 1.$$

Рассмотрим расширение этой задачи на пространство всех положительных мер на окружности. Положим

$$d\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \geq 0.$$

Тогда задачу (1.8) можно переписать в виде:

$$-\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} d\mu(\omega) \to \min, \tag{1.9}$$

$$2\pi \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\mu(\omega) \leq \delta^2, \qquad \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} d\mu(\omega) \leq 1.$$

Это выпуклая задача. Сопоставим ей функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} d\mu(\omega) + \lambda_1 \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\mu(\omega) - \frac{\delta^2}{2\pi} \right) +$$

$$\lambda_2 \left(\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} d\mu(\omega) - 1 \right) =$$

$$\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \left(-\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) + \lambda_1 \chi_{[-\sigma,\sigma]} + \lambda_2 t^n(\omega) \right) d\mu(\omega) - \left(\lambda_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \lambda_2 \right),$$

где $\chi_{[-\sigma,\sigma]}$ – характеристическая функция на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.

Легко показать, что если найдутся допустимая в задаче (1.9) мера $d\widehat{\mu}(\cdot) \geq 0$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ такие, что выполнены условия:

$$\min_{d\mu(\cdot) \geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2), \tag{1.10}$$

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\widehat{\mu}(\omega) - \frac{\delta^2}{2\pi} \right) = 0, \qquad \widehat{\lambda}_2 \left(\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) d\widehat{\mu}(\omega) - 1 \right) = 0, \tag{1.11}$$

$$\widehat{\lambda}_1 \geq 0, \widehat{\lambda}_2 \geq 0, \tag{1.12}$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ - решение задачи (1.9). Действительно, для любой допустимой меры $d\mu(\cdot)$ выполняется цепочка неравенств:

$$-\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) d\mu(\omega) \geq -\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) d\mu(\omega) + \widehat{\lambda}_1 \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} d\mu(\omega) - \frac{\delta^2}{2\pi} \right) +$$

$$\widehat{\lambda}_2 \left(\int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) d\mu(\omega) - 1 \right) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) =$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) d\widehat{\mu}(\omega).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) d\widehat{\mu}(\omega) \geq \sum_{k=1}^{n-1} p_k \int_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) d\mu(\omega)$$

для всех допустимых мер $d\mu(\cdot)$, то есть $d\widehat{\mu}(\cdot)$ - решение задачи (1.9).

Рассмотрим подынтегральное выражение в функции Лагранжа

$$g(\omega) = -\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) + \lambda_1 \chi_{[-\sigma,\sigma]} + \lambda_2 t^n(\omega).$$

Для выполнения условия (1.10) необходимо, чтобы $g(\omega) \geq 0$ для всех ω. Сделаем замену $t = t(\omega) \geq 0$. Тогда

$$g(t) = \begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k t^k + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n, & t \in [0; \omega_\sigma] \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k t^k + \widehat{\lambda}_2 t^n, & t \in \left[\omega_\sigma; (2/h)^2\right] \end{cases}.$$

Рассмотрим сначала случай $\sigma \geq \widehat{\sigma}$. Множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_1 \geq 0$ и $\widehat{\lambda}_2 \geq 0$ будем подбирать так, чтобы прямая $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ касалась графика параметически заданной функции

$$\begin{cases} \widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k t^k, \\ x = t^n \end{cases}$$

в единственной точке $x_0 = t_0^n$ (см. рис. 1.1). Из графика функции следует, что $\widehat{\lambda}_1 > 0$ и $\widehat{\lambda}_2 > 0$, где $\widehat{\lambda}_1$ – точка пересечения касательной с осью OY; $\widehat{\lambda}_2$ – угловой коэффициент наклона касательной.

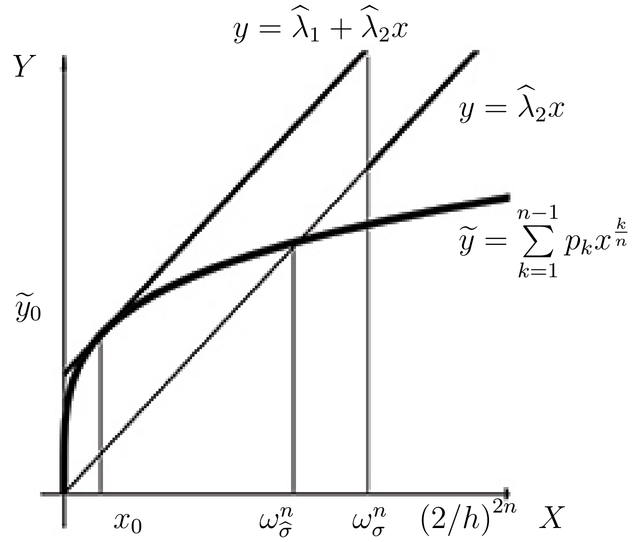

рис. 1.1

Меру $d\widehat{\mu}(\omega)$ сосредоточим в точке касания: $d\widehat{\mu}(\omega) = A\delta(\omega - \omega_0)$, где $\delta(\cdot\ - \omega_0)$– δ–функция в точке ω_0, а ω_0 такова, что $t_0 = \frac{4\sin^2\frac{\omega_0 h}{2}}{h^2}$.

Коэффициент A и точку ω_0 ищем из условий (1.11):

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\widehat{\mu}(\omega) = A = \frac{\delta^2}{2\pi},$$

$$\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) d\widehat{\mu}(\omega) = A\frac{\left|e^{ih\omega_0} - 1\right|^{2n}}{h^{2n}} = At_0^n = A\widetilde{x}_0 = 1.$$

То есть

$$x_0 = t_0^n = \frac{2\pi}{\delta^2},\ \omega_0 = \frac{2}{h}\arcsin\left(\frac{h}{2}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \widetilde{y}'(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\left(x_0\right)^{\frac{k-n}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \widetilde{y}(x_0) - \widehat{\lambda}_2 x_0 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{n-k}{n}\left(x_0\right)^{k/n} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{n-k}{n}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-k/n}.$$

В силу вогнутости функции $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ будет выполняться неравенство $\widetilde{y} \le \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ для всех $x \in [0; \omega_\sigma^n]$. Так как $\sigma \ge \widehat{\sigma}$, $\omega_\sigma^n \ge \omega_{\widehat{\sigma}}^n = t^n(\widehat{\sigma})$, $\omega_{\widehat{\sigma}}^n$– абсцисса точки пересечения графиков функций $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ и $y = \widehat{\lambda}_2 x$, то есть неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n} < \widehat{\lambda}_2 x$ выполняется при $x \in \left(\omega_\sigma^n; (2/h)^{2n}\right]$. Это означает неотрицательность функции $g(t)$ при всех $t \in \left[0; (2/h)^2\right]$ и выполнение условия (1.10).

Мы нашли допустимую меру и коэффициенты $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$, удовлетворяющие условиям (1.10), (1.11) и (1.12), а значит $d\widehat{\mu}(\omega)$– решение задачи (1.9). Значение задачи в этом случае равно

$$\widehat{\lambda}_1 \frac{\delta^2}{2\pi} + \widehat{\lambda}_2 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Пусть теперь $\sigma < \widehat{\sigma}$. Если множители $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ брать также. как и в предыдущем случае, условие $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n} \le \widehat{\lambda}_2 x$ не выполняется при $\omega_\sigma^n < x < \omega_{\widehat{\sigma}}^n$, где $\omega_{\widehat{\sigma}}^n$–точка пересечения прямой $y = \widehat{\lambda}_2 x$ и функции $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ (см. рис. 1.2).

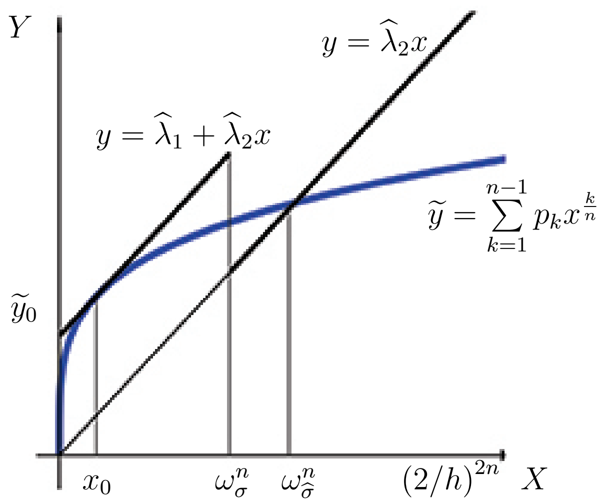

рис. 1.2

Новые значения множителей $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ найдем из выполнения следующих условий: прямая $y = \widehat{\lambda}_2 x$ пересекает график функции $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ в точке $x_\sigma = \omega_\sigma^n$, прямая $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ касается данной функции в точке $x_0 < x_\sigma$ (см.рис. 1.3).

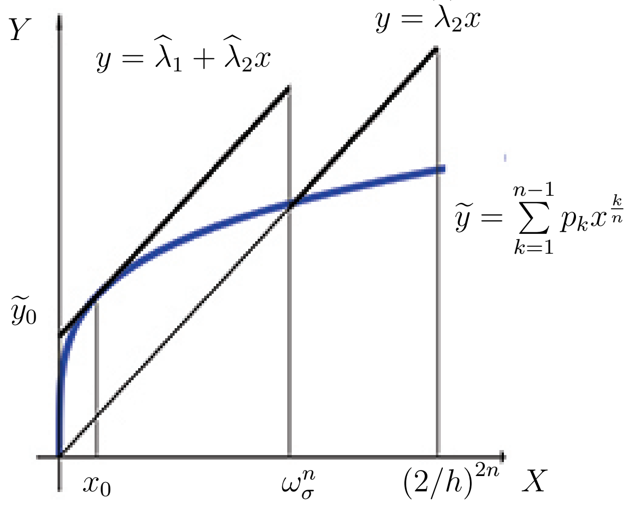

рис. 1.3

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{\widetilde{y}(x_\sigma)}{x_\sigma} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \widetilde{y}'(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n} \left(x_0\right)^{\frac{k-n}{n}} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^{k-n},$$

$$x_0 = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{k-n}} \omega_\sigma^n,$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \widetilde{y}(x_0) - \widehat{\lambda}_2 x_0 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{n-k}{n} \left(x_0\right)^{k/n} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{n-k}{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{k-n}} \omega_\sigma^k.$$

Положим $d\widehat{\mu}(\omega) = A\delta(\omega-\omega_0)+B\delta(\omega-\sigma)$, где ω_0–решение уравнения

$$\frac{4\sin^2 \dfrac{h\omega_0}{2}}{h^2} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \omega_\sigma,$$

$\omega_0 < \sigma$, так как $\sigma < \widehat{\sigma}$. Коэффициенты A и B найдем из условий (1.11):

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} d\widehat{\mu}(\omega) = A = \frac{\delta^2}{2\pi},$$

$$\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) d\widehat{\mu}(\omega) = A\frac{\left|e^{ih\omega_0} - 1\right|^{2n}}{h^{2n}} + B\frac{\left|e^{ih\sigma} - 1\right|^{2n}}{h^{2n}} =$$

$$A\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} \omega_\sigma^n + B\omega_\sigma^n = 1,$$

$$B = \omega_\sigma^{-n} - \frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}.$$

Коэффициенты $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ снова удовлетворяют условиям (1.10), (1.11) и (1.12), то есть $d\widehat{\mu}(\omega)$– решение задачи (1.9). В случае $\sigma < \widehat{\sigma}$ значение задачи (1.9) равно

$$\widehat{\lambda}_1\frac{\delta^2}{2\pi} + \widehat{\lambda}_2 = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{n-k}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}} \omega_\sigma^k + \omega_\sigma^{k-n}\right).$$

Задача (1.9) является расширением задачи (1.8). Очевидно, что значение задачи (1.8) не меньше значения задачи (1.9). Покажем, что значение задачи (1.8) равно значению задачи (1.9), то есть, что значение задачи (1.8) не менее, чем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n}\right), & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{2}{h}\arcsin\left(\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}}\right), & \sigma \geq \widehat{\sigma} \\ \dfrac{2}{h}\arcsin\left(\sin\dfrac{h\sigma}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\right), & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases}.$$

Пусть $\sigma \geq \widehat{\sigma}$. Точка $x_0 = \dfrac{2\pi}{\delta^2}$ - точка касания прямой $y = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 x$ и функции $\widetilde{y} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{\frac{k}{n}}$. В силу монотонности функции $\widetilde{y}$ выполняется двойное неравенство $\omega_\sigma^n \geq \omega_{\widehat{\sigma}}^n > x_0$. Это означает, что аргумент функции арксинус не превышает 1 при $\sigma \geq \widehat{\sigma}$.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Положим $D = \delta\sqrt{m}$. Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\, d\omega = \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\, d\omega = \frac{D^2}{m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\pi;\pi])}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega) D^2 d\omega =$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{h\omega}{2}\right)^n d\omega \leq \frac{\delta^2 2^{2n} \sin^{2n} \dfrac{h\omega_0}{2}}{2\pi h^{2n}} = 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (1.8). Следовательно, при $D = \delta\sqrt{m}$ значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega) \|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^k(\omega) D^2 d\omega =$$

$$= \frac{\delta^2 m}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \frac{4^k}{h^{2k}} \sin^{2k} \frac{h\omega}{2}\, d\omega \geq \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{\delta^2 2^{2k} \sin^{2k} \frac{h\left(\omega_0 - \frac{1}{m}\right)}{2}}{2\pi h^{2k}}.$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \to \infty$ стремится к величине $\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}$.

В случае $\sigma < \widehat{\sigma}$ очевидно, что $\omega_0 < \sigma < \dfrac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$ такую, что

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D_1, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ \\ D_2, & \omega \in [\sigma; \sigma + \frac{1}{m}], \\ \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \cup [\sigma; \sigma + \frac{1}{m}]. \end{cases}$$

Возьмем

$$D_1 = \delta\sqrt{m},\ D_2 = \left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-n} \sqrt{m\left(2\pi - \delta^2 {\omega_\sigma}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}}\right)}$$

.

Тогда

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \|Fx_m(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])}\, d\omega = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} D_1^2\, d\omega = \frac{D_1^2}{m} = \delta^2.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega) D_1^2 d\omega + \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} t^n(\omega) D_2^2 d\omega \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(\delta^2 \left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\omega_0}{2}\right)^{2n} + \frac{D_2^2}{m} \left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}\right)^{2n} \right) = 1.$$

Таким образом, функции $x_m(\cdot)$ также допустимы в задаче (1.8). Значит, при указанных выше значениях δ, D_1 и D_2 значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega)\|Fx_m(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^k(\omega) D_1^2 d\omega + \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} t^k(\omega) D_2^2 d\omega \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \left[\delta^2 \left(\frac{2}{h}\sin\frac{h\left(\omega_0 - \frac{1}{m}\right)}{2} \right)^{2k} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\sin\frac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h} \right)^{-2n} \cdot \left(2\pi - \delta^2 {\omega_\sigma}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{n-k}} \right) \omega_\sigma^k \right].$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m \to \infty$ стремится к величине (1.13).

Таким образом, мы доказали, что

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, F, \overline{\Delta}, \delta) \geq \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi} \right)^{\frac{n-k}{n}} \right)^{1/2}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \omega_\sigma^k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n} + \omega_\sigma^{-n} \right) \right)^{1/2}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Построим оптимальные методы. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\varphi_k(y) = \Lambda_k y$, где $\Lambda_k : \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_k y)(\omega) = \begin{cases} \frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k} \alpha_k(\omega) y(\omega), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}$$

где функция $\alpha_k(\omega) \in \mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma)), \alpha_k(\omega) = 0, \omega \notin (-\sigma;\sigma)$, $1 \leq k \leq n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta_h^k x - \Lambda_k y\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \quad \|Fx(\omega) - y(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \le \delta,$$

$$x \in \mathcal{W}^n_{2,h},\ y \in \mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma]).$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \Big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \Big|^2 d\omega \to \max,$$

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \big| Fx(\omega) - y(\omega)\big|^2 d\omega \le \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \big| Fx(\omega)\big|^2 d\omega \le 1. \quad (1.14)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega)|^2 =$$

$$= |Fx(\omega)(1 - \alpha_k(\omega)) + \alpha_k(\omega)(Fx(\omega) - y(\omega))|^2 =$$

$$= \left| \frac{\alpha_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \big(Fx(\omega) - y(\omega)\big) + \frac{1 - \alpha_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}} \sqrt{\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)} Fx(\omega) \right|^2$$

$$\le q_k(\omega) \left(\widehat{\lambda}_1 |Fx(\omega) - y(\omega)|^2 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) |Fx(\omega)|^2 \right),$$

где

$$q_k(\omega) = \frac{|\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{|1 - \alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}.$$

Учитывая условия в задаче (1.14), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \Big| Fx(\omega) - \alpha_k(\omega) y(\omega) \Big|^2 d\omega \le$$

$$\le \|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))} (\widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2),$$

где

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)q_k(\omega).$$

Если $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\le 1$, то значение задачи (1.14)

$$\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma\ge\widehat{\sigma},\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\omega_\sigma^k\left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\dfrac{n-k}{n}+\omega_\sigma^{-n}\right), & \sigma<\widehat{\sigma}\end{cases},$$

не превосходит

$$\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2\le E^2(\mathcal{W}^n_{2,h},F,\overline{\Delta},\delta). \tag{1.15}$$

Из неравенства (1.15) следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления. Тем самым методы, в которых $a_k(\cdot)$, $k=1,\dots,n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\le 1$, будут оптимальными.

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\le 1$ эквивалентно выражению (1.5) в условии теоремы. Имеем

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)q_k(\omega)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\left(\frac{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\cdot\left|\alpha_k(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right|^2+\frac{1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}\right).$$

Пусть

$$\theta_k(\omega)=\alpha_k(\omega)(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega))-\widehat{\lambda}_1.$$

Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{\mathbb{L}_\infty((-\sigma;\sigma))}\le 1$ эквивалентно условию (1.5).

В силу неотрицательности функции

$$g(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k+\lambda_1\chi_{[-\sigma,\sigma]}+\lambda_2t^n,\quad t\in[0,4/h^2]$$

правая часть неравенства (1.5) неотрицательна.

Верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

Пусть

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(n-1)} \in LAC(\mathbb{R}), f^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

- соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ - множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) : \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1, (Ff)(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ - преобразование Фурье функции f. Будем считать, что дана функция $y(\cdot) \in \mathbb{L}_2([-\sigma; \sigma])$ такая, что

$$\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\sigma;\sigma])} \leq \delta,$$

где $\delta > 0-$ заданная величина погрешности.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x \in \mathcal{W}_{2,h}^n$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} t(\omega) = \omega^2, \ \lim_{h\to 0} \omega_\sigma = \sigma^2,$$

$$\lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}}.$$

Погрешность одновременного оптимального восстановления производных всех порядков $(D^1 f(\cdot),\ D^2 f(\cdot),\ \ldots,\ D^{n-1} f(\cdot))$ функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})$ равна

$$E(\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R}), F, \overline{D}, \delta) = \lim_{h\to 0} E(\mathcal{W}_{2,h}^n, F, \overline{\Delta}, \delta) =$$
$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{1/2}, & \sigma \geq \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \sigma^{2k} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n} + \sigma^{-2n}\right)\right)^{1/2}, & \sigma < \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \end{cases},$$

где $\overline{D} = (D^1,\ D^2,\ \ldots,\ D^{n-1})$.

Все методы $\widehat{\varphi}_k(y) = \begin{cases} \left(F^{-1}\left(\alpha_k(\omega)y(\omega)\right)\right)^{(k)}, & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases}$,
где

$$\alpha_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\omega^n}, & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma;\sigma) \end{cases},$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k\omega^{2k}|\theta_k(\omega)|^2 \le \widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2\omega^{2n}\left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\omega^{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\omega^{2k}\right),$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{k}{n}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma \ge \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\sigma^{2k} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \left(1-\frac{k}{n}\right), & \sigma < \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n} \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{n}}, & \sigma \ge \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\sigma^{2(k-n)}, & \sigma < \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(k-n)}} \end{cases},$$

являются оптимальными, и при $p_k = \begin{cases} 1, & k = r, \\ 0, & k \ne r \end{cases}$ мы получаем результат, аналогичный результату, полученному при восстановлении производной функции порядка r в работе [**13**].

□

Замечание 1. Если преобразование Фурье последовательности с ограниченной $n-$ой разделенной разностью на отрезке $[-\sigma;\sigma]$ известно приближенно, то с увеличением полудлины отрезка σ погрешность оптимального восстановления уменьшается, но лишь до определенного предела: при $\sigma \ge \widehat{\sigma}$ эта погрешность постоянна, то есть за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}]$ информация о преобразовании Фурье последовательности из данного класса не нужна (см.рис. 1.4).

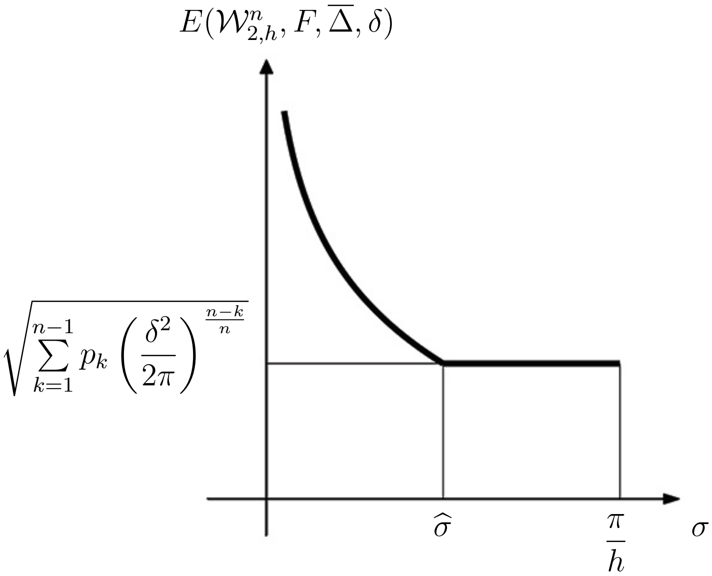

рис. 1.4

Затем рассмотрим задачу одновременного оптимального восстановления операторов всех разностей $(\Delta_h^1 x,\, \Delta_h^2 x,\, \ldots,\, \Delta_h^{n-1} x)$ последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h}$ ([**21**]), при условии, что последовательность x задана неточно, то есть известна последовательность $y \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такая, что

$$\|x - y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления снова рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y),\, \varphi_2(y),\, \ldots,\, \varphi_{n-1}(y)),$$

$$\varphi_k(y) : l_{2,h}(\mathbb{Z}) \to l_{2,h}(\mathbb{Z}), \quad 1 \le k \le n-1.$$

Положим

$$\overline{\Delta} = (\Delta_1,\, \Delta_2,\, \ldots,\, \Delta_{n-1}).$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h},\ y\in l_{2,h}(\mathbb{Z})\\ \|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}p_k\|\Delta^k_hx-\varphi_k(y)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}},$$

где $p=(p_1,p_2,\ldots,p_{n-1})$, $p_k\ge 0$, $1\le k\le n-1$, — весовые коэффициенты.

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta)=\inf_{\varphi:l_{2,h}(\mathbb{Z})\to\left(l_{2,h}(\mathbb{Z})\right)^n}e(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta,\varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

Теорема 1.2. *Пусть $k,n\in\mathbb{N}$, $1\le k\le n-1$ и $\delta>0$. Тогда*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta\ge\left(\dfrac{h}{2}\right)^n,\\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n.\end{cases}$$

При $\delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ метод $\widehat{\varphi}(y)=\Delta^k_hy$ является оптимальным. При $\delta\ge\left(\dfrac{h}{2}\right)^n$ все методы $\widehat{\varphi}_k(y)=\Delta^k_hF^{-1}\big(a_k(\omega)Fy(\omega)\big)$, где

$$a_k(\omega)=\frac{\widehat{\lambda}_1+\theta_k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)},\qquad t(\omega)=\frac{4\sin^2\dfrac{\omega h}{2}}{h^2},\tag{1.16}$$

а $\theta_k(\cdot)$ для почти всех ω удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)|\theta_k(\omega)|^2\le\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)-\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)\right),\tag{1.17}$$

в котором

$$\widehat{\lambda}_1=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{-2\frac{k}{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right),\quad \widehat{\lambda}_2=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{k}{n}\delta^{2\frac{n-k}{n}},$$

являются оптимальными.

Доказательство.

Как и в теореме 1.1, сначала докажем, что

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h} \\ \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}. \tag{1.18}$$

Для любой последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h}$ такой, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta$, и для любого метода φ имеем

$$\left(2\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h(x) - \Delta^k_h(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h(x) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h(-x) - \varphi(0)\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(2\sum_{k=1}^{n-1} \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h} \\ \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta}} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\right)^{1/2} \leq \left(2e^2(\mathcal{W}^n_{2,h}, \delta, \varphi)\right)^{1/2}.$$

То есть, для любого метода φ

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h} \\ \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}}.$$

Отсюда следует неравенство (1.18).

Это означает, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|\Delta^k_h x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \ \|\Delta^n_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1, \ \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta. \tag{1.19}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, перейдем к преобразованию Фурье, применим теорему Планшереля. Задача

(1.19) примет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1} p_k \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2\,d\omega \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\big|Fx(\omega)\big|^2\,d\omega \le \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2\,d\omega \le 1. \quad (1.20)$$

Покажем, что значение задачи (1.20) не менее, чем

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\delta^{\frac{2(n-k)}{n}}, & \delta \ge (\frac{h}{2})^n, \\ \delta^2\sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k\left(\frac{2}{h}\right)^{2k}, & \delta < \left(\frac{h}{2}\right)^n. \end{cases} \quad (1.21)$$

Пусть

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h}\arcsin\left(\frac{h}{2}\delta^{-\frac{1}{n}}\right), & \delta \ge \left(\frac{h}{2}\right)^n \\ \pi/h, & \delta < \left(\frac{h}{2}\right)^n \end{cases}.$$

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которых

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} D, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0], \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Положим $D = \delta\sqrt{2\pi m}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} D^2\,d\omega = \frac{D^2}{2\pi m} = \delta^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^n(\omega)D^2d\omega = \frac{\delta^2 m}{h^{2n}}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\left(4\sin^2\frac{h\omega}{2}\right)^n d\omega \le \frac{\delta^2 2^{2n}\sin^{2n}\dfrac{h\omega_0}{2}}{h^{2n}} \le 1.$$

Тем самым функции $x_m(\cdot)$ допустимы в задаче (1.20). Следовательно, значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^k(\omega)D^2d\omega=\delta^2 m\sum_{k=1}^{n-1}p_k\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\frac{4^k}{h^{2k}}\sin^{2k}\frac{h\omega}{2}\,d\omega$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n-1}p_k\frac{\delta^2 2^{2k}\sin^{2k}\frac{h\left(\omega_0-\frac{1}{m}\right)}{2}}{h^{2k}}$$

Величина, стоящая в правой части этого неравенства при $m\to\infty$ стремится к величине (1.21). Таким образом, доказано, что

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta)\geq\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{\frac{2(n-k)}{n}}\right)^{1/2}, & \delta\geq\left(\dfrac{h}{2}\right)^n,\\ \delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k\left(\dfrac{2}{h}\right)^{2k}\right)^{1/2}, & \delta<\left(\dfrac{h}{2}\right)^n.\end{cases}$$

Займемся теперь построением оптимальных методов. Пусть $\delta\geq(h/2)^n$. Будем искать оптимальные методы среди методов вида $\varphi_k(y)=\Lambda_k y$, где $\Lambda_k:l_{2,h}(\mathbb{Z})\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейный непрерывный оператор, действие которого в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_k y)(\omega)=\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}\alpha_k(\omega)Fy(\omega),$$

где $\alpha_k(\omega)\in\mathbb{L}_\infty([-\pi/h;\pi/h])$ - периодическая функция, $1\leq k\leq n-1$.

Для оценки погрешности таких методов рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_k\parallel\Delta_h^k x-\Lambda_k y\parallel^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\to\max,\quad\|x-y\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leq\delta,$$

$$x\in\mathcal{W}^n_{2,h},\ y\in l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\Big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)Fy(\omega)\Big|^2\,d\omega\to\max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\big|Fx(\omega)-Fy(\omega)\big|^2d\omega\le\delta^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}t^n(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2d\omega\le 1. \tag{1.22}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}&|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)Fy(\omega)|^2\\&\qquad=|Fx(\omega)(1-\alpha_k(\omega))+\alpha_k(\omega)(Fx(\omega)-Fy(\omega))|^2\\&=\left|\frac{\alpha_k(\omega)\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\big(Fx(\omega)-Fy(\omega)\big)+\frac{1-\alpha_k(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}Fx(\omega)\right|^2\\&\qquad\qquad\le\alpha_k(\omega)\left(\widehat{\lambda}_1|Fx(\omega)-Fy(\omega)|^2+\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)|Fx(\omega)|^2\right),\end{aligned}$$

где

$$q_k(\omega)=\frac{|\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1}+\frac{|1-\alpha_k(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2t^n(\omega)}.$$

Учитывая условия в задаче (1.22), имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^k(\omega)\Big|Fx(\omega)-\alpha_k(\omega)Fy(\omega)\Big|^2\,d\omega\\&\qquad\qquad\le\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])}(\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2),\end{aligned}$$

где

$$Q(\omega)=\sum_{k=1}^{n-1}p_kt^k(\omega)q_k(\omega).$$

Если $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])}\le 1$, то значение задачи (1.22) не превосходит

$$\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2=\sum_{k=1}^{n-1}p_k\delta^{2\frac{n-k}{n}}\le E^2(\mathcal{W}^n_{2,h},\overline{\Delta},\delta). \tag{1.23}$$

Из неравенства (1.23) следует оценка сверху погрешности оптимального восстановления при $\delta \geq (h/2)^n$:

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h}, \overline{\Delta}, \delta) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \delta^{2\frac{n-k}{n}}}.$$

Тем самым методы, в которых $\alpha_k(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n-1$, выбраны так, что $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \leq 1$, будут оптимальными.

Покажем. что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \leq 1$ эквивалентно выражению (1.16) в условии теоремы. Имеем

$$Q(\omega) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) q_k(\omega)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \left(\frac{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)}{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)} \cdot \left| \alpha_k(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)} \right|^2 + \frac{1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)} \right).$$

Положим

$$\theta_k(\omega) = \alpha_k(\omega)(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)) - \widehat{\lambda}_1.$$

Тогда условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \leq 1$ эквивалентно условию (1.17).

Покажем, что выражение, стоящее в правой части неравенства (1.17), неотрицательно. Рассмотрим функцию

$$g(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 t^n, \quad t \in [0, 4/h^2],$$

и параметрически заданную кривую

$$\begin{cases} x = t^n, \\ y = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k t^k. \end{cases}$$

Функция $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k x^{k/n}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leq \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ - касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \leq (2/h)^{2n}$. Если построить касательную в точке $x_0 = \delta^{-2}$, то значения коэффициентов касательной равны

$k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_1$. Это означает, что $g(t) \geq 0$. Так как $\widehat{\lambda}_1 > 0, \widehat{\lambda}_2 > 0$, правая часть неравенства (1.17) неотрицательна.

При $\delta < (h/2)^n$ рассмотрим метод $\widehat{\varphi}(y) = \Delta_h^k y$. Тогда

$$F\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k} Fy(\omega).$$

Оценим его погрешность. Переходя к образам Фурье, аналогично (1.22) получаем следующую задачу

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \Big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \Big|^2 d\omega \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \big|^2 d\omega \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} t^n(\omega) \big| Fx(\omega) \big|^2 d\omega \leq 1. \tag{1.24}$$

Учитывая условия в задаче (1.24), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega) \Big| Fx(\omega) - Fy(\omega) \Big|^2 d\omega \leq \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^k(\omega)$$

$$\leq \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} p_k \left(\frac{2}{h}\right)^{2k} = E^2(\mathcal{W}_{2,h}^n, \overline{\Delta}, \delta).$$

Снова верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, что доказывает оптимальность метода.

□

Глава 2

Восстановление оператора разделенной разности последовательности по её преобразованию Фурье в равномерной норме

В данной главе решается задача восстановления самой последовательности или ее k-ой разделенной разности, $1 \leq k \leq n-1$, в среднеквадратичной норме по неточно заданному на интервале преобразованию Фурье данной последовательности в равномерной норме на классе последовательностей с ограниченной n-ой разделенной разностью. Формулировка и доказательство теоремы изложены автором в работе [**23**].

Рассмотрим класс последовательностей

$$\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathcal{W}^n_{2,h} : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\}.$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ приближенно известно её преобразование Фурье на множестве $(-\sigma;\sigma)$, $\sigma \leq \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma;\sigma)$, то есть известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности $k-$ го порядка последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Любое отображение

$$\varphi(y) : \ L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$$

объявляем методом восстановления и погрешностью этого метода называем величину

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})\\ y\in L_\infty(-\sigma;\sigma)\\ \|(Fx)(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)}\le\delta}} \|(\Delta^k_h x) - \varphi(y(\cdot))\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Нас интересует величина

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta) = \inf_{\varphi\colon L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и метод φ, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

Положим

$$t(\omega) = \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^2}{h^2} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\omega}{2}}{h}\right)^2,$$

$\widehat{\sigma}$– решение уравнения $\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega = \dfrac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$.

Теорема 2.1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h, \end{cases}$$

где

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^k(\omega)d\omega + \omega_{\sigma_0}^{k-n}\left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^n(\omega)d\omega\right),$$

$$\omega_{\sigma_0} = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma_0}{2}}{h}\right)^2.$$

При $\sigma_0 < \pi/h$ метод $\widehat{\varphi}(y)$ такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| \le \sigma_0 \\ 0, & |\omega| > \sigma_0 \end{cases},$$

где

$$\alpha(\omega) = \left(1 - \left(\frac{t(\omega)}{\omega_{\sigma_0}}\right)^{n-k}\right) \cdot \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k},$$

является оптимальным. При $\sigma_0 = \pi/h$ метод $\widehat{\varphi}(y)$ такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k} y(\omega),$$

является оптимальным.

Доказательство.

Сначала докажем неравенство

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta) \ge \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) \\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta}} \|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \tag{2.25}$$

Для любой последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned} 2\|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \\ \|\Delta^k_h(x) - \Delta^k_h(-x) + \varphi(0) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \\ \|\Delta^k_h(x) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \|\Delta^k_h(-x) - \varphi(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \\ 2e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

То есть, для любого метода φ

$$e(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta^k_h, \delta, \varphi) \ge \sup_{\substack{x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}) \\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta}} \|\Delta^k_h x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (2.25).

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Из доказанного неравенства следует, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \tag{2.26}$$

$$\|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1, \ \|(Fx)(\omega)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta.$$

Перейдем к квадрату задачи (2.26) и запишем её в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2m}}{h^{2m}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \to \max, \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \leq 1, \ \left|(Fx)(\omega)\right|^2 \leq \delta^2$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma;\sigma)$, $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$.

Можно показать, что задача (2.27) не имеет решения, поэтому для нахождения ее значения, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим расширенный вариант данной задчи, сделав замену

$$d\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \geqslant 0,$$

где мера $d\mu(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на множестве $(-\sigma;\sigma)$ и $p(\cdot)$ – её производная. Тогда задача (2.27) примет вид:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}}\,d\mu\to\min,\tag{2.28}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}\,d\mu\le 1,\ p(\omega)\le\frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Сопоставим этой задаче функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda_1(\omega),\lambda_2)=-\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{i\omega h}-1\right|^{2k}}{h^{2k}}d\mu(\omega)+$$

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma}\lambda_1(\omega)\left(p(\omega)-\frac{\delta^2}{2\pi}\right)d\omega+\lambda_2\left(\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{i\omega h}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}d\mu(\omega)-1\right)=$$

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left(-t^k(\omega)+\lambda_1(\omega)\chi_{(-\sigma,\sigma)}+\lambda_2t^n(\omega)\right)d\mu(\omega)-$$

$$\left(\int\limits_{|\omega|<\sigma}\lambda_1(\omega)\frac{\delta^2}{2\pi}\,d\omega+\lambda_2\right),$$

где $\chi_{(-\sigma,\sigma)}$ – характеристическая функция на интервале $(-\sigma,\sigma)$.

Если найдутся неотрицатеьная ограниченная функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ на $[-\pi/h,\pi/h]$, число $\widehat{\lambda}_2\ge 0$ и допустимая в задаче (2.28) мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ с производной $\widehat{p}(\cdot)$ на интервале $(-\sigma;\sigma)$, для которых выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\omega),\widehat{\lambda}_2)\ge\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\omega),\widehat{\lambda}_2)\tag{2.29}$$

для всех функций мер $d\mu(\cdot)\ge 0$, которые абсолютно непрерывны на $(-\sigma;\sigma)$, а также соотношения

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma}\widehat{\lambda}_1(\omega)\left(\widehat{p}(\omega)-\frac{\delta^2}{2\pi}\right)d\omega=0,\tag{2.30}$$

$$\widehat{\lambda}_2 \int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)d\widehat{\mu}(\omega) = 1, \qquad (2.31)$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ - решение задачи (2.28). Убедимся в этом. Для любой допустимой меры $d\mu(\cdot)$ выполняется цепочка неравенств:

$$-\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)d\mu(\omega) \ge$$

$$-\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)d\mu(\omega) + \int\limits_{|\omega|<\sigma} \widehat{\lambda}_1(\omega)\left(p(\omega)-\frac{\delta^2}{2\pi}\right)d\omega +$$

$$\widehat{\lambda}_2\left(\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)d\mu(\omega)-1\right) =$$

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\omega),\widehat{\lambda}_2) \ge \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\omega),\widehat{\lambda}_2) = -\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\widehat{\mu}(\omega),$$

то есть $d\widehat{\mu}(\cdot)$ - решение задачи (2.28).

Предъявим $d\widehat{\mu}(\cdot)$, $\widehat{\lambda}_1 \ge 0$ и $\widehat{\lambda}_2 \ge 0$, удовлетворяющие условиям (2.29) , (2.30) и (2.31). Пусть $\widehat{\sigma}-$ решение уравнения $\int\limits_{|\omega|<\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega = \frac{2\pi}{\delta^2}$.

Рассмотрим случай $\sigma \ge \widehat{\sigma}$. Меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ определим так, чтобы ее производная была равна

$$\widehat{p}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}) \\ 0, & \widehat{\sigma} \le |\omega| \le \pi/h \end{cases}.$$

Тогда функция Лагранжа принимает вид

$$\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}_1(\omega),\widehat{\lambda}_2) = \int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \left(-t^k(\omega)+\widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})}+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\right)d\widehat{\mu}(\omega) -$$

$$\left(\int\limits_{|\omega|<\sigma} \widehat{\lambda}_1(\omega)\frac{\delta^2}{2\pi}\,d\omega + \widehat{\lambda}_2\right).$$

Рассмотрим первую подынтегральную функцию

$$g(\omega) = -t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})} + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_2 = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\widehat{\sigma}}{2}}{h} \right)^{2(k-n)} \geq 0,$$

$$\widehat{\lambda}_1(\omega) = \begin{cases} t^k(\omega) - \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega), & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}) \\ 0, & \widehat{\sigma} \leq |\omega| \leq \pi/h \end{cases}.$$

Функция $\psi(\omega) = t^{k-n}(\omega)-$ четная, неотрицательная, неубывающая для всех ω (см.рис 2.1).

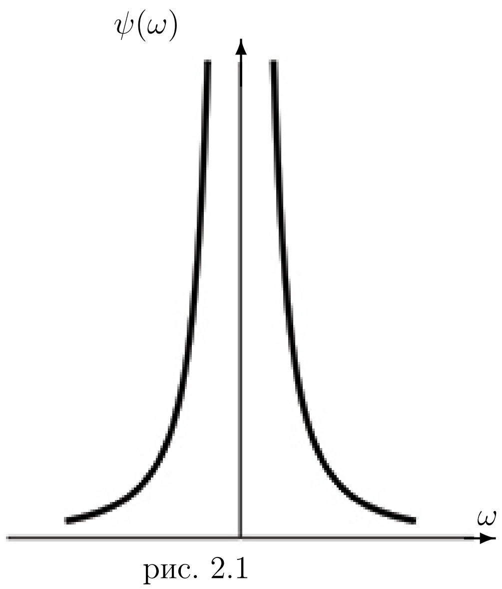

рис. 2.1

В силу монотонного неубывания данной функции выполняется неравенство

$$\widehat{\lambda}_1(\omega) = t^k(\omega) - \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) = t^k(\omega) - t^n(\omega)\left(\frac{2\sin\dfrac{h\widehat{\sigma}}{2}}{h}\right)^{2(k-n)} =$$

$$t^n(\omega)\left(t^{k-n}(\omega) - \left(\frac{2\sin\dfrac{h\widehat{\sigma}}{2}}{h}\right)^{2(k-n)}\right) \geq 0,$$

следовательно, $g(\omega) \geq 0$.

Поскольку множители $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям (2.29), (2.30) и (2.31), мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (2.28), значит, указанная мера – решение задачи (2.28). Значение задачи в этом случае равно

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma} \widehat{\lambda}_1(\omega)\frac{\delta^2}{2\pi}\,d\omega + \widehat{\lambda}_2 =$$

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma}\left(t^k(\omega) - t^n(\omega)\left(\frac{2\sin\dfrac{h\widehat{\sigma}}{2}}{h}\right)^{2(k-n)}\right)d\omega + \left(\frac{2\sin\dfrac{h\widehat{\sigma}}{2}}{h}\right)^{2(k-n)} = \Omega$$

при $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$.

Пусть $\sigma < \widehat{\sigma}, \sigma < \pi/h$. Если задать $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и $\widehat{p}(\cdot)$, как в предыдущем случае, условие (2.31) не будет выполняться. Поэтому положим

$$\widehat{p}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\sigma; \sigma) \\ 0, & \sigma \leq |\omega| \leq \pi/h \end{cases},$$

$$d\widehat{\mu}(\omega) = \widehat{p}(\omega)d\omega + A\delta(\omega - \sigma) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{2\pi}d\omega, & \omega \in (-\sigma; \sigma) \\ A\delta(\omega - \sigma)d\omega, & \sigma \leq |\omega| \leq \pi/h \end{cases},$$

где $\delta(\cdot - \sigma)$ – $\delta-$ функция в точке σ. Очевидно, что условие (2.30) выполнено. Коэффициент A найдем из усдовия (2.31):

$$\int\limits_{|\omega|\leq \pi/h} t^n(\omega) d\widehat{\mu}(\omega) = \int\limits_{|\omega|<\sigma} \frac{\delta^2}{2\pi} t^n(\omega) d\omega + \int\limits_{\sigma\leq|\omega|\leq \pi/h} A\delta(\omega-\sigma) t^n(\omega) d\omega =$$

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma} t^n(\omega) d\omega + A\sigma^{2n} = 1,$$

$$A = \sigma^{-2n} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma} t^n(\omega) d\omega \right).$$

Аналогично предыдущему случаю положим

$$\widehat{\lambda}_2 = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h} \right)^{2(k-n)} \geq 0,$$

$$\widehat{\lambda}_1(\omega) = \begin{cases} t^k(\omega) - \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega), & \omega \in (-\sigma;\sigma) \\ 0, & \sigma \leq |\omega| \leq \pi/h \end{cases}.$$

Проверим выполнение условия (2.29).

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\omega), \widehat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\omega), \widehat{\lambda}_2) \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \left(-t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})} + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \right) d\ \mu(\omega) \geq$$

$$\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \left(-t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})} + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \right) d\widehat{\mu}(\omega).$$

Рассмтрим левую часть неравенства:

$$\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \left(-t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})} + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \right) d\ \mu(\omega) =$$

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma} \left(-t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})} + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \right) d\ \mu(\omega) +$$

$$\int\limits_{\sigma\leq|\omega|\leq\pi/h.} \left(-t^k(\omega) + \widehat{\lambda}_2 t^n(\omega) \right) d\ \mu(\omega).$$

В силу выбора $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ подынтегральная функция первого интеграла равна 0. В силу монотонного убывания функции $\psi(\cdot)$ подынтегральная функция второго интеграла неотрицательна. Таким образом, левая часть неравенства неотрицательна.

Рассмтрим правую часть неравенства:

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \left(-t^k(\omega)+\widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})}+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\right)d\widehat{\mu}(\omega)=$$

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma} \left(-t^k(\omega)+\widehat{\lambda}_1(\omega)\chi_{(-\widehat{\sigma},\widehat{\sigma})}+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\right)\frac{\delta^2}{2\pi}d(\omega)+$$

$$\int\limits_{\sigma\le|\omega|\le\pi/h.} \left(-\omega_h^k+\widehat{\lambda}_2 t^n(\omega)\right)d\widehat{\mu}(\omega)=$$

$$A\left(-\left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h}\right)^{2k}+\widehat{\lambda}_2\left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h}\right)^{2n}\right)=0,$$

что означает выполнение условия (2.29).

Так же, как и в предыдущем случае, $\widehat{\lambda}_1(\omega)\ge 0$, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (2.28), условия (2.29), (2.30) и (2.31) выполнены, следовательно, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ – решение задачи (2.28). Значение задачи в случае $\sigma<\widehat{\sigma}, \sigma<\pi/h$ равно

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma}\widehat{\lambda}_1(\omega)\frac{\delta^2}{2\pi}\,d\omega+\widehat{\lambda}_2=$$

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma}\left(t^k(\omega)-t^n(\omega)\left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h}\right)^{2(k-n)}\right)d\omega+\left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h}\right)^{2(k-n)}=\Omega$$

при $\sigma_0=\sigma$.

В случае $\sigma=\pi/h<\widehat{\sigma}$ положим

$$\widehat{p}(\omega)=\frac{\delta^2}{2\pi},\ d\widehat{\mu}(\omega)=\widehat{p}(\omega)d\omega,\ \omega\in[-\pi/h;\pi/h],$$

$$\widehat{\lambda}_1(\omega)=t^k(\omega),\ \widehat{\lambda}_2=0.$$

Очевидно, что условия (2.29), (2.30) и (2.31) выполнены, мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (2.28) и является ее решением . Значение задачи в случае $\sigma = \pi/h$ равно

$$\int\limits_{|\omega|<\sigma} \widehat{\lambda}_1(\omega)\frac{\delta^2}{2\pi}\,d\omega + \widehat{\lambda}_2 = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)d\omega.$$

Очевидно, что значение задачи (2.27) не меньше значения задачи (2.28). Покажем, что значение задачи (2.27) равно значению задачи (2.28).

Пусть $\sigma \ge \widehat{\sigma}$. Покажем, что значение задачи (2.27) не меньше,чем

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\,\widehat{\sigma}} t^k(\omega)d\omega.$$

Введем функцию $p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big|(Fx)(\omega)\Big|^2 d\omega \ge 0$, тогда задача (2.27) принимает вид

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)p(\omega)d\omega \to \max; \tag{2.32}$$

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)p(\omega)d\omega \le 1,\ p(\omega) \le \frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Положим $\widehat{p}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\widehat{\sigma};\widehat{\sigma}),\\ 0, & \widehat{\sigma} \le |\omega| \le \pi/h. \end{cases}$

Так как

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)\widehat{p}(\omega)d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\,\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega = 1,$$

то функция $\widehat{p}(\omega)$ допустима в задаче (2.32). То есть, значение этой задачи не меньше, чем

$$\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\widehat{p}(\omega)d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\,\widehat{\sigma}} t^k(\omega)d\omega.$$

При $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ имеем, что

$$E^2(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta_h^k, \delta) \geq \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\widehat{\sigma}} t^k(\omega) d\omega,$$

то есть получена оценка снизу при $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$.

Рассмотрим случай $\sigma < \widehat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$.

Положим

$$S(m) = \sqrt{\pi m \left(\frac{2 \sin \frac{h\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)}{2}}{h} \right)^{-2n} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\sigma} t^n(\omega) d\omega \right)}.$$

Пусть m достаточно большое натуральное число такое, что выполняется неравенство $\sigma + \frac{1}{m} < \frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ S(m), & \sigma < |\omega| < \sigma + \frac{1}{m}, \\ 0, & \sigma + \frac{1}{m} \leq |\omega| < \pi/h. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{1}{2\pi}\left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 \leq \dfrac{\delta^2}{2\pi}$ выполнено для всех $|\omega| < \sigma$. Далее, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} t^n(\omega) \left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2 \int\limits_0^\sigma t^n(\omega) d\omega + 2S^2(m) \int\limits_\sigma^{\sigma+\frac{1}{m}} t^n(\omega) d\omega \right) \leq$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\delta^2 \int\limits_0^\sigma t^n(\omega) d\omega + \pi m \left(\frac{2 \sin \frac{h\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)}{2}}{h} \right)^{-2n} \cdot \right.$$

$$\left. \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int\limits_0^\sigma t^n(\omega) d\omega \right) \cdot \frac{1}{m} \left(\frac{2 \sin \frac{h\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)}{2}}{h} \right)^{2n} \right) = 1.$$

То есть, последовательность функций x_m допустима в задаче (2.27). Значение этой задачи не менее величины

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(2\delta^2\int\limits_0^{\sigma} t^k(\omega)d\omega + 2S^2(m)\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\frac{1}{m}} t^k(\omega)d\omega\right) \ge$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\delta^2\int\limits_0^{\sigma} t^k(\omega)d\omega + \pi m\left(\frac{2\sin\dfrac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{-2n}\cdot\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} t^n(\omega)d\omega\right)\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{2\sin\dfrac{h\left(\sigma+\frac{1}{m}\right)}{2}}{h}\right)^{2k}\right).$$

При $m\to\infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\Omega = \left(\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} t^k(\omega)d\omega + \left(\frac{2\sin\dfrac{h\sigma}{2}}{h}\right)^{2(k-n)}\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} t^n(\omega)d\omega\right)\right).$$

Тем самым, мы показали, что при $\sigma<\widehat{\sigma}$, $\sigma<\pi/h$ справедливо неравенство $E^2(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}),\Delta^k_h,\delta)\ge\Omega$.

В случае $\sigma=\dfrac{\pi}{h}<\widehat{\sigma}$ положим $(Fx)(\omega)=\delta$, $|\omega|<\dfrac{\pi}{h}$. Тогда, поскольку выполнено равенство $\dfrac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\widehat{\sigma}} t^n(\omega)d\omega=1$, $\widehat{\sigma}>\dfrac{\pi}{h}$, функция $t^n(\omega)$ неотрицательная, то выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^n(\omega)d\omega<1.$$

Это означает, что последовательность функций x_m допустима в задаче (2.27) и значение задачи не менее величины

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\,d\omega.$$

Тем самым мы показали, что

$$E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), \Delta_h^k, \delta) \geq \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\dfrac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} t^k(\omega) d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h. \end{cases}$$

Пусть $\sigma_0 = min(\sigma, \widehat{\sigma})$, $\sigma_0 < \pi/h$. Покажем, что метод $\widehat{\varphi} : L_\infty(-\sigma;\sigma) \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega) y(\omega), & |\omega| < \sigma_0, \\ 0, & |\omega| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Для оценки оптимальной погрешности восстановления разделенных разностей рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Delta_h^k x - \widehat{\varphi}_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to max, \; \|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta,$$
$$x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), y \in L_\infty(-\sigma;\sigma). \quad (2.33)$$

В образах Фурье квадрат задачи принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \left| \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \alpha(\omega) y(\omega) \right|^2 d\omega +$$
$$+ \int\limits_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2k}}{h^{2k}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \Bigg) \to max, \quad (2.34)$$

$$\left|Fx(\omega) - y(\omega)\right|^2 \leq \delta^2$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma, \sigma)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}} \left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega \leq 1.$$

Положим $z(\omega) = Fx(\omega) - y(\omega), |z(\omega)| \le \delta$. Тогда максимизируемое выражение можно представить в виде

$$D = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \left|\big(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)\big)\cdot Fx(\omega) + \alpha(\omega)z(\omega)\right|^2 d\omega + \int\limits_{\sigma_0\le|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega\Bigg) \to max.$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши-Буняковского:

$$\left|\big(\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)\big)\cdot Fx(\omega) + \alpha(\omega)z(\omega)\right|^2 =$$

$$\left|\frac{\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_1(\omega)}Fx(\omega) + \frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_2(\omega)}z(\omega)\right|^2 \le$$

$$\Bigg(\frac{|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}\Bigg)\cdot\Big(\widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2 + \widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2\Big),$$

где $\widehat{\lambda}_1(\omega) > 0, \widehat{\lambda}_2(\omega) > 0$ для почти всех $\omega < \sigma_0$.

Пусть

$$Q(\omega) = \frac{|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)} \le 1. \qquad (2.35)$$

Тогда значение задачи не больше, чем

$$D \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \widehat{\lambda}_1(\omega)|Fx(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \widehat{\lambda}_2(\omega)|z(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0\le|\omega|\le\pi/h} t^k(\omega)\big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega.$$

Пусть

$$\widehat{\lambda}_1(\omega) = \frac{t^n(\omega)}{\omega_{\sigma_0}^{n-k}},\ \widehat{\lambda}_2(\omega) = t^k(\omega) - \widehat{\lambda}_1(\omega).$$

Тогда

$$D \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \frac{t^n(\omega)}{\omega_{\sigma_0}^{n-k}} |Fx(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} t^k(\omega) |z(\omega)|^2 d\omega -$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|<\sigma_0} \frac{t^n(\omega)}{\omega_{\sigma_0}^{n-k}} |z(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\ge\sigma_0} t^k(\omega) \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega.$$

Учитывая, что функция $\psi(\omega) = t^{k-n}(\omega)$ неотрицательная, четная и убывающая при $\omega > 0$, оценим последний интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_0 \le |\omega| \le \pi/h} t^k(\omega) \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_0 \le |\omega| \le \pi/h} t^{k-n}(\omega) \cdot t^n(\omega) \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega \le$$

$$\frac{1}{2\pi} \omega_{\sigma_0}^{k-n} \int\limits_{\sigma_0 \le |\omega| \le \pi/h} t^n(\omega) \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega.$$

Тогда

$$D \le \omega_{\sigma_0}^{k-n} \Bigg(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^n(\omega) \big|Fx(\omega)\big|^2 d\omega -$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^n(\omega) |z(\omega)|^2 d\omega \Bigg) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_0 \le |\omega| \le \pi/h} t^k(\omega) |z(\omega)|^2 d\omega.$$

Учитывая условия в задаче (2.34), получаем:

$$D \le \omega_{\sigma_0}^{k-n} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^n(\omega) d\omega \right) + \frac{\delta^2}{2\pi} \int\limits_{|\omega| < \sigma_0} t^k(\omega) d\omega.$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{\varphi}$ - оптимальный.

Покажем, что условие (2.35) выполнимо. Пусть

$$\alpha(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_2(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega) + \widehat{\lambda}_2(\omega)} \cdot \frac{\left(e^{ih\omega} - 1\right)^k}{h^k}.$$

Тогда

$$Q(\omega)=\frac{|\dfrac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}-\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_1(\omega)}+\frac{|\alpha(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_2(\omega)}=\frac{t^k(\omega)}{\widehat{\lambda}_1(\omega)+\widehat{\lambda}_2(\omega)}=1$$

и условие выполняется.

Покажем, что при $\sigma=\frac{\pi}{h}<\widehat{\sigma}$ метод $\widehat{\varphi}: L_\infty(-\sigma;\sigma)\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$, такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y)=\frac{\left(e^{ih\omega}-1\right)^k}{h^k}y(\omega),\ |\omega|<\frac{\pi}{h}$$

оптимален. В этом случае квадрат задачи (2.34) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}y(\omega)\right|^2d\omega\to max,\quad(2.36)$$

$$|Fx(\omega)-y(\omega)|^2\le\delta^2$$

для почти всех $\omega\in(-\pi/h,\pi/h)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2n}}{h^{2n}}\left|Fx(\omega)\right|^2d\omega\le 1.$$

Учитывая ограничения в задаче (2.36), оценим первый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega)-\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}y(\omega)\right|^2d\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}t^k(\omega)\left|Fx(\omega)-y(\omega)\right|^2d\omega\le\frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}t^k(\omega)d\omega.$$

Верхняя и нижняя оценки снова совпали, метод оптимален. $\square$

Пусть

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R})=\{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}):f^{(n-1)}\in LAC(\mathbb{R}),f^{(n)}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\}$$

- соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ - множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}) : \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1, (Ff)(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ - преобразование Фурье функции f. Будем считать, что дана функция $y(\cdot) \in L_\infty(-\sigma;\sigma)$ такая, что

$$\|(Ff)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \le \delta,$$

где $\delta > 0-$ заданная величина погрешности.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x \in \mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z})$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0} t(\omega) = \omega^2,$$

$$\lim_{h\to 0} \widehat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

Погрешность оптимального восстановления функции f или ее производной $k-$ го порядка равна

$$E(\mathbb{W}^n_{2,\infty}(\mathbb{R}), \Delta^k_h, \delta) = \lim_{h\to 0} E(\mathcal{W}^n_{2,h,\infty}(\mathbb{Z}), D^k, \delta) =$$

$$\begin{cases} \delta\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma \ge \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}}, \\ \delta\sqrt{\left(\frac{\delta^2\sigma^{(2k+1)}}{\pi(2k+1)} + \sigma^{2(k-n)}\left(1 - \left(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}}\right)^{(2n+1)}\right)\right)}, & \sigma < \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n+1}}. \end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi}(y)$ такой, что

$$F\widehat{\varphi}(y) = \begin{cases} \omega^{2k}\left(1 - \left(\frac{\sigma_0}{\omega}\right)^{2(k-n)}\right) y(\omega), & \omega \in (-\sigma_0;\sigma_0) \\ 0, & \omega \notin (-\sigma_0;\sigma_0), \end{cases}$$

является оптимальным, и мы получаем результат, аналогичный результату, полученному в работе [**11**].

Глава 3

Восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям других порядков

В этой главе изучается задача восстановления оператора k-ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям $k_1, k_2, \ldots k_n$ порядков. В данной главе используются результаты, опубликованные автором в работах [**22, 25, 26**]. Результат, полученный в диссертации, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [**18**]. Перед формулировкой теоремы, как и в предыдущих главах, введем некоторые обозначения.

Как и ранее, $l_{2,h}(\mathbb{Z}), h > 0$, –пространство всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \ldots, k_n$ порядков ($0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_n$), то есть известны последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, что

$$\|\Delta_h^{k_j}x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-той разделенной разности $\Delta_h^k x \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$ последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi:\ (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью этого метода называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \overline{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\, j=1,\dots,n}} \|\Delta_h^k x - \varphi(\overline{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \overline{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Погрешность оптимального восстановления будет значением экстремальной задачи

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi),$$

а метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань – оптимальный метод.

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_1 < k_2 < \dots \le k_n$, $\delta > 0$.

Положим

$$M = co\,\{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \le j \le n\} + \{(t, t \ln \frac{h}{2}) : \, t \ge 0\},$$

где $co\,A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством

$$\theta(k) = \max\{x : \, (k, x) \in M\},$$

причем $\theta(k) = -\infty$, если $(k, x) \notin M$, $\forall x$. На промежутке $[k_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ – вогнутая ломаная. Пусть $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots k_{s_r}$ – ее точки излома (см. рисунок 3.1). Очевидно, что $k_{s_1} = k_1$, и $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots k_{s_r}$ – подмножество точек $k_1, k_2, \dots k_n$ (см. рисунок 3.1).

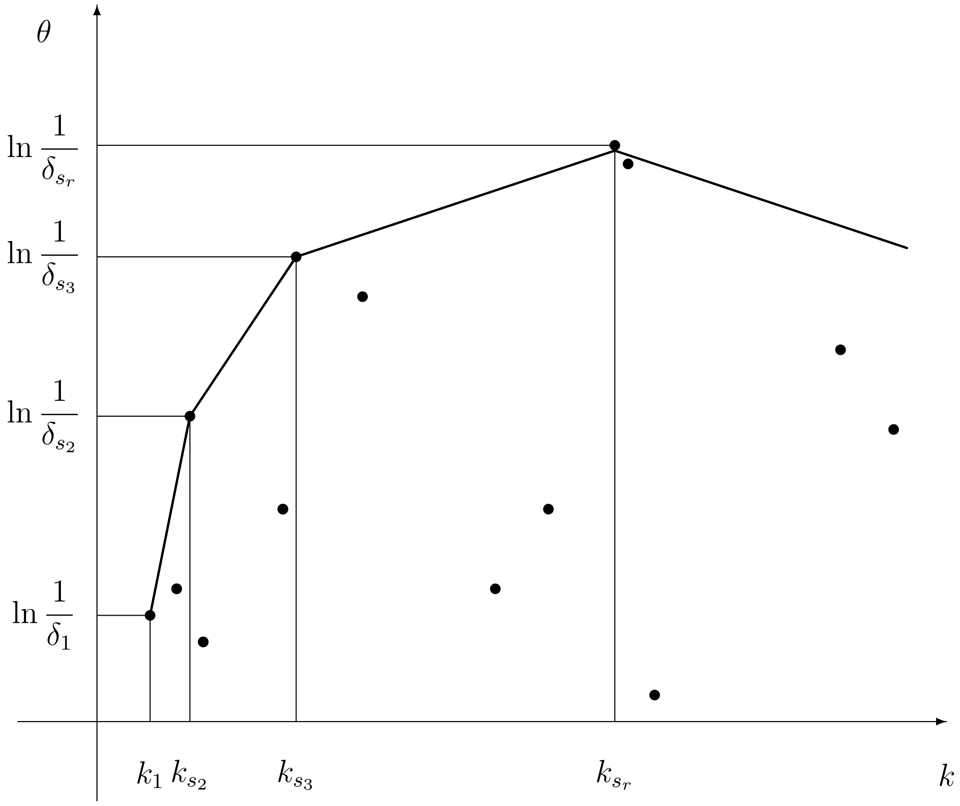

рис. 3.1

Пусть

$$t(\omega) = \left(\frac{2\sin\dfrac{h\omega}{2}}{h} \right)^2,$$

$$\widehat{\lambda}_{s_{jL}} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_{jR}} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}.$$

Теорема 3.1. *Для любого $k \geq 0$ погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(k)}. \tag{3.37}$$

(1) *Если $k_1 > 0$, $0 \leq k < k_1$, то любой метод является оптимальным;*

(2) *если $k = k_{s_j}$, $1 \leq j \leq r$, то метод $\widehat{\varphi}$ такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = y_{s_j},$$

является оптимальным;

(3) *если $r \geq 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq r-1$, то любой метод вида $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \beta_{s_jL} * y_{s_j} + \beta_{s_jR} * y_{s_{j+1}}$ является оптимальным, где $\beta_{s_jL}, \beta_{s_jR}$ - последовательности, преобразование Фурье которых удовлетворяет условиям:*

$$\left|(F\beta_{s_jL})(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}\left(\dfrac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega) + \widehat{\lambda}_{s_jL}}\right| \leq$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega)}}{\widehat{\lambda}_{s_jR} + \widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k}(\omega) + \widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k}(\omega) - 1},$$

$$(F\beta_{s_jR})(\omega) = \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}} - \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}\alpha_{s_jL}(\omega),$$

является оптимальным,

(4) *если $k > k_{s_r}$, то метод $\widehat{\varphi}$ такой, что*

$$\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r},$$

является оптимальным.

Доказательство.

Как и при доказательстве предыдущих теорем, начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления

$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta})$. Точно такие же рассуждения показывают, что эта величина не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \tag{3.38}$$

$$\|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, n.$$

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (3.38) равен значению такой задачи:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^k(\omega) \big|(Fx)(\omega)\big|^2 \, d\omega \to \max, \tag{3.39}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^{k_j}(\omega) \big|(Fx)(\omega)\big|^2 \, d\omega \le \delta_j^2,\ j = 1, \dots, n.$$

Покажем, что значение задачи (3.39) не меньше, чем $e^{-\theta(k)}$. Рассмотрим 3 случая :

(a) $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$, $1 \le j \le r - 1$,

(b) $k \ge k_{s_r}$,

(c) $k < k_1$.

(a) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим прямую $p(k)$, проходящую через точки $(k_{s_j}, \ln \frac{1}{\delta_{s_j}})$ и $(k_{s_{j+1}}, \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}})$:

$$p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{s_j}} \cdot \frac{k - k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} + \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}} \cdot \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}.$$

По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j}), j = 1, \dots, n$ лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой $p(k)$.

Положим

$$\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin\left(\frac{h}{2} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{1}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}\right),$$

$$S(m) = \sqrt{2\pi m}\, \delta_{s_j}^{\frac{k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \ \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}.$$

Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} S(m), & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^{k_j}(\omega) \big|(Fx_m)(\omega)\big|^2 \, d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k_j}(\omega)\, d\omega \le$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2 \sin \dfrac{\omega_0 h}{2}}{h} \right)^{2k_j} = e^{-2 \ln p(k_j)} \le e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, j = 1, \ldots, n,$$

то последовательность функций x_m допустима в задаче (3.39). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^{k}(\omega) \big|(Fx_m)(\omega)\big|^2 \, d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k}(\omega)\, d\omega \ge$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2 \sin \frac{(\omega_0 - \frac{1}{m})h}{2}}{h} \right)^{2k}.$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $\delta_{s_j}^{2\frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}$. Мы получили, что значение задачи не менее величины $e^{-2p(k)} = e^{-2\theta(k)}$.

(b) Рассмотрим случай $k \ge k_{s_r}$, где k_{s_r} – последняя точка излома функции $\theta(\cdot)$. На участке $[k_{s_r}, +\infty)$ графиком этой части функции является наклонная $p(k) = \ln \dfrac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \dfrac{h}{2}$, это означает, что для любых точек $(k_j, \ln \dfrac{1}{\delta_j}), j = 1, \ldots, n$ верно неравенство $\ln \dfrac{1}{\delta_j} \le \ln \dfrac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \dfrac{h}{2}$. Положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \arcsin h/2, & \dfrac{h}{2} \le 1 \\ \dfrac{\pi}{h}, & \dfrac{h}{2} > 1 \end{cases}$$

и рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta_{s_r} \left(\dfrac{2}{h}\right)^{k-k_{s_r}} \sqrt{2\pi m}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Та как выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^{k_j}(\omega) \big|(Fx_m)(\omega)\big|^2 \, d\omega =$$

$$\frac{\delta_{s_r}^2 2\pi m}{2\pi} \cdot \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k_j}(\omega) \, d\omega \le$$

$$\frac{\delta_{s_r}^2 m}{m} \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega_0 h}{2}}{h}\right)^{2k_j} \le \delta_{s_r}^2 \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} =$$

$$e^{-2\left(\ln \frac{1}{\delta_{s_r}} + (k-k_{s_r}) \cdot \ln \dfrac{h}{2}\right)} \le e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_i}} = \delta_i^2, j = 1, \dots, n,$$

последовательность функций x_m допустима в задаче (3.39). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \pi/h} t^{k}(\omega) \big|(Fx_m)(\omega)\big|^2 \, d\omega =$$

$$\frac{\delta_{s_r}^2 2\pi m}{2\pi h} \cdot \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k}(\omega) \, d\omega \ge$$

$$\frac{\delta_{s_r}^2 m}{m} \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} \left(\frac{2 \sin \frac{(\omega_0 - \frac{1}{m})h}{2}}{h}\right)^{2k}.$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\delta_{s_r}^2 \cdot \left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} = e^{-2(\ln \frac{1}{\delta_{s_r}} + (k-k_{s_r}) \ln \frac{h}{2})} = e^{-2p(t)} = e^{-2\theta(k)}.$$

(c) Пусть $k < k_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (3.39) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Очевидно, что существует прямая $x = ak + b$, $a > 0$, $a \ge \ln h/2$, разделяющая точку $(k, -x_0)$ и множество $M:$

$$-ak-x_0 \geq b \geq -ak_j+\ln\frac{1}{\delta_j}, j=1,\ldots,n.$$

Пусть

$$\omega_0=\frac{2}{h}\arcsin\left(\frac{he^{-a}}{2}\right).$$

Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega)=\begin{cases} e^{-b}\sqrt{2\pi m}, & \omega\in[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0]\\ 0, & \omega\notin[\omega_0-\frac{1}{m};\omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} t^{k_j}(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega=$$

$$\frac{e^{-2b}2\pi m}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k_j}(\omega)\,d\omega\leq$$

$$\frac{e^{-2b}m}{m}\cdot\left(\frac{2\sin\left(\frac{\omega_0 h}{2}\right)}{h}\right)^{2k_j}=e^{-2b}\cdot e^{-2ak_j}\leq e^{-2\ln\frac{1}{\delta_j}}=\delta_j^2, j=1,\ldots,n,$$

последовательность функций x_m допустима в задаче (3.39). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} t^{k}(\omega)\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega=$$

$$\frac{e^{-2b}2\pi m}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0} t^{k}(\omega)\,d\omega\geq$$

$$\frac{e^{-2b}m}{m}\cdot\left(\frac{2\sin\frac{(\omega_0-\frac{1}{m})h}{2}}{h}\right)^{2k}.$$

При $m\to\infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $e^{-2b-2ak}\geq e^{2x_0}$. В силу произвольности x_0 значение задачи (3.39) равно $+\infty$.

Тем самым, мы показали, что для всех $k \geq 0$ погрешности оптимального восстановления

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq e^{-\theta(k)}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Также рассмотрим 3 случая.

(a) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \Lambda_{s_jL} y_{s_j} + \Lambda_{s_jR} y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_jL}, \Lambda_{s_jR} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейные непрерывные операторы, действие которых имеет вид:

$$\Lambda_{s_jL} y_{s_j} = \beta_{s_jL} * y_{s_j},\ \Lambda_{s_jR} y_{s_{j+1}} = \beta_{s_jR} * y_{s_{j+1}},$$

где $\beta * y$ - свертка последовательностей y и $\beta \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$.

Для оценки оптимальной погрешности рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Delta_h^k x - \Lambda_{s_jL} y_{s_j} - \Lambda_{s_jR} y_{s_{j+1}}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to max, \tag{3.40}$$

$$\|\Delta_h^{k_j} x - y_j(\cdot)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j,\ j = 1, \ldots, n, x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}), y \in l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

В образах Фурье задача принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \left(F\left(\beta_{s_jL} * y_{s_j}\right)\right)(\omega) - \right. \tag{3.41}$$

$$\left. \left(F\left(\beta_{s_jR} * y_{s_{j+1}}\right)\right)(\omega) \right|^2 d\omega \to max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^{k_j}}{h^{k_j}} Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega) \right|^2 d\omega \leq \delta_j^2, j = 1, \ldots, n.$$

Положим

$$z_j(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^{k_j}}{h^{k_j}} Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega), j = 1, \ldots, n,$$

$$\alpha_{s_jL}(\omega) = \left(F\beta_{s_jL}\right)(\omega),\ \alpha_{s_jR}(\omega) = \left(F\beta_{s_jR}\right)(\omega).$$

Если $\Delta_h^{k_{s_j}}$ и $\Delta_h^{k_{s_{j+1}}}$ известны точно, то оптимальный метод должен давать точный результат:

$$\Delta_h^k x = \Lambda_{s_jL}\Delta_h^{k_{s_j}} x + \Lambda_{s_jR}\Delta_h^{k_{s_{j+1}}} x,$$

$$\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}(Fx)(\omega) = \tag{3.42}$$

$$\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}} \alpha_{s_jL}(\omega)(Fx)(\omega) + \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_{j+1}}} \alpha_{s_jR}(\omega)(Fx)(\omega),$$

тогда подынтегральную функцию максимизируемого выражения можно представить в виде

$$\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega) - \alpha_{s_jL}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \alpha_{s_jR}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) =$$

$$\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega),$$

и задача (3.41) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2 d\omega \to max, \tag{3.43}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} \left|z_j(\omega)\right|^2 d\omega \le \delta_j^2, j = 1, \ldots, n.$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши-Буняковского:

$$\left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2 \le$$

$$\left(\frac{|\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}} + \frac{|\alpha_{s_jR}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_{s_jL}|z_{s_j}(\omega)|^2 + \widehat{\lambda}_{s_jR}|z_{s_{j+1}}(\omega)|^2\right).$$

Пусть

$$Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}} + \frac{|\alpha_{s_jR}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}}.$$

Тогда, если выполняется условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])}\le 1$, значение задачи не больше, чем

$$D=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega)+\alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2d\omega\le$$

$$\widehat{\lambda}_{s_jL}\delta_{s_j}^2+\widehat{\lambda}_{s_jR}\delta_{s_{j+1}}^2.$$

Подставим значения $\widehat{\lambda}_{s_jL}\ge 0,\widehat{\lambda}_{s_jR}\ge 0$. Тогда

$$D\le\delta_{s_j}^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}=e^{-2\theta(k)}=E^2(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta}).$$

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])}\le 1$ выполнимо. Из равенства (3.42) вытекает, что

$$\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}=\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}}\alpha_{s_jL}(\omega)+\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_{j+1}}}\alpha_{s_jR}(\omega),$$

$$\alpha_{s_jR}(\omega)=\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}}-\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}\alpha_{s_jL}(\omega).$$

Тогда

$$Q(\omega)=\frac{\left|\alpha_{s_jL}(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}}+\frac{\left|\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}}-\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}\alpha_{s_jL}(\omega)\right|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}}=$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_{s_jR}+\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR}}\left|\alpha_{s_jL}(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jL}}\right|^2+$$

$$\frac{t^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_jR}+\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)}.$$

Очевидно,что для всех функций $\alpha_{s_jL}(\omega)$, для которых выполняется условие

$$\left|\alpha_{s_jL}(\omega)-\frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jL}}\right|\le$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega)}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}+\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)}\cdot\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}t^{k_{s_j}-k}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k}(\omega)-1}$$

при указанных $\widehat{\lambda}_{s_{jL}}, \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \leq 1.$$

В частности, можно положить

$$\alpha_{s_{jL}}(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega) + \widehat{\lambda}_{s_{jL}}}.$$

Покажем, что подкоренное выражение неотрицательно. Рассмотрим функцию

$$\psi(\xi) = \widehat{\lambda}_{s_{jL}} \xi^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \xi^{k_{s_{j+1}}-k} - 1.$$

Так как

$$\psi''(\xi) = (k_{s_j} - k)(k_{s_j} - k - 1)\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \xi^{k_{s_j}-k-1} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \xi^{k_{s_{j+1}}-k} \geq 0$$

при всех $\xi > 0$, функция $\psi(\xi)$ выпукла и достигает наименьшего значения в единственной точке $\xi_0 > 0$, то есть $\psi(\xi) \geq \psi(\xi_0)$ при всех $\xi > 0$. При указанных выше значениях $\widehat{\lambda}_{s_{jL}}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{jR}}$ $\psi(\xi_0) = 0$, что говорит о неотрицательности подкоренного выражения при всех значениях ω.

(b) Пусть $k \geq k_{s_r}$. Оптимальный метод будем искать в виде $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{k_{s_r}}$. Для оценки оптимальной погрешности рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Delta_h^k x - \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{k_{s_r}}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to max, \tag{3.44}$$

$$\|\Delta_h^{k_j} x - y_j(\cdot)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j,\ j = 1, \ldots, n,\ x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}),\ y \in l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \left| \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^k Fx(\omega) - \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_r}} (Fy_{s_r})(\omega)\right|^2 d\omega \to max, \tag{3.45}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega|\leq\pi/h} \left| \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_j} Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega)\right|^2 d\omega \leq \delta_j^2, j = 1, \ldots, n.$$

Оценим максимизируемое выражение, учитывая условия задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^k Fx(\omega)-\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_r}}(Fy_{s_r})(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h} t^{k-k_{s_r}}(\omega)\left|\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_r}} Fx(\omega)-(Fy_{s_r})(\omega)\right|^2 d\omega \le$$

$$\delta_{s_r}^2\left(\frac{2}{h}\right)^{2(k-k_{s_r})} = e^{-2\theta(k)} = E^2(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta}).$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{\varphi}$ - оптимальный.

(c) Пусть $k < k_1$. Поскольку в этом случае значение задачи (3.39) равно $+\infty$, любой метод оптимален.

Заметим, что, в пределе при $h\to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x\in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{ih\omega}-1}{h} = i\omega,\ \lim_{h\to 0} t(\omega)=\omega^2.$$

Предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для восстановления k-ой производной функции по приближенно известным производным других порядков, полученным в работе [**18**]:

$$\lim_{h\to 0}\alpha_{s_jL} = \lim_{h\to 0}\frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR}t^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}(\omega)+\widehat{\lambda}_{s_jL}} = \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL}(i\omega)^{k-k_{s_j}}}{\widehat{\lambda}_{s_jL}+\widehat{\lambda}_{s_jR}\omega^{2(k_{s_{j+1}}-k_{s_j})}} =$$

$$(i\omega)^k\frac{(k_{s_{j+1}}-k)\delta_{s_{j+1}}^2(-i\omega)^{k_{s_j}}}{(k_{s_{j+1}}-k)\delta_{s_{j+1}}^2\omega^{2k_{s_j}}+(k-k_{s_j})\delta_{s_j}^2\omega^{2k_{s_{j+1}}}},$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\alpha_{s_{jR}} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k-k_{s_{j+1}}} - \left(\frac{e^{ih\omega}-1}{h}\right)^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}} \alpha_{s_{jL}}(\omega) = \\
(i\omega)^{k-k_2} - (i\omega)^{k_{s_j}-k_2}\lim_{h\to 0}\alpha_{s_{jL}} = \\
(i\omega)^{k-k_2} - \frac{(i\omega)^{k+k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(k_{s_{j+1}}-k)\delta^2_{s_{j+1}}(-i\omega)^{k_{s_j}}}{(k_{s_{j+1}}-k)\delta^2_{s_{j+1}}\omega^{2k_{s_j}} + (k-k_{s_j})\delta^2_{s_j}\omega^{2k_{s_{j+1}}}} = \\
(i\omega)^k \frac{(k-k_{s_j})\delta^2_{s_j}(-i\omega)^{k_2}}{(k_{s_{j+1}}-k)\delta^2_{s_{j+1}}\omega^{2k_{s_j}} + (k-k_{s_j})\delta^2_{s_j}\omega^{2k_{s_{j+1}}}}.
\end{aligned}
$$

□

Глава 4

Восстановление производной функции по неточно заданным производным других порядков и самой функции

В заключительной главе рассматривается задача одновременного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. В данной главе используются результаты, опубликованные автором в работах [**24, 27**].

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно}$$
$$\text{непрерывна, } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны её производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, то есть известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j,\ j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2.$$

Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) =$$

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \ge 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3\to(L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

Теорема 4.1. *Если $\delta_1 \ge \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}, \tag{4.46}$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1 \frac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2 \frac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s-n_2} \alpha_s(\xi) Fy_2(\xi), s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} - p_1\xi^{2k_1} - p_2\xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$*– произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$*, удовлетворяющие условию*

$$p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi) \le 1,$$

является оптимальным.

Доказательство.

Сначала рассмотрим задачу оптимального восстановления производных k_1-го и k_2-го порядков в общем виде, без ограничений на погрешности. Докажем, что имеет место неравенство

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}. \tag{4.47}$$

Для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ такой, что выполнены условия $\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j$, $j = 0, 1, 2$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned} 2\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} = \\ \Big(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot) - (-x)^{(k_1)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \\ p_2\|x^{(k_2)}(\cdot) - (-x)^{(k_2)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\Big)^{1/2} \le \\ \left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|x^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} + \\ \left(p_1\|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \le \\ 2e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi). \end{aligned}$$

То есть, для любого метода φ выполняется

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Отсюда следует неравенство (4.47).

Это означает, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sqrt{p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}\to\max,$$
$$\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\quad j=0,1,2. \quad (4.48)$$

Перейдем к квадрату задачи (4.48), запишем её в образах Фурье. Применив теорему Планшереля, приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2})|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2n_j}|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\le\delta_j^2,\quad j=0,1,2. \quad (4.49)$$

Как и при доказательстве предыдущих теорем, расширим эту задачу, перейдя от функций к неотрицательным мерам

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2})\,d\mu(\xi)\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2n_j}\,d\mu(\xi)\le\delta_j^2,\quad j=0,1,2,\quad d\mu(\xi)=|(Fx)(\xi)|^2\,d\xi\ge0. \quad (4.50)$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\overline{\lambda})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(-p_1\xi^{2k_1}-p_2\xi^{2k_2}+\lambda_0+\lambda_1\xi^{2n_1}+\lambda_2\xi^{2n_2})\,d\mu(\xi),$$

где $\overline{\lambda}=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$.

По теореме Каруша-Куна-Таккера для нахождения решения достаточно найти такие неотрицательные множители Лагранжа

$\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ и допустимую в задаче (4.50) меру $d\widehat{\mu}(\cdot) \geq 0$, для которых выполняются условия:

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2), \tag{4.51}$$

$$\widehat{\lambda}_j \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_j}\, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{4.52}$$

Теперь докажем теорему 4.1. Пусть

$$\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}. \tag{4.53}$$

Положим $\lambda_1 = 0$ и рассмотрим функцию $y = y(x)$, заданную параметрически

$$\begin{cases} y = p_1\xi^{2k_1} + p_2\xi^{2k_2}, \\ x = \xi^{2n_2}. \end{cases}$$

В предыдущих главах мы убедились, что это вогнутая функция при $x \in [0, +\infty)$. Касательная к графику этой функции в точке $x_0 = \xi_0^{2n_2}$ будет иметь вид $y = \lambda_0 + \lambda_2 x$, где

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) p_1 x_0^{\frac{k_1}{n_2}} + \left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right) p_2 x_0^{\frac{k_2}{n_2}}, \\ \lambda_2 &= \frac{k_1}{n_2} p_1 x_0^{\frac{k_1}{n_2}-1} + \frac{k_2}{n_2} p_2 x_0^{\frac{k_2}{n_2}-1}. \end{aligned}$$

Тем самым в силу вогнутости для всех $\xi \in \mathbb{R}$ будет выполнено неравенство

$$-p_1\xi^{2k_1} - p_2\xi^{2k_2} + \lambda_0 + \lambda_1\xi^{2n_1} + \lambda_2\xi^{2n_2} \geq 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \overline{\lambda}) \geq 0$ для любой неотрицательной меры $d\mu(\xi)$. Положим $d\mu_0(\xi) = 2\pi\delta_0^2\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция в нуле, а

$$\xi_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{1/n_2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_j}\, d\mu_0(\xi) = \delta_j^2, \quad j = 0, 2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1}\, d\mu_0(\xi) = \delta_0^2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2n_1/n_2} = \delta_2^{\frac{2n_1}{n_2}} \delta_0^{2-\frac{2n_1}{n_2}} \le \delta_1^2.$$

Таким образом, $d\mu_0(\cdot)$ — допустимая мера, выполнены условия (4.52) и $\mathcal{L}(d\mu_0(\cdot), \overline{\lambda}) = 0$. Отсюда вытекает, что $d\mu_0(\cdot)$ является решением экстремальной задачи (4.49).

Покажем, что решение задачи (4.50) не меньше величины $\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \end{cases}$$

где $\xi_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n_2}}$, $D(m) = \delta_0\sqrt{2\pi m}$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D^2(m)\, d\xi \le$$

$$\frac{1}{2\pi m}\cdot D^2(m) = \delta_0^2,$$

и, учитывая условие $\delta_1 \ge \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{2n_1} D^2(m)\, d\xi \le$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi m}\cdot \xi_0^{2n_1} \le \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_2}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi \le \frac{D^2(m)}{2\pi m}\cdot \xi_0^{2n_2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4.49). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}p_1\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_1}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi+\frac{1}{2\pi}p_2\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_2}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi=$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\Big(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2}\Big)\,d\xi\geq$$

$$\delta_0^2\Bigg(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k_1}+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k_2}\Bigg).$$

При $m\to\infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к величине

$$Q=\delta_0^2\Bigg(p_1\bigg(\frac{\delta_2}{\delta_0}\bigg)^{2\frac{k_1}{n_2}}+p_2\bigg(\frac{\delta_2}{\delta_0}\bigg)^{2\frac{k_2}{n_2}}\Bigg)=\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_0&=p_1\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_1}{n_2}}\big(1-\frac{k_1}{n_2}\big)+p_2\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_2}{n_2}}\big(1-\frac{k_2}{n_2}\big),\\ \widehat{\lambda}_2&=p_1\frac{k_1}{n_2}\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_1-n_2}{n_2}}+p_2\frac{k_2}{n_2}\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_2-n_2}{n_2}}.\end{aligned}\tag{4.54}$$

То есть в случае $\delta_1\geq\delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta})\geq\sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Оптимальные методы в общем случае будем искать среди методов $\widehat{\varphi}(\overline{Y})=(\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}),\widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ вида $\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}(\cdot))=\Lambda_0^s y_0(\cdot)+\Lambda_1^s y_1(\cdot)+\Lambda_2^s y_2(\cdot)$, где $\Lambda_j^s: L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, $j=0,1,2$, $s=1,2$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_j^s y_j)(\cdot)=\alpha_j^s(\cdot)(Fy_j)(\cdot),\ j=0,1,2,\ s=1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)\in\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})$.

Для оценки оптимальной погрешности для фиксированных $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{s=1}^{2} \left(p_s \|x^{(k_s)}(\cdot) - \sum_{j=0}^{2} \Lambda_j^s y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \right) \to max,$$

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2,\ s = 1, 2.$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left(p_s \int\limits_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) Fy_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \to \max, \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi) \right|^2 d\xi \leq \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2.$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - Fy_j(\xi), j = 0, 1, 2.$$

Задача (4.55) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left(p_s \int\limits_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \to \max, \quad (4.56)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| z_j(\xi) \right|^2 d\xi \leq \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2.$$

В случае $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ положим

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right),\ \alpha_1^s(\xi) = 0,\ \alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi),\ s = 1, 2.$$

Задача (4.56) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi\le\delta_j^2,\ j=0,1,2.$$

Оценим подынтегральные функции с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2=$$

$$\xi^{2k_s}\left|\frac{1-\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_0}}\sqrt{\widehat{\lambda}_0}\cdot z_0(\xi)+\frac{(i\xi)^{-n_2}\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\cdot z_2(\xi)\right|^2\le$$

$$\xi^{2k_s}\left(\frac{\left|1-\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{\left|\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_0\left|z_0(\xi)\right|^2+\widehat{\lambda}_2\left|z_2(\xi)\right|^2\right),\ s=1,2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi\right)\le$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_s}\left(\frac{\left|1-\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{\left|\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\left|z_0(\xi)\right|^2+\widehat{\lambda}_2\left|z_2(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

Если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{\left|1-\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{\left|\alpha_s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\le 1, \tag{4.57}$$

справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi\le$$

$$\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2,$$

то есть оценка сверху совпадает с оценкой снизу, что означает оптимальность метода. Покажем, что множество оптимальных методов не пусто. Из условия (4.57) найдем ограничения на $\alpha_s(\xi)$ и построим явно какой-либо из методов.

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)=$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}\cdot\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2+\frac{\sum\limits_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\le 1$$

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2\le$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}{\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}\right)^2}\cdot\left(\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}-\sum_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}\right)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi)=-p_1\xi^{2k_1}-p_2\xi^{2k_2}+\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2},\quad \xi\ge 0,$$

и параметрически заданную кривую (см. рис. 4.1):

$$\begin{cases} x=\xi^{2n_2},\\ y=p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2}.\end{cases}$$

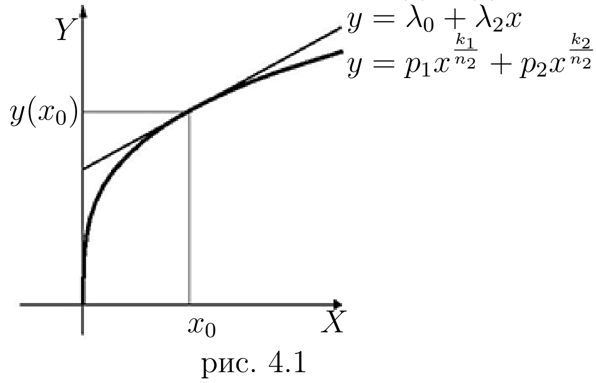

рис. 4.1

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leq \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ - касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$ Построим касательную в точке $x_0 = \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2$. Значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_0$. График функции $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ расположен ниже прямой $y \leq \widetilde{y} = \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 x$. Это означает, что $g(\xi) \geq 0$, то есть

$$\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^{2} p_s \xi^{2k_s} \geq 0.$$

Положим

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

тогда условие (4.57) выполняется при всех $\theta_s(\xi) \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условию

$$p_1 \xi^{2k_1} \theta_1^2(\xi) + p_2 \xi^{2k_2} \theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в частности, при $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi) = 0$.

$\square$

Положим

$$
\begin{aligned}
W =& \sqrt{p_1^2\delta_0^2 + 2p_1p_2\delta_1^2 + p_2^2\delta_2^2}, \\
\widehat{\lambda}_0 =& \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1 + p_2\frac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases}, \\
\widehat{\lambda}_1 =& \begin{cases} 0, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases}, \\
\widehat{\lambda}_2 =& \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\frac{\delta_0}{\delta_2} + 3p_2\right), & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},
\end{aligned}
$$

.

Теорема 4.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k_1 = k$, $n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$. Тогда*

$$
E(\mathcal{W}_2^{4k}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0 + p_2\delta_2}, & \delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \sqrt{\delta_1 W}, & \delta_1 \leq \sqrt{\delta_0\delta_2}. \end{cases}
$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ такой, что его преобразование Фурье

$$
F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) F y_j(\xi), s = 1, 2,
$$

где $\alpha_j^s(\cdot)-$ *любые функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие в случае* $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_0 - \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$\alpha_1^s(\xi) = 0,$$

$$\alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-5)k} \cdot \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{8k} + \theta_s(\xi)\xi^{4k}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k} - p_1\xi^{2k} - p_2\xi^{6k}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{8k}},$$

$$s = 1, 2,$$

а $\theta_s(\cdot)-$ *произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию*

$$p_1\xi^{2k}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{6k}\theta_2^2(\xi) \leq 1,$$

в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}, s = 1, 2, \\ p_1\left(\sum_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) + p_2\left(\sum_{j=0}^{2}\dfrac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) \leq 1 \end{cases},$$

является оптимальным .

Доказательство.

В случае $\delta_1 \geq \sqrt{\delta_0\delta_2}$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.1.

Пусть

$$\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}. \tag{4.58}$$

Покажем, что в этом случае погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\sqrt{\delta_1 W}$. Пусть

$$\Delta_0 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad P = \frac{p_1^2}{p_2^2},$$

$$\xi_0 = \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} \right)^{1/k} =$$

$$\left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 - \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2} \right)^{\dfrac{1}{4k}}, \tag{4.59}$$

$$\xi_1 = \left(\frac{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} \right)^{1/k} =$$

$$\left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 + \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2} \right)^{\dfrac{1}{4k}}, \tag{4.60}$$

$$D_1(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}},\ D_2(m) = \sqrt{2\pi m \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}}}.$$

Подкоренное выражение в равенствах (4.59) и (4.60) положительно, т.к. из (4.58) следует, что $\Delta_0\Delta_2 > 1$, и, следовательно,

$$\Delta_2 + P\Delta_0 \geq 2\sqrt{\Delta_2 P\Delta_0} \geq 2\sqrt{P}.$$

Тем самым доказано, что $\xi_0 < \xi_1$.

Покажем, что

$$\frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2 > 0$$

или $\Delta_0\xi_1^{4k} > 1$. Это неравенство можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} > 1.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > \Delta_2 - P\Delta_0.$$

Если правая часть этого неравенства отрицательна, то оно очевидно выполнено, а если правая часть неотрицательна, то неравенство выполнено в силу очевидного соотношения

$$(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P > (\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P\Delta_0\Delta_2 = (\Delta_2 - P\Delta_0)^2.$$

Осталось показать, что

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^{4k}}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^2\xi_1^{4k} - \delta_1^2}{\xi_1^{4k} - \xi_0^{4k}} > 0.$$

Нетрудно убедиться, что для доказательства этого неравенства достаточно убедиться в справедливости неравенства $\Delta_0\xi_0^4 < 1$, которое можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} < 1.$$

Доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > P\Delta_0 - \Delta_2,$$

которое фактически уже было доказано.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D_1(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ D_2(m), & \xi \in [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \cup [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1]. \end{cases}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} D_1^2(m)\, d\xi + \int\limits_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} D_2^2(m)\, d\xi\right) \leq$$
$$\frac{D_1^2(m) + D_2^2(m)}{2\pi m} = \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{4k}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{4k}D_1^2(m)\,d\xi + \int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^{4k}D_2^2(m)\right) \le$$

$$\frac{D_1^2(m)\xi_0^{4k}+D_2^2(m)\xi_1^{4k}}{2\pi m} = \frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{4k}+\delta_1^2\xi_1^{4k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)} = \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{8k}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{8k}D_1^2(m)\,d\xi + \int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^{8k}D_2^2(m)\right) \le$$

$$\frac{D_1^2(m)\xi_0^{8k}+D_2^2(m)\xi_1^{8k}}{2\pi m} = \frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^{8k}\xi_1^{4k}-\delta_1^2\xi_0^{8k}+\delta_1^2\xi_1^{8k}-\delta_0^2\xi_0^{4k}\xi_1^{8k}\right)}{2\pi m\left(\xi_1^{4k}-\xi_0^{4k}\right)} =$$

$$\delta_1^2\left(\xi_1^{4k}+\xi_0^{4k}\right)-\delta_0^2\frac{p_1^2}{p_2^2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4.49). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}\left(p_1\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi + p_2\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{6k}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(D_1^2(m)\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi + D_2^2(m)\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\left(p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}\right)d\xi\right) \ge$$

$$\frac{D_1^2(m)\left(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)+D_2^2(m)\left(p_1\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{2k}+p_2\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^{6k}\right)}{2\pi m}.$$

При $m\to\infty$ данная дробь стремится к величине

$$Q = \frac{W^2}{p_2\left(\xi_0^{2k}+\xi_1^{2k}\right)} = \delta_1 W = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при указанных выше значениях ξ_0, ξ_1 и

$$\widehat{\lambda}_0 = \frac{p_1^2\delta_1}{2W},\quad \widehat{\lambda}_1 = \frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W},\quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{p_2^2\delta_1}{2W}.$$

То есть в случае $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta}) \ge \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Перейдем к построению оптимальных методов. При $k_1 = k, n_1 = 2k$, $k_2 = 3k$, $n_2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ задача (4.56) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{(2s-1)k}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{2kj}Fx(\xi)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max, \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j=0,1,2.$$

В случе $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$, возьмем такие $\alpha_j^s(\xi)$, $s = 1, 2$, чтобы они удовлетворяли условию

$$\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{(2s-1)k}.$$

Задача (4.56) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\to\max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j=0,1,2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского для оценки подынтегральных функций:

$$\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 = \left|\sum_{j=0}^{2}\frac{\alpha_j^s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_j}}\sqrt{\widehat{\lambda}_j}\cdot z_j(\xi)\right|^2 \le$$
$$\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right),\ s=1,2.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leq$$
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

При выполнении условия

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\leq 1, \tag{4.62}$$

также выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right)\leq\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2,$$

то есть указанные методы оптимальны. Докажем, что множество оптимальных методов также не пусто. Пусть

$$\alpha_j^s(\xi)=\frac{\widehat{\lambda}_j\,(i\xi)^{(2s-1)k}\,(-i\xi)^{2kj}}{\sum\limits_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}},$$

тогда условие $\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2kj}\alpha_j^s(\xi)=(i\xi)^{(2s-1)k}$, $s=1,2$, выполняется. Покажем, что условие (4.62) также выполняется.

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}=\frac{p_1\xi^{2k}+p_2\xi^{6k}}{\sum\limits_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\xi^{4kj}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_1(\xi)=-p_1\xi^{2k}-p_2\xi^{6k}+\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_1\xi^{4k}+\widehat{\lambda}_2\xi^{8k}=$$
$$\frac{p_1^2\delta_1}{2W}-p_1\xi^{2k}+\frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1W}\xi^{4k}-p_2\xi^{6k}+\frac{p_2^2\delta_1}{2W}\xi^{8k}=$$
$$\frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi_0^{4k}\xi_1^{4k}-2\xi_0^{2k}\xi_1^{2k}\xi^{2k}+\left(\xi_0^{4k}+4\xi_0^{2k}\xi_1^{2k}+\xi_1^{4k}\right)\xi^{4k}-\right.$$
$$\left.-\left(\xi_0^{2k}+\xi_1^{2k}\right)\xi^{6k}+\xi^{8k}\right)=\frac{p_2^2\delta_1}{2W}\left(\xi^{2k}-\xi_0^{2k}\right)^2\left(\xi^{2k}-\xi_1^{2k}\right)^2\geq 0,$$

это означает что

$$\frac{p_1\xi^{2k} + p_2\xi^{6k}}{\sum\limits_{j=0}^{2} \widehat{\lambda}_j \xi^{4kj}} \leq 1,$$

условие (4.62) выполнено, множество оптимальных методов не пусто.

$\square$

Литература

[1] Колмогоров А. Н., “О наилучшем приближении функций заданного функционального класса”, *Ann. Math.*, **37**, 107–110 (В “А. Н. Колмогоров. Избранные труды, том 1. Математика и механика”, с. 209–212).

[2] Никольский С. М. Квадратурные формулы, М.: Наука, 1988.

[3] Смоляк С. А., *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[4] Осипенко К. Ю., “Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек ”, *Матем. заметки*, **19**:1, (1976), 29–40.

[5] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[6] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. *Berlin: Springer–Verlag,* V. 1129, (1985), P. 21–93.

[7] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in hilbert spaces from inaccurate data *SIAM J. Numer. Anal.* , V. 16, (1979), P. 87–105.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В.М. “Оптимальное восстановление и теория экстремума”, *Докл. РАН*, **379**:2 (2001), 161–164.

[9] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2011 (3-е изд.)

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[11] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[12] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Мат. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[13] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации”, *Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум*, 2, (2009), 158—192.

[14] Введенская Е. В., Осипенко К. Ю.“ Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно “, *Математические заметки* , (2012), **92**:4, 18–29.

[15] Чудова С. С. “ Оптимальное восстановление разностей последовательностей “, *Вестник ТГУ: Сер. естеств. и техн. науки*, (2010), 15: 1, 437–447.

[16] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “ Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации“, *Доклад РАН*, (2011), **438**: 3, 300–302.

[17] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37—54.

[18] Osipenko K.Yu. “ Optimal recovery of linear operators from inaccurate information “, *Mathematical Analysis and Mathematical Modeling*, Proceedings of the International Conference of Young Scientists, Vladikavkaz, (2015), 43–68.

[19] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Мат. заметки*, **92**:1 (2012), 59—67.

[20] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (4-е изд.)

[21] Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности “, *Дифференциальные уравнения* , (2015), **51**: 7, 951–957.

[22] Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям “, *Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования*, XII Межд. научная конф., Владикавказ, (2015), 110–111.

[23] Унучек С. А. “ О восстановлении оператора разделенной разности по неточно заданному преобразованию Фурье “, *Владикавказский мат. журн.*, (2015), **17**: 3, 84–92.

[24] Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление производной функции по неточно заданным производным других порядков и самой функции “, *Владикавказский мат. журн.*, (2016), **18**: 3, 60–71.

[25] Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по неточно заданным разностям “ , *Математический форум (Итоги науки. Юг России)*, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, (2016) **10**: 1, 215–225.

[26] Унучек С. А. “ Оптимальное восстановление оператора разделенной разности по двум неточно заданным разностям “, *XII Белорусская Математическая Конференция, Межд. научная конф.* , Материалы конференции, Минск, (2016), часть 1, 27–28.

[27] Унучек С. А. “ Восстановление производной функции по производным других порядков“, *Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование. Межд. научная конф.*, тезисы докладов XIII Международной научной конференции, Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, (2016), 78–80.

[28] Унучек С. А. “ Одновременное восстановление операторов разделенной разности неточно заданной последовательности по преобразованию Фурье в среднеквадратичной норме“, *Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования*, XIV Межд. научная конф., с. Цей, (2017), 82–83.