

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАНЫМ РАЗНОСТЯМ

Унучек С. А.¹

В работе рассматривается задача оптимального восстановления разделенной разности k -го порядка последовательности по ее неточно заданным разделенным разностям. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов была поставлена С.А. Смоляком [1]. В основе этой постановки лежали идеи А.Н. Колмогорова, связанные с n -поперечником [2] и квадратурными формулами [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления оператора k -ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям k_1, k_2, \dots, k_n порядков. Аналогичная задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по приближенным измерениям в другие моменты времени рассматривалась в работе [5]. Задача оптимального восстановления k -ой производной функции по приближенно известным производным других порядков рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ таких, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty$.

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h (\Delta_h^{k-1} x).$$

Образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция $(Fx)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in \mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])$, обра-

зами Фурье для операторов разделенных разностей - функции

$$(F\Delta_h x)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right) e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} (Fx)(\omega),$$

$$(F\Delta_h^k x)(\omega) = \left(\frac{e^{ih\omega} - 1}{h} \right)^k (Fx)(\omega).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности k_1, k_2, \dots, k_n порядков $(0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n)$, то есть известны последовательности y_1, y_2, \dots, y_n такие, что $\|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k -той разделенной разности $\Delta_h^k x$ ($0 \leq k \leq k_n$) последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $m : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}, m) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \bar{Y} \in (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \\ \|\Delta_h^{k_j} x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x - m(\bar{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\bar{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}) = \inf_{m: (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}, m).$$

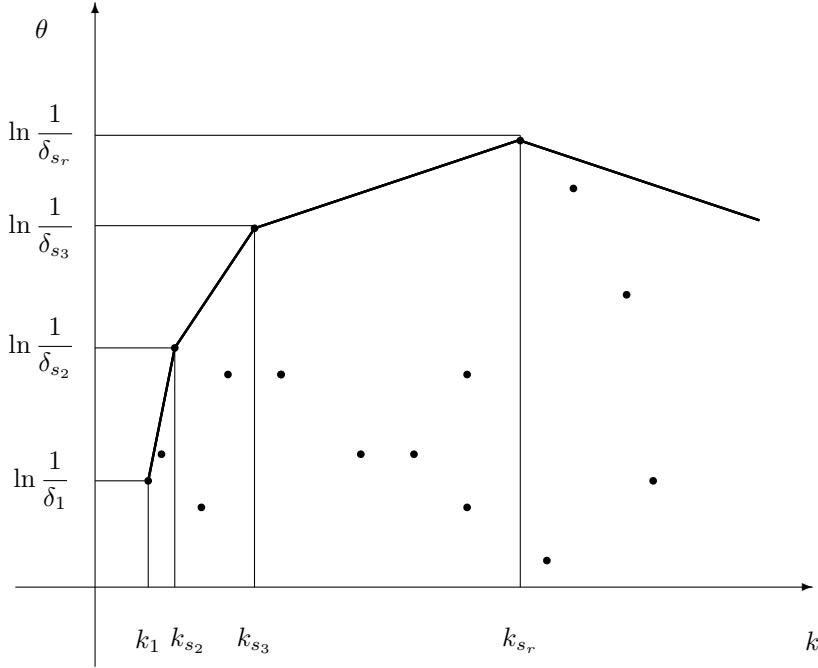
Метод \hat{m} , на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

Основные результаты

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$, $0 \leq k \leq k_n$ и $\delta > 0$.

Положим $M = co \{ (k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \leq j \leq n \} + \{ (t, t \ln \frac{h}{2}) : t \geq 0 \}$, где $co A$ обозначает выпуклую оболочку множества A . Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0, +\infty)$ задана равенством $\theta(k) = \max \{ x :$

$(k, x) \in M\}$, причем $\theta(k) = -\infty$, если $(k, x) \notin M, \forall x$. На промежутке $[k_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ – вогнутая ломаная. Пусть $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_r}$ – ее точки излома (см. рисунок). Очевидно, что $k_{s_1} = k_1$, и $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_r}$ – подмножество точек k_1, k_2, \dots, k_n .



Пусть $g(\omega) = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h}$, $w_h^k = \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2k}}{h^{2k}}$,

$$\widehat{\lambda}_{s_j L} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2 \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_j R} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2 \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}.$$

Теорема 1. Для любого $k \geq 0$ погрешность оптимального восстановления равна $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(k)}$.

1. Если $0 \leq k < k_1$, то любой метод является оптимальным;

2. если $k = k_{s_j}$, $1 \leq j \leq r$, то метод \widehat{m} такой, что $\widehat{m}(\overline{Y}) = y_{s_j}$, является оптимальным;
3. если $r \geq 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq r-1$, то любой метод вида $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} + \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_{jL}}, \Lambda_{s_{jR}} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид $F(\Lambda_{s_{jL}} y_{s_j})(\omega) = \alpha_{s_{jL}}(\omega)(F y_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}})(\omega) = \alpha_{s_{jR}}(\omega)(F y_{s_{j+1}})(\omega)$, $\alpha_{s_{jL}}(\omega), \alpha_{s_{jR}}(\omega) \in \mathbb{L}_\infty[-\pi/h; \pi/h]$ - периодические функции, удовлетворяющие условиям

$$\left| \alpha_{s_{jL}}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}}} \right| \leq \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k-k_{s_{j+1}}}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_{j+1}}-k} - 1},$$

$\alpha_{s_{jR}}(\omega) = g^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega) \alpha_{s_{jL}}(\omega)$, является оптимальным,

4. если $k > k_{s_r}$, то метод \widehat{m} такой, что $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r}$, является оптимальным.

Доказательство.

Докажем, что имеет место неравенство

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \quad (1)$$

Для любой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, n$ и для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &= \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + m(0) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \\ &\|\Delta_h^k(x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \|\Delta_h^k(-x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \\ &2e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m). \end{aligned}$$

То есть, для любого метода m

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}, m) \geq \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (1).

То есть, погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \rightarrow \max, \|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Перейдем к квадрату задачи (2) и запишем ее в образах Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \|(F\Delta_h^k x)(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \|(F\Delta_h^{k_j} x)(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2 \leq \delta_j^2, j = 1, \dots, n.$$

По теореме Планшереля имеем:

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|_{\mathbb{L}_2([-\pi/h, \pi/h])}^2, \\ \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2m}}{h^{2m}} |Fx(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Потому задача (3) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} w_h^k |(Fx)(\omega)|^2 d\omega \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} w_h^{k_j} |(Fx)(\omega)|^2 d\omega \leq \delta_j^2, j = 1, \dots, n.$$

Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем $e^{-\theta(k)}$. Рассмотрим 3 случая :

$$(a) k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}], 1 \leq j \leq r-1,$$

(b) $k \geq k_{s_r}$,

(c) $k < k_1$.

(a) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим прямую $p(k)$, проходящую через точки $(k_{s_j}, \ln \frac{1}{\delta_{s_j}})$ и $(k_{s_{j+1}}, \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}})$: $p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{s_j}} \cdot \frac{k - k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} + \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}} \cdot \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}$. По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j})$, $j = 1, \dots, n$ лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой $p(k)$.

Положим

$$\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{\frac{1}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \right),$$

$$S(m) = \sqrt{2\pi m \delta_{s_j}^{\frac{k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} - \frac{k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}}.$$

Рассмотрим последовательность функций x_m , для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} S(m), & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j} d\omega \leq$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2 \sin(\frac{h\omega_0}{2})}{h} \right)^{2k_j} = e^{-2 \ln p(k_j)} \leq e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, j = 1, \dots, n,$$

то последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^k |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^k d\omega \geq$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2 \sin(h \frac{\omega_0 - \frac{1}{m}}{2})}{h} \right)^{2k}.$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $\frac{2^{\frac{k_{s_j+1}-k}{k_{s_j+1}-k_{s_j}}}}{\delta_{s_j}^{\frac{k_{s_j+1}-k_{s_j}}{k_{s_j+1}-k_{s_j}}}} \frac{2^{\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_j+1}-k_{s_j}}}}{\delta_{s_j+1}^{\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_j+1}-k_{s_j}}}}$. Мы получили, что значение задачи не менее величины $e^{-2p(k)} = e^{-2\theta(k)}$.

(b) Рассмотрим случай $k \geq k_{s_r}$, где k_{s_r} – последняя точка излома функции $\theta(\cdot)$. На участке $[k_{s_r}, +\infty)$ графиком этой части функции является наклонная $p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \frac{h}{2}$, это означает, что для любых точек $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j}), j = 1, \dots, n$ верно неравенство $\ln \frac{1}{\delta_j} \leq \ln \frac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \frac{h}{2}$. Аналогично предыдущему случаю, положим

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin h/2, & \frac{h}{2} \leq 1 \\ \frac{\pi}{h}, & \frac{h}{2} > 1 \end{cases} \text{ и рассмотрим допустимую в задаче (4)}$$

последовательность функций x_m :

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta_{s_r} \left(\frac{2}{h}\right)^{k-k_{s_r}} \sqrt{\frac{2\pi m}{h}}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Значение этой задачи не менее величины $e^{-2\theta(k)}$.

(c) Пусть $k < k_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Очевидно, что существует прямая $x = ak + b, a > 0, a \geq \ln h/2$, разделяющая точку $(k, -x_0)$ и множество $M : -ak - x_0 \geq b \geq -ak_j + \ln \frac{1}{\delta_j}, j = 1, \dots, n$. Пусть $\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin \left(\frac{he^{-a}}{2}\right)$. Рассмотрим последовательность функций x_m , для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} e^{-b} \sqrt{2\pi m}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{e^{-2b} 2\pi m}{2\pi h} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j} d\omega \leq \frac{e^{-2b} m}{m} \cdot \left(\frac{2 \sin \left(\frac{h\omega_0}{2}\right)}{h}\right)^{2k_j} = e^{-2b} \cdot e^{-2ak_j} \leq e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, j = 1, \dots, n,$$

последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^k |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{e^{-2b} 2\pi m}{2\pi h} \int_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^k d\omega \geq \frac{e^{-2b} m}{m} \cdot \left(\frac{2 \sin(h \frac{\omega_0 - \frac{1}{m}}{2})}{h} \right)^{2k}.$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $e^{-2b-2ak} \geq e^{2x_0}$. В силу произвольности x_0 значение задачи (4) равно $+\infty$.

Тем самым, мы показали, что для всех $k \geq 0$ погрешности оптимального восстановления $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \bar{K}, \bar{\delta}) \geq e^{-\theta(k)}$.

Займемся построением оптимальных методов. Также рассмотрим 3 случая.

(а) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\hat{m}(\bar{Y}) = \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} + \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_{jL}}, \Lambda_{s_{jR}} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид $F(\Lambda_{s_{jL}} y_{s_j})(\omega) = a_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}})(\omega) = a_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega)$, где $a_{s_{jL}}(\omega), a_{s_{jR}}(\omega) \in \mathbb{L}_\infty[-\pi/h; \pi/h]$ - периодические функции.

Для оценки оптимальной погрешности рассмотрим экстремальную задачу $\|\Delta_h^k x - \Lambda_{s_{jL}} y_{s_j} - \Lambda_{s_{jR}} y_{s_{j+1}}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \rightarrow \max$,

$$\|\Delta_h^{k_j} x - y_j(\cdot)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j, j = 1, \dots, n, x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}), y_j \in l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

В образах Фурье задача принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) \right|^2 d\omega \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^{k_j}}{h^{k_j}} Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega) \right|^2 d\omega \leq \delta_j^2, j = 1, \dots, n.$$

Положим $z_j(\omega) = g^{k_j}(\omega) Fx(\omega) - (Fy_j)(\omega), j = 1, \dots, n$.

Если $\Delta_h^{k_{s_j}}$ и $\Delta_h^{k_{s_{j+1}}}$ известны точно, то оптимальный метод должен давать точный результат: $\Delta_h^k x = \Lambda_{s_{jL}} \Delta_h^{k_{s_j}} x + \Lambda_{s_{jR}} \Delta_h^{k_{s_{j+1}}} x$,

$$g^k(\omega)(Fx)(\omega) = g^{k_{s_j}}(\omega)\alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fx)(\omega) + g^{k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fx)(\omega), \quad (6)$$

тогда подынтегральную функцию максимизируемого выражения можно представить в виде

$$g^k(\omega)Fx(\omega) - \alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) = \alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega),$$

и задача (5) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega) \right|^2 d\omega \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| z_j(\omega) \right|^2 d\omega \leq \delta_j^2, j = 1, \dots, n.$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega) \right|^2 \leq \left(\frac{|\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jL}}} + \frac{|\alpha_{s_{jR}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}}} \right) \cdot \left(\widehat{\lambda}_{s_{jL}} |z_{s_j}(\omega)|^2 + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} |z_{s_{j+1}}(\omega)|^2 \right).$$

Пусть $Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jL}}} + \frac{|\alpha_{s_{jR}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}}}$. Тогда, если выполняется условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([- \pi/h, \pi/h])} \leq 1$, значение задачи не больше, чем

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \alpha_{s_{jL}}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_{jR}}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega) \right|^2 d\omega \leq \widehat{\lambda}_{s_{jL}} \delta_{s_j}^2 + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \delta_{s_{j+1}}^2.$$

Подставим значения $\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \geq 0, \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \geq 0$. Тогда

$$D \leq \delta_{s_j}^{2 \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2 \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}} = e^{-2\theta(k)} = E^2(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}).$$

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-π/h, π/h])} \leq 1$ выполнимо. Из равенства (6) вытекает, что $g^k(\omega) = g^{k_{s_j}}(\omega)\alpha_{s_{jL}}(\omega) + g^{k_{s_j+1}}(\omega)\alpha_{s_{jR}}(\omega)$, $\alpha_{s_{jR}}(\omega) = g^{k-k_{s_j+1}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_j+1}}(\omega)\alpha_{s_{jL}}(\omega)$. Тогда

$$Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jL}}} + \frac{|g^{k-k_{s_j+1}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_j+1}}(\omega)\alpha_{s_{jL}}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}}} =$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k_{s_j+1}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \widehat{\lambda}_{s_{jR}}} \left| \alpha_{s_{jL}}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_j+1}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}}} \right|^2 +$$

$$\frac{w_h^{k-k_{s_j+1}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k_{s_j+1}}}.$$

Очевидно, что для всех функций $\alpha_{s_{jL}}(\omega)$, для которых выполняется условие

$$\left| \alpha_{s_{jL}}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_j+1}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}}} \right| \leq$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} \widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k-k_{s_j+1}}}}{\widehat{\lambda}_{s_{jR}} + \widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k_{s_j+1}}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{jL}} w_h^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} w_h^{k_{s_j+1}-k} - 1}$$

при указанных $\widehat{\lambda}_{s_{jL}}, \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \geq 0$ выполняется неравенство $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-π/h, π/h])} \leq 1$.

Покажем, что подкоренное выражение неотрицательно. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \widehat{\lambda}_{s_{jL}} \xi^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \xi^{k_{s_j+1}-k} - 1$. Так как

$$\varphi''(\xi) = (k_{s_j} - k)(k_{s_j} - k - 1) \widehat{\lambda}_{s_{jL}} \xi^{k_{s_j}-k-1} + \widehat{\lambda}_{s_{jR}} \xi^{k_{s_j+1}-k} \geq 0$$

при всех $\xi > 0$, функция $\varphi(\xi)$ выпукла и достигает наименьшего значения в единственной точке $\xi_0 > 0$, то есть $\varphi(\xi) \geq \varphi(\xi_0)$ при всех $\xi > 0$. При указанных выше значениях $\widehat{\lambda}_{s_{jL}}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{jR}}$ $\varphi(\xi_0) = 0$, что говорит о неотрицательности подкоренного выражения при всех значениях ω . Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод \widehat{m} - оптимальный.

(b) Аналогично доказывается, что при $k \geq k_{s_r}$ оптимальный метод имеет вид $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{k_{s_r}}$.

(с) Пусть $k < k_1$. Поскольку в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$, любой метод оптимален.

Заметим, что, в пределе при $h \rightarrow 0$ k -ая разделенная разность последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ переходит в производную k -го порядка функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $\lim_{h \rightarrow 0} g(\omega) = i\omega$, $\lim_{h \rightarrow 0} w_h = \omega^2$.

Пределный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для восстановления k -ой производной функции по приближенно известным производным других порядков, полученным в работе [6].

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. —Москва: МГУ, 1965.
2. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика.—Москва: Наука, 1985.
3. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. //УМН, 1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек //Матем. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям //Мат. сборник.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
6. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of linear operators from inaccurate information //Математический анализ и математическое моделирование: тр. IX региональной шк.-конф. молодых учен.—2015., в печати.

Унучек Светлана Александровна
МГТУ МИРЭА
старший преподаватель
Москва, пр.Вернадского, 78
E-mail: svun@mail.ru

OPTIMAL RECOVERY OF DIVIDED DIFFERENCE OPERATOR FROM INACCURATELY GIVEN DIFFERENCES

Unuchek Svetlana Aleksandrovna

The problem of optimal recovery of divided difference of the k -th order from inaccurately given differences is considered. The family of optimal recovery methods is constructed.