УДК 517.962

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ РАЗНОСТЯМ

Унучек С. А.[1]

В работе рассматривается задача оптимального восстановления разделенной разности $k-$го порядка последовательности по ее неточно заданным разделенным разностям. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

1. Введение

Впервые задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов была поставлена С.А. Смоляком [1]. В основе этой постановки лежали идеи А.Н. Колмогорова, связанные с n-поперечником [2] и квадратурными формулами [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления оператора k-ой разделенной разности последовательности в среднеквадратичной норме по неточно заданным разделенным разностям $k_1, k_2, \dots k_n$ порядков. Аналогичная задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по приближенным измерениям в другие моменты времени рассматривалась в работе [5]. Задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенно известным производным других порядков рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z}), h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ таких, что $\|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty$.

Напомним определение оператора разделенных разностей:
$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\qquad \Delta_h^k x = \Delta_h\big(\Delta_h^{k-1}x\big)$.

Образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция $(Fx)(\omega) = h\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in \mathbb{L}_2([-\pi/h,\pi/h])$, образами Фурье для операторов разделенных разностей - функции $(F\Delta_h x)(\omega) = h\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}(\frac{x_{j+1}-x_j}{h})e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}(Fx)(w)$,
$(F\Delta_h^k x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}(Fx)(\omega)$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Предположим, что для каждой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ неточно известны разделенные разности $k_1, k_2, \dots, k_n$ порядков $(0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n)$, то есть известны последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n$ такие, что $\|\Delta_h^{k_j}x - y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j$, $j = 1,\dots,n$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора k-той разделенной разности $\Delta_h^k x\,(0 \le k \le k_n)$ последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения $m:\ (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}(\mathbb{Z})\\ \overline{Y}\in(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n\\ \|\Delta_h^{k_j}x-y_j\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta_j,\,j=1,\dots,n}} \|\Delta_h^k x - m(\overline{Y})\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})},$$

где $\overline{K} = (k_1,k_2,\dots,k_n), \overline{\delta} = (\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n), \overline{Y} = (y_1,y_2,\dots,y_n)$.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta}) = \inf_{m:\,(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n\to l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta},m).$$

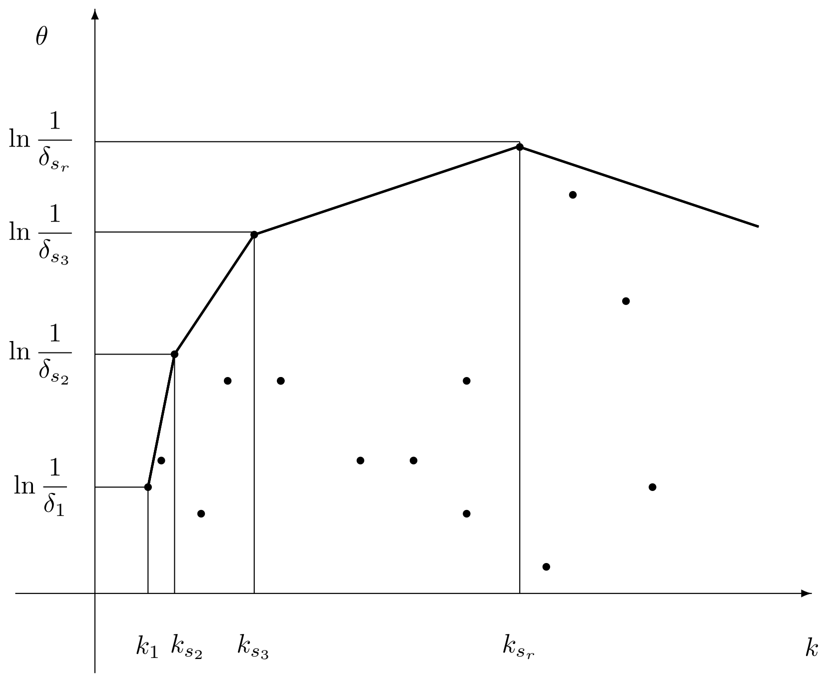
Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

Основные результаты

Пусть $k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_1 < k_2 < \dots \le k_n$, $0 \le k \le k_n$ и $\delta > 0$.

Положим $M = co\{(k_j, \ln 1/\delta_j), 1 \le j \le n\} + \{(t, t\ln\frac{h}{2}) :\ t \ge 0\}$, где $co\,A$ обозначает выпуклую оболочку множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на промежутке $[0,+\infty)$ задана равенством $\theta(k) = \max\{x :$

$(k,x) \in M\}$, причем $\theta(k) = -\infty$, если $(k,x) \notin M$, $\forall x$. На промежутке $[k_1, +\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ – вогнутая ломаная. Пусть $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots k_{s_r}$ – ее точки излома (см. рисунок). Очевидно, что $k_{s_1} = k_1$, и $k_{s_1}, k_{s_2}, \dots k_{s_r}$ – подмножество точек $k_1, k_2, \dots k_n$.



Пусть $g(\omega) = \frac{e^{ih\omega}-1}{h}$, $w_h^k = \frac{|e^{ih\omega}-1|^{2k}}{h^{2k}}$,

$$\widehat{\lambda}_{s_jL} = \frac{k_{s_{j+1}} - k}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_jR} = \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}.$$

Теорема 1. *Для любого $k \geq 0$ погрешность оптимального восстановления равна $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) = e^{-\theta(k)}$.*

1. *Если $0 \leq k < k_1$, то любой метод является оптимальным;*

2. *если* $k = k_{s_j}$, $1 \le j \le r$, *то метод* $\widehat{m}$ *такой, что* $\widehat{m}(\overline{Y}) = y_{s_j}$, *является оптимальным;*

3. *если* $r \ge 2$, $k \in (k_{s_j}, k_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le r-1$, *то любой метод вида* $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Lambda_{s_jL} y_{s_j} + \Lambda_{s_jR} y_{s_{j+1}}$, *где* $\Lambda_{s_jL}, \Lambda_{s_jR} : (l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n \to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ *- линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид* $F(\Lambda_{s_jL} y_{s_j})(\omega) = \alpha_{s_jL}(\omega)(F y_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_jR} y_{s_{j+1}})(\omega) = \alpha_{s_jR}(\omega)(F y_{s_{j+1}})(\omega)$, $\alpha_{s_jL}(\omega), \alpha_{s_jR}(\omega) \in \mathbb{L}_\infty[-\pi/h; \pi/h]$ *- периодические функции, удовлетворяющие условиям*

$$\left|\alpha_{s_jL}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_jL}}\right| \le$$
$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL} \widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k-k_{s_{j+1}}}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR} + \widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k_{s_{j+1}}-k} - 1},$$

$\alpha_{s_jR}(\omega) = g^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_jL}(\omega)$, *является оптимальным,*

4. *если* $k > k_{s_r}$, *то метод* $\widehat{m}$ *такой, что* $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{s_r}$, *является оптимальным.*

Доказательство.

Докажем,что имеет место неравенство

$$E(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}) \ge \sup_{\substack{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) \\ \|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j,\, j=1,\ldots,n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \qquad (1)$$

Для любой последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le \delta_j$, $j = 1, \ldots, n$ и для любого метода m имеем

$$2\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + m(0) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le$$
$$\|\Delta_h^k(x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \|\Delta_h^k(-x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \le$$
$$2e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m).$$

То есть, для любого метода m

$$e(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}, m) \geq \sup_{\substack{x\in l_{2,h}(\mathbb{Z})\\ \|\Delta_h^{k_j}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\leq\delta_j,\, j=1,\dots,n}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (1).

То есть, погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \to \max, \|\Delta_h^{k_j} x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq \delta_j,\ j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Перейдем к квадрату задачи (2) и запишем ее в образах Фурье:

$$\frac{1}{2\pi}\|(F\Delta_h^k x)(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\pi/h,\pi/h])} \to \max, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|(F\Delta_h^{k_j} x)(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\pi/h,\pi/h])} \leq \delta_j,\ j = 1, \dots, n.$$

По теореме Планшереля имеем:

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|^2_{\mathbb{L}_2([-\pi/h,\pi/h])},$$

$$\|\Delta_h^m x\|^2_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{\left|e^{ih\omega}-1\right|^{2m}}{h^{2m}}\left|Fx(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Потому задача (3) принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|\leq\pi/h} w_h^k\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \to \max, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|\leq\pi/h} w_h^{k_j}\left|(Fx)(\omega)\right|^2 d\omega \leq \delta_j^2,\ j = 1, \dots, n.$$

Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем $e^{-\theta(k)}$. Рассмотрим 3 случая :

(a) $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$, $1 \leq j \leq r-1$,

(b) $k \geq k_{s_r}$,

(c) $k < k_1$.

(a) Пусть $k \in [k_{s_j}, k_{s_{j+1}}]$. Рассмотрим прямую $p(k)$, проходящую через точки$(k_{s_j}, \ln \frac{1}{\delta_{s_j}})$ и $(k_{s_{j+1}}, \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}})$: $p(k) = \ln \frac{1}{\delta_{s_j}} \cdot \frac{k - k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}} + \ln \frac{1}{\delta_{s_{j+1}}} \cdot \frac{k - k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}$. По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(k_j, \ln \frac{1}{\delta_j}), j = 1, \ldots, n$ лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой $p(k)$.

Положим

$$\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin\left(\frac{h}{2}\left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{1}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}\right),$$

$$S(m) = \sqrt{2\pi m}\,\delta_{s_j}^{\frac{k_{s_{j+1}}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}\,\delta_{s_{j+1}}^{-\frac{k_{s_j}}{k_{s_{j+1}} - k_{s_j}}}.$$

Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} S(m), & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} \left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j}\, d\omega \leq$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2\sin\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)}{h}\right)^{2k_j} = e^{-2\ln p(k_j)} \leq e^{-2\ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, j = 1, \ldots, n,$$

то последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k} \left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{S^2(m)}{2\pi} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k}\, d\omega \geq$$

$$\frac{S^2(m)}{2\pi m} \cdot \left(\frac{2\sin\left(h\frac{\omega_0 - \frac{1}{m}}{2}\right)}{h}\right)^{2k}.$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $\delta_{s_j}^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}$. Мы получили, что значение задачи не менее величины $e^{-2p(k)} = e^{-2\theta(k)}$.

(b) Рассмотрим случай $k \geq k_{s_r}$, где k_{s_r} – последняя точка излома функции $\theta(\cdot)$. На участке $[k_{s_r}, +\infty)$ графиком этой части функции является наклонная $p(k) = \ln \dfrac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \dfrac{h}{2}$, это означает, что для любых точек $(k_j, \ln \dfrac{1}{\delta_j}), j = 1, \ldots, n$ верно неравенство $\ln \dfrac{1}{\delta_j} \leq \ln \dfrac{1}{\delta_{s_r}} + (k - k_{s_r}) \cdot \ln \dfrac{h}{2}$. Аналогично предыдущему случаю, положим $\omega_0 = \begin{cases} \frac{2}{h} \arcsin h/2, & \dfrac{h}{2} \leq 1 \\ \frac{\pi}{h}, & \frac{h}{2} > 1 \end{cases}$ и рассмотрим допустимую в задаче (4) последовательность функций x_m:

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta_{s_r} \left(\dfrac{2}{h}\right)^{k-k_{s_r}} \sqrt{\frac{2\pi m}{h}}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Значение этой задачи не менее величины $e^{-2\theta(k)}$.

(c) Пусть $k < k_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Очевидно, что существует прямая $x = ak+b, a > 0, a \geq \ln h/2$, разделяющая точку $(k, -x_0)$ и множество M : $-ak - x_0 \geq b \geq -ak_j + \ln \frac{1}{\delta_j}, j = 1, \ldots, n$. Пусть $\omega_0 = \frac{2}{h} \arcsin\left(\frac{he^{-a}}{2}\right)$. Рассмотрим последовательность функций x_m, для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} e^{-b}\sqrt{2\pi m}, & \omega \in [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0] \\ 0, & \omega \notin [\omega_0 - \frac{1}{m}; \omega_0]. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \leq \pi/h} \omega_h^{k_j} \left|(Fx_m)(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{e^{-2b} 2\pi m}{2\pi h} \int\limits_{\omega_0 - \frac{1}{m}}^{\omega_0} \omega_h^{k_j}\, d\omega \leq$$

$$\frac{e^{-2b} m}{m} \cdot \left(\frac{2\sin\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)}{h}\right)^{2k_j} = e^{-2b} \cdot e^{-2ak_j} \leq e^{-2\ln \frac{1}{\delta_j}} = \delta_j^2, j = 1, \ldots, n,$$

последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\omega_h^k\big|(Fx_m)(\omega)\big|^2\,d\omega=\frac{e^{-2b}2\pi m}{2\pi h}\int\limits_{\omega_0-\frac{1}{m}}^{\omega_0}\omega_h^k\,d\omega\ge$$
$$\frac{e^{-2b}m}{m}\cdot\left(\frac{2\sin\left(h\frac{\omega_0-\frac{1}{m}}{2}\right)}{h}\right)^{2k}.$$

При $m\to\infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к $e^{-2b-2ak}\ge e^{2x_0}$. В силу произвольности x_0 значение задачи (4) равно $+\infty$.

Тем самым, мы показали, что для всех $k\ge 0$ погрешности оптимального восстановления $E(l_{2,h}(\mathbb{Z}),\overline{K},\overline{\delta})\ge e^{-\theta(k)}$.

Займемся построением оптимальных методов. Также рассмотрим 3 случая.

(a) Пусть $k\in[k_{s_j},k_{s_{j+1}}]$. Оптимальные методы будем искать среди методов вида $\widehat{m}(\overline{Y})=\Lambda_{s_{jL}}y_{s_j}+\Lambda_{s_{jR}}y_{s_{j+1}}$, где $\Lambda_{s_{jL}},\Lambda_{s_{jR}}:(l_{2,h}(\mathbb{Z}))^n\to l_{2,h}(\mathbb{Z})$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид $F(\Lambda_{s_{jL}}y_{s_j})(\omega)=a_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega)$, $F(\Lambda_{s_{jR}}y_{s_{j+1}})(\omega)=a_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega)$, где $a_{s_{jL}}(\omega),a_{s_{jR}}(\omega)\in\mathbb{L}_\infty[-\pi/h;\pi/h]$ - периодические функции.

Для оценки оптимальной погрешности рассмотрим экстремальную задачу $\|\Delta_h^kx-\Lambda_{s_{jL}}y_{s_j}-\Lambda_{s_{jR}}y_{s_{j+1}}\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\to max$,
$\|\Delta_h^{k_j}x-y_j(\cdot)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}\le\delta_j$, $j=1,\dots,n,x\in l_{2,h}(\mathbb{Z}),y_j\in l_{2,h}(\mathbb{Z})$.

В образах Фурье задача принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^k}{h^k}Fx(\omega)-\alpha_{s_{jL}}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega)-\right.$$
$$\left.\alpha_{s_{jR}}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega)\right|^2d\omega\to max,\quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\frac{(e^{ih\omega}-1)^{k_j}}{h^{k_j}}Fx(\omega)-(Fy_j)(\omega)\right|^2d\omega\le\delta_j^2,j=1,\dots,n.$$

Положим $z_j(\omega)=g^{k_j}(\omega)Fx(\omega)-(Fy_j)(\omega),j=1,\dots,n.$

Если $\Delta_h^{k_{s_j}}$ и $\Delta_h^{k_{s_{j+1}}}$ известны точно, то оптимальный метод должен давать точный результат: $\Delta_h^k x = \Lambda_{s_jL}\Delta_h^{k_{s_j}}x + \Lambda_{s_jR}\Delta_h^{k_{s_{j+1}}}x$,

$$g^k(\omega)(Fx)(\omega) = g^{k_{s_j}}(\omega)\alpha_{s_jL}(\omega)(Fx)(\omega) + g^{k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_jR}(\omega)(Fx)(\omega), \tag{6}$$

тогда подынтегральную функцию максимизируемого выражения можно представить в виде

$$g^k(\omega)Fx(\omega) - \alpha_{s_jL}(\omega)(Fy_{s_j})(\omega) - \alpha_{s_jR}(\omega)(Fy_{s_{j+1}})(\omega) = \alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega),$$

и задача (5) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2 d\omega \to max, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|z_j(\omega)\right|^2 d\omega \le \delta_j^2, j = 1,\dots,n.$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши-Буняковского:

$$\left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2 \le \left(\frac{|\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}} + \frac{|\alpha_{s_jR}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_{s_jL}|z_{s_j}(\omega)|^2 + \widehat{\lambda}_{s_jR}|z_{s_{j+1}}(\omega)|^2\right).$$

Пусть $Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}} + \frac{|\alpha_{s_jR}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}}$. Тогда, если выполняется условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \le 1$, значение задачи не больше, чем

$$D = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\pi/h}\left|\alpha_{s_jL}(\omega)z_{s_j}(\omega) + \alpha_{s_jR}(\omega)z_{s_{j+1}}(\omega)\right|^2 d\omega \le \widehat{\lambda}_{s_jL}\delta_{s_j}^2 + \widehat{\lambda}_{s_jR}\delta_{s_{j+1}}^2.$$

Подставим значения $\widehat{\lambda}_{s_jL} \ge 0, \widehat{\lambda}_{s_jR} \ge 0$. Тогда

$$D \le \delta_{s_j}^{2\frac{k_{s_{j+1}}-k}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{k-k_{s_j}}{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}}} = e^{-2\theta(k)} = E^2(l_{2,h}(\mathbb{Z}), \overline{K}, \overline{\delta}).$$

Покажем, что условие $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \le 1$ выполнимо. Из равенства (6) вытекает, что $g^k(\omega) = g^{k_{s_j}}(\omega)\alpha_{s_jL}(\omega) + g^{k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_jR}(\omega)$, $\alpha_{s_jR}(\omega) = g^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_jL}(\omega)$. Тогда

$$Q(\omega) = \frac{|\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jL}} + \frac{|g^{k-k_{s_{j+1}}}(\omega) - g^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}(\omega)\alpha_{s_jL}(\omega)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_jR}} =$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_{s_jR} + \widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}}{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR}} \left| \alpha_{s_jL}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_jL}} \right|^2 +$$

$$\frac{w_h^{k-k_{s_{j+1}}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR} + \widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}}.$$

Очевидно,что для всех функций $\alpha_{s_jL}(\omega)$, для которых выполняется условие

$$\left| \alpha_{s_jL}(\omega) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_jL} g^{k-k_{s_j}}(\omega)}{\widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k_{s_{j+1}}-k_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_jL}} \right| \le$$

$$\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL}\widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k-k_{s_{j+1}}}}}{\widehat{\lambda}_{s_jR} + \widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k_{s_{j+1}}}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_jL} w_h^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_jR} w_h^{k_{s_{j+1}}-k} - 1}$$

при указанных $\widehat{\lambda}_{s_jL}, \widehat{\lambda}_{s_jR} \ge 0$ выполняется неравенство $\|Q(\cdot)\|_{L_\infty([-\pi/h,\pi/h])} \le 1$.

Покажем, что подкоренное выражение неотрицательно. Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \widehat{\lambda}_{s_jL}\xi^{k_{s_j}-k} + \widehat{\lambda}_{s_jR}\xi^{k_{s_{j+1}}-k} - 1$. Так как

$$\varphi''(\xi) = (k_{s_j} - k)(k_{s_j} - k - 1)\widehat{\lambda}_{s_jL}\xi^{k_{s_j}-k-1} + \widehat{\lambda}_{s_jR}\xi^{k_{s_{j+1}}-k} \ge 0$$

при всех $\xi > 0$, функция $\varphi(\xi)$ выпукла и достигает наименьшего значения в единственной точке $\xi_0 > 0$, то есть $\varphi(\xi) \ge \varphi(\xi_0)$ при всех $\xi > 0$. При указанных выше значениях $\widehat{\lambda}_{s_jL}$ и $\widehat{\lambda}_{s_jR}$ $\varphi(\xi_0) = 0$, что говорит о неотрицательности подкоренного выражения при всех значениях ω. Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\widehat{m}$ - оптимальный.

(b) Аналогично доказывается, что при $k \ge k_{s_r}$ оптимальный метод имеет вид $\widehat{m}(\overline{Y}) = \Delta_h^{k-k_{s_r}} y_{k_{s_r}}$.

(c) Пусть $k < k_1$. Поскольку в этом случае значение задачи (4) равно $+\infty$, любой метод оптимален.

Заметим, что, в пределе при $h \to 0$ $k-$ая разделенная разность последовательности $x \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ переходит в производную $k-$го порядка функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $\lim_{h\to 0} g(\omega) = i\omega$, $\lim_{h\to 0} w_h = \omega^2$.

Предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для восстановления k-ой производной функции по приближенно известным производным других порядков, полученным в работе [6].

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. .—Москва: МГУ, 1965.
2. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика.—Москва: Наука, 1985.
3. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. //УМН, 1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек //Матем. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям //Мат. сборник.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54.
6. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of linear operators from inaccurate information //Математический анализ и математическое моделирование: тр. IX региональной шк.-конф. молодых учен.—2015., в печати.

Унучек Светлана Александровна
МГТУ МИРЭА
старший преподаватель
Москва, пр.Вернадского, 78
E-mail: svun@mail.ru

OPTIMAL RECOVERY OF DIVIDED DIFFERENCE OPERATOR FROM INACCURATELY GIVEN DIFFERENCES

Unuchek Svetlana Aleksandrovna

The problem of optimal recovery of devided difference of the k-th order from inaccurately given differences is considered. The family of optimal recovery methods is constructed.