РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

ВВЕДЕНСКАЯ Елена Викторовна

Восстановление решений параболических уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным данным

(01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
профессор К.Ю.Осипенко

Москва—2011

Оглавление

Глава 1. Введение 2

1.1. Исторический обзор 2

1.2. Краткое содержание работы 3

1.3. Доклады и публикации 4

Глава 2. Постановка задач оптимального восстановления линейного оператора и используемые результаты 5

2.1. Задача оптимального восстановления линейного оператора по неточным исходным данным 5

2.2. Постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала 12

2.3. Понятие обобщенного решения уравнения параболического типа 15

2.4. Решение общего эволюционного уравнения 17

2.5. Собственные функции оператора Лапласа в d-мерном шаре 18

Глава 3. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения теплопроводности 20

3.1. Оптимальное восстановление решения эволюционного уравнения 20

3.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре 24

3.3. Восстановление решения уравнения теплопроводности в круге и в шаре. 27

3.4. Восстановление решения уравнения теплопроводности на отрезке. 29

Глава 4. Оптимальное восстановление решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений 34

4.1. Постановка задачи 34

4.2. Построение семейства оптимальных методов 35

4.3. Некоторые частные случаи 42

Глава 5. Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно 45
5.1. Постановка задачи 45
5.2. Асимптотика погрешности оптимального восстановления 46
5.3. Случай малых погрешностей 53
5.4. Случай $n = 1$ 55
5.5. Случай $n = 2$ 57

Литература 66

Глава 1

Введение

1.1. Исторический обзор

Теория оптимального восстановления - это раздел теории приближений, посвященный решению задач, связанных с приближением линейных функционалов, или, в более общем случае, линейных операторов по точной или приближенной информации о них. При этом методы приближения, или, как принято их называть, восстановления, выбираются, исходя из условия максимально полного использования доступной информации. Идея такого подхода берет свое начало от работ А.Н. Колмогорова 1930-х годов [**1**], где предлагалось рассматривать наилучшие методы приближений, обслуживающие все объекты данного класса.

Впервые точная постановка задачи оптимального восстановления была сформулирована С.А. Смоляком [**2**]. Им же был получен первый результат в этой постановке - утверждение, что для центральносимметричного и выпуклого класса функций среди оптимальных методов восстановления функционала существует линейный метод. В дальнейшем этот результат обобщался многими авторами: А.Г. Марчуком, К.Ю. Осипенко [**3**], К.Ю. Осипенко [**4**], C.A. Michelli, T.J. Rivlin [**5**], В.В. Арестовым [**6**] и другими.

В некотором смысле окончательный результат — необходимые и достаточные условия существования линейного оптимального метода — был получен Г.Г. Магарил-Ильяевым и К.Ю. Осипенко [**7**].

Результаты, касающиеся восстановления линейных операторов, пока не носят столь общего характера. Здесь, как правило, удается построить оптимальные методы восстановления лишь для операторов, действующих на евклидовых пространствах. Первые результаты подобного рода были получены в работах [**5**] (восстановление по точной информации) и [**8**] (восстановление по информации, заданной с погрешностью). Подход, основанный на применении к задачам восстановления линейных операторов общей теории экстремума, разрабатывался Г.Г. Магарил-Ильяевым и К.Ю. Осипенко [**9**], [**10**].

Применение общей теории восстановления линейных операторов к задачам восстановления решений уравнений математической физики было начато сравнительно недавно в работах [**11**], [**12**], [**13**].

1.2. Краткое содержание работы

В главе 2 приведены основные теоремы, на которые автор опирается при решении задач оптимального восстановления линейных операторов и функционалов по неточно заданной информации о них (§1 и §2). Здесь же (§3) приводится понятие обобщенного решения уравнения параболического типа, что связано с тем обстоятельством, что далее восстанавливаются решения этого уравнения, принадлежащие пространству $L_2(\mathbb{B}^d)$, где $\mathbb{B}^d$ — единичный шар в $\mathbb{R}^d$, а граничное условие принадлежит $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, где $\mathbb{S}^{d-1}$ — граница шара $\mathbb{B}^d$, поэтому классическое решение этой задачи может не существовать.

В §4 главы 2 рассматривается решение начально-краевой задачи для обобщенного уравнения параболического типа, а в §5 описаны собственные функции оператора Лапласа в d-мерном шаре, которые используются в дальнейшем в качестве базиса в пространстве $L_2(\mathbb{B}^d)$.

В главе 3 восстанавливаются решения уравнений параболического типа по их неточно заданным значениям в фиксированные моменты времени. §1 посвящен оптимальному восстановлению решения обобщенного уравнения параболического типа. В §2 на основе результатов, описанных в §1 2-й главы, строится оптимальный метод восстановления решения начально - краевой задачи для обобщенного уравнения теплопроводности в шаре $\mathbb{B}^d$. §3 посвящен одномерному варианту задачи из §2 ($d = 1$), а в §4 изложены результаты решения частных случаев этой задачи при $d = 2$ и $d = 3$ (в круге и в шаре).

Глава 4 посвящена оптимальному восстановлению решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В §1 этой главы рассматривается задача восстановления решения по неточной информации о решении, заданной в два момента времени. В задаче, описанной в §2, известна неточная информация о решении системы в 3 момента времени.

Во всех задачах глав 3 и 4 построены оптимальные методы восстановления их решений, вычислена погрешность этих методов, а также рассмотрены случаи, когда часть апостериорной информации (неточное значение решения в некоторый момент времени) заменена на априорную информацию.

Глава 5 содержит решение задач оптимального восстановления последовательностей, известных неточно и принадлежащих некоторым классам — дискретным аналогам соболевских классов. Здесь, кроме того получены некоторые дискретные аналоги неравенств Тайкова.

1.3. Доклады и публикации

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на:

4-ом Международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения”, Новороссийск, 2006;

17-ой Международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2006)”, Ласпи–Батилиман, 2006 г.;

Международной конференции “Extremal problems in Complex and Real Analysis (EPCoRA-2007)”, Москва, 2007 г.;

18-ой Международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2007)”, Ласпи–Батилиман, 2007 г.;

3-й Международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования”, Москва, 2008 г.;

20-й Международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2009)”, Ласпи–Батилиман, 2009 г.;

научном семинаре кафедры “Высшая математика” “МАТИ” — РГТУ им. К.Э.Циолковского;

научном семинаре кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова;

На научном семинаре "Обратные задачи математической физики"(рук. А.Б. Бакушинский, А.В. Тихонравов, А.Г. Ягола) в НИВЦ МГУ

и отражены в семи публикациях [**14**]–[**20**].

Глава 2

Постановка задач оптимального восстановления линейного оператора и используемые результаты

2.1. Задача оптимального восстановления линейного оператора по неточным исходным данным

Пусть $X-$векторное пространство, $Y_1,\dots,Y_k$ – пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{Y_j}$, а $I_j: X\to Y_j, j=1,\dots,k$ – линейные операторы. Пусть $Z-$ нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного оператора $T: X\to Z$ на классе

$$W_l=\left\{x\in X:\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\dots,l,\ l<k\right\}.$$

Если $l=0$, считаем, что $W_0=X$. Пусть нам известен для каждого $x\in W_l$ вектор $y=(y_{l+1},\dots,y_k)\in Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k$, такой, что

$$\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\quad j=l+1,\dots,k.$$

Требуется восстановить оператор T по априорной (W_l) и апостериорной (вектор y) информации об элементе x. В качестве *методов* восстановления рассматриваются всевозможные отображения

$$\varphi\colon Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k\to Z.$$

Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e(T,W_l,I,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W_l\\ y\in Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j, j=l+1,\dots,k}}\|Tx-\varphi(y)\|_Z,$$

где $I=\{I_1,\dots,I_k\}$, $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_k)$. *Погрешностью оптимального восстановления* называется величина

$$E(T,W_l,I,\delta)=\inf_{\varphi: Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k\to Z}e(T,W_l,I,\delta,\varphi).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется *оптимальным методом восстановления* оператора

T на классе W_l по информации I. Как будет показано ниже, с описанной задачей оптимального восстановления тесно связана следующая экстремальная задача

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_jx\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2,\ j = 1, ..., k; \quad x \in X. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть существуют такие* $\widehat{\lambda}_j \ge 0, j = 1, \ldots, k$, *что значения задачи*

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_jx\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,\ x \in X. \tag{2.2}$$

и задачи (2.1) *совпадают. Предположим, что для всех* $y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in \widetilde{Y}_{l+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_k$, *где* $\widetilde{Y}_j-$ *некоторые всюду плотные в* Y_j *множества,* $j = l+1, \ldots, k$, *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_jx\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_jx - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min,\ x \in X. \tag{2.3}$$

Предположим, кроме того, что существует линейный непрерывный оператор $A : Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k \to Z$, *такой, что для всех* $y \in \widetilde{Y}_{l+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_k$

$$Ay = Tx_y.$$

При этом норма в $Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k$ *определяется как*

$$\|y\| = \left(\sum_{j=l+1}^{k} \|y_j\|_{Y_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(T, W_l, I, \delta) = \sup_{\substack{\|I_jx\|_{Y_j} \le \delta_j, \\ j=1,\ldots,k}} \|Tx\|_Z,$$

а метод восстановления $\widehat{\varphi}(y) = Ay$ *является оптимальным.*

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть* $X-$ *линейное пространство с полускалярным произведением* $(\cdot, \cdot)_X$ *и соответствующей полунормой* $\| \cdot \|_X$. *Пусть*

$L \subset X$, $L-$ линейное подпространство, и $y \in X$. Рассмотрим задачу

$$\|x - y\|_X \to \min, \quad x \in L. \tag{2.4}$$

Если $\widehat{x} \in L$ — элемент, на котором достигается минимум в (2.4), то для для всех $x \in L$ выполняется равенство $(\widehat{x} - y, x)_X = 0$.

Доказательство леммы 1. Пусть существует такой $x_0 \in L$, что $(\widehat{x} - y, x_0)_X = \alpha \neq 0$. Положим $z = \widehat{x} - \lambda x_0$. Выберем $\lambda = \frac{\alpha}{\|x_0\|_X^2}$. Получим

$$\begin{aligned}
\|z - y\|_X^2 = \|\widehat{x} - \lambda x_0 - y\|_X^2 = \\
&= (\widehat{x} - \lambda x_0 - y, \widehat{x} - \lambda x_0 - y)_X = \\
&= (\widehat{x} - y, \widehat{x} - y)_X - (\lambda x_0, \widehat{x} - y)_X - \\
&- (\widehat{x} - y, \lambda x_0)_X + |\lambda|^2 \|x_0\|_X^2 = \\
&= \|\widehat{x} - y\|_X^2 - \overline{\lambda}\,(\widehat{x} - y, x_0)_X - \lambda\overline{(\widehat{x} - y, x_0)}_X + |\lambda|^2 \|x_0\|_X^2 = \\
&= \|\widehat{x} - y\|_X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[\lambda\,(\widehat{x} - y, x_0)_X] + |\lambda|^2 \|x_0\|_X^2 = \\
&= \|\widehat{x} - y\|_X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\overline{\alpha}\alpha}{\|x_0\|_X^2} + \frac{|\alpha|^2}{\|x_0\|_X^2} = \\
&= \|\widehat{x} - y\|_X^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|x_0\|_X^2} < \|\widehat{x} - y\|_X^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\widehat{x}-$ не экстремальный элемент в (2.4). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1. 1. Оценка снизу для погрешности оптимального восстановления. Рассмотрим $x_0 \in W_l$, такой, что $\|I_j x_0\|_{Y_j} \le \delta_j, j = l+1, \ldots, k$. Рассмотрим также произвольный метод φ_0. Тогда

$$\begin{aligned}
2\|Tx_0\|_Z = \|Tx_0 - \varphi_0(0) - (T(-x_0) - \varphi_0(0))\|_Z \le \\
&\le \|Tx_0 - \varphi_0(0)\|_Z + \|T(-x_0) - \varphi_0(0)\|_Z \le \\
&\le 2e(T, W_l, I, \delta, \varphi_0),
\end{aligned}$$

а, значит, и

$$e(T, W_l, I, \delta, \varphi_0) \geq \sup_{\substack{x\in W_l \\ \|I_j x\|\leq \delta_j \\ j=l+1,\dots,k}} \|Tx\|_Z. \tag{2.5}$$

Заметим, что правая часть неравенства (2.5) не зависит от φ_0, поэтому

$$E(T, W_l, I, \delta) \geq \sup_{\substack{x\in W_l \\ \|I_j x\|\leq \delta_j \\ j=l+1,\dots,k}} \|Tx\|_Z. \tag{2.6}$$

Оценка снизу погрешности оптимального восстановления получена.

2. Оценка сверху погрешности оптимального восстановления. Рассмотрим векторное пространство $E = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j},$$

где

$$y^1 = (y_1^1, \dots, y_k^1), y^2 = (y_1^2, \dots, y_k^2).$$

Тогда экстремальная задача (2.3) может быть представлена в виде

$$\|\widetilde{I}x - \widetilde{y}_0\|_E^2 \to \min, \quad x \in X, \tag{2.7}$$

где $\widetilde{I}x = (I_1 x, \dots, I_k x)$, а $\widetilde{y}_0 = (0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_k)$. Из леммы 1 следует, что, если x_y– решение задачи (2.7), то $\left(\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0, \widetilde{I}x\right)_E = 0$ для всех $x \in X$. Отсюда получим

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}x - \widetilde{y}_0\|_E^2 &= \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y + \widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0\|_E^2 \\ &= \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 - 2\operatorname{Re}\left(\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y, \widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0\right)_E \\ &\quad + \|\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0\|_E^2 = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 + \|\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0\|_E^2,\end{aligned}$$

т.к.

$$\left(\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y, \widetilde{I}x_y - \widetilde{y}_0\right)_E = 0.$$

Таким образом, для всех $x \in X$

$$(2.8)\quad \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 \le \|\widetilde{I}x - \widetilde{y}_0\|_E^2 = \\ = \sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x \in W_l$ и $y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k$ таковы, что $\|I_j x - y_j\| \le \delta_j, j = l+1, \ldots, k$. Пусть также $\widetilde{Y}_j$— всюду плотные множества в $Y_j, j = l+1, \ldots, k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует

$$\widetilde{y} = (\widetilde{y}_{l+1}, \ldots, \widetilde{y}_k) \in \widetilde{Y}_{l+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_k,$$

такой, что

$$\|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \varepsilon, \quad j = l+1, \ldots, k.$$

Тем самым,

$$\|I_j x - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \\ \le \|I_j x - y_j\|_{Y_j} + \|y_j - \widetilde{y}_j\|_{Y_j} \le \delta_j + \varepsilon,\ j = l+1, \ldots, k.$$

Положим $z = x - x_y$. Тогда из (2.8) следует, что

$$(2.9)\qquad \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \widetilde{\delta}_j^2,$$

где

$$\widetilde{\delta}_j = \begin{cases} \delta_j, & 1 \le j \le l, \\ \delta_j + \varepsilon, & l+1 \le j \le k. \end{cases}$$

Для погрешности метода $\widehat{\varphi}(y) = Ay$ получим оценку

$$\|Tx - Ay\|_Z \le \|Tx - A\widetilde{y}\|_Z + \|A(\widetilde{y} - y)\|_Z \le \\ \|Tx - Tx_{\widetilde{y}}\|_Z + \|A\|(k-l)\varepsilon.$$

Нетрудно убедиться, что при всех $a, b > 0$

$$\sup_{\substack{z \in X \\ \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|_{Y_j}^2 \le a^2}} \|Tz\|_Z^2 = \frac{a^2}{b^2} \sup_{\substack{x \in X \\ \frac{a}{b} \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le b^2}} \|Tx\|_Z^2.$$

Учитывая (2.9), получим

$$\|Tx - Tx_{\widetilde{y}}\|_Z^2 = \|Tz\|_Z^2 \le \sup_{\substack{z\in X\\ \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Yj}^2 \le \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}} \|Tz\|_Z^2$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\delta_j^2} \sup_{\substack{z\in X\\ \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\|I_jz\|_{Y_j}^2 \le \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\delta_j^2}} \|Tz\|_Z^2$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\widetilde{\delta}_j^2}{\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\delta_j^2} \sup_{\substack{z\in X\\ \|I_jz\|_{Y_j}\le\delta_j,\\ j=1,\dots,k}} \|Tz\|_Z^2.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получим

$$\|Tx - Ay\|_Z \le \sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\\ j=1,\dots,k}} \|Tx\|_Z. \tag{2.10}$$

Из (2.6) и (2.10) следует, что

$$E\,(T, W_l, I, \delta) = \sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\\ j=1,\dots,k}} \|Tx\|_Z,$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = Ay$ является оптимальным. □

Приведем достаточное условие совпадения значений задач (2.1) и (2.2). Функция Лагранжа задачи (2.1) имеет вид

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^k \lambda_j\|I_jx\|_{Y_j}^2,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Теорема 2. *Пусть существуют* $\widehat{\lambda}_j \ge 0, j = 1, \dots, k$, *и допустимый в задаче* (2.1) *элемент* $\widehat{x}$, *такие, что*

$$(a)\ \min_{x\in X} \mathcal{L}(x,\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_k),$$

$$(b)\ \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\left(\|I_j\widehat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2\right) = 0.$$

Тогда $\widehat{x}-$ *решение этой задачи, и*

$$\sup_{\substack{x\in X, \|I_jx\|^2_{Y_j}\le \\ \le\delta_j^2, j=1,\dots,k}} \|Tx\|^2_Z = \sup_{\substack{x\in X,\\ \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\|I_jx\|^2_{Y_j}\le\sum_{j=1}^k\widehat{\lambda}_j\delta_j^2}} \|Tx\|^2_Z = \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\delta_j^2.$$

Доказательство. Положим $S=\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\delta_j^2$. Пусть $x-$ допустимый элемент в (2.1). Используя то, что

$$\|I_jx\|^2_{Y_j}\le\delta_j^2,\quad j=1,\dots,k,$$

а также условия (a) и (b), получим

$$-\|Tx\|^2_Z \ge -\|Tx\|^2_Z + \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\left(\|I_jx\|^2_{Y_j}-\delta_j^2\right)$$
$$= L(x,\widehat{\lambda})-S\ge L(\widehat{x},\widehat{\lambda})-S = -\|T\widehat{x}\|^2_Z +$$
$$+\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j\left(\|I_j\widehat{x}\|^2_{Y_j}-\delta_j^2\right) = -\|T\widehat{x}\|^2_Z,$$

т.е., $\widehat{x}$ — решение задачи (2.1). Из этих же рассуждений следует, что $\widehat{x}$ — решение и задачи (2.2). Покажем, что

$$\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=0.$$

Предположим, что

$$\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=a>0.$$

Тогда, если $x_0=\alpha\widehat{x}$, где $0<\alpha<1$, то

$$\mathcal{L}(x_0,\widehat{\lambda})=\alpha^2\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})<\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),$$

что противоречит минимальности $\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})$. Если же $a<0$, то, полагая $\alpha>1$, получим

$$\mathcal{L}(x_0,\widehat{\lambda})=\alpha^2\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})<\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),$$

что также противоречит минимальности функции
Лагранжа на элементе $\widehat{x}$. Следовательно, $\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=0$ и

$$\sup_{\substack{x\in X,\\ \|I_jx\|^2_{Y_j}\le\delta_j^2, j=1\div k}} \|Tx\|^2_Z = \|T\widehat{x}\|^2_Z = -\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})+S=S.$$

□

Теорема 1 была сообщена автору К.Ю. Осипенко. Менее общий ее вариант использовался в работе [**21**]. Теорема 2 — достаточно известный результат (ее доказательство приведено для полноты изложения) и ее в той или иной степени общности можно найти в работах [**10**], [**22**].

2.2. Постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала

Пусть X — линейное пространство, а Y — линейное нормированное пространство; x' — линейный функционал, действующий на X; W — некоторое центральносимметричное множество в X. Требуется восстановить функционал x' на множестве $W \subset X$ по приближенным значениям линейного оператора $I : X \to Y$. Пусть для любого $x \in W$ известен $y \in Y$, такой, что $\|Ix - y\|_Y \le \delta$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $m\colon Y \to K$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким из этих полей рассматривается пространство X. В соответствии с общей задачей восстановления линейного оператора погрешностью метода m назовем величину

$$e(x', W, I, \delta, m) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y,\\ \|Ix-y\|_Y\le\delta}} |\langle x', x\rangle - m(y)|,$$

а погрешностью оптимального восстановления — величину

$$E(x', W, I, \delta) = \inf_{m\colon Y\to K} e(x', W, I, \delta, m).$$

Оптимальным будем называть метод, на котором достигается точная нижняя грань.

Теорема 3. *Пусть для любого $x \in X$ справедливо тождество*

$$\langle x', x\rangle = \langle \widehat{m}, Ix\rangle + \langle r, x\rangle\,,$$

где $\widehat{m}$— линейный непрерывный функционал, r— некоторый линейный функционал. Пусть, кроме того, существует $\widehat{x} \in W$, такой, что

$$(a)\ \ \langle r, \widehat{x}\,\rangle = \sup_{x\in W} |\langle r, x\rangle|\,,$$

$$(b)\ \ \langle \widehat{m}, I\widehat{x}\,\rangle = \delta\|\widehat{m}\|,$$

$$(c)\ \ \|I\widehat{x}\|_Y \le \delta.$$

Тогда $\widehat{m}$ — оптимальный метод восстановления функционала x', а его погрешность

$$E(x', W, I, \delta) = \langle x', \widehat{x}\, \rangle\,.$$

Доказательство. Построим оценки сверху и снизу погрешности оптимального восстановления линейного функционала и покажем, что эти оценки совпадают.

1. Оценка снизу. Из (2.6) получаем

$$E(x', W, I, \delta) \geq \sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|_Y\leq\delta}} |\,\langle x', x\rangle\,| \geq |\,\langle x', \widehat{x}\,\rangle\,| = \langle x', \widehat{x}\,\rangle\,.$$

2. Оценка сверху. Пусть $x \in W$ и $y \in Y$ удовлетворяют неравенству $\|Ix - y\|_Y \leq \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}|\langle x', x\rangle - \langle \widehat{m}, y\rangle| &= |\langle x', x\rangle - \langle \widehat{m}, Ix\rangle + \langle \widehat{m}, Ix - y\rangle| \leq \\ &\leq |\langle x', x\rangle - \langle \widehat{m}, Ix\rangle| + |\langle \widehat{m}, Ix - y\rangle| \leq \\ &\leq \sup_{x\in W} |\langle r, x\rangle| + \|\widehat{m}\|\,\delta = \langle r, \widehat{x}\,\rangle + \langle \widehat{m}, I\widehat{x}\,\rangle = \langle x', \widehat{x}\,\rangle\,.\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к точной верхней грани по $x \in W$ таким, что

$$\|Ix - y\|_Y \leq \delta,$$

получим

$$E(x', W, I, \delta) \leq \langle x', \widehat{x}\,\rangle\,.$$

Таким образом,

$$E(x', W, I, \delta) = \langle x', \widehat{x}\,\rangle\,,$$

а $\widehat{m}(y)$ — оптимальный метод. □

Рассмотрим некоторый частный случай восстановления линейного функционала на евклидовых пространствах.

Пусть X — линейное пространство, а Y_j — евклидовы пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j = 1, 2$. Пусть $L\colon X \to Y_1$ и $I\colon X \to Y_2$— линейные операторы. Положим

$$W = \{x \in X : \|Lx\|_{Y_1} \leq 1\}\,.$$

Требуется восстановить функционал $\langle x', x\rangle$, $x \in W$, по неточным значениям Ix. Считаем, что для каждого $x \in W$ известен элемент $y \in Y_2$, такой, что $\|Ix-y\|_{Y_2} \le \delta$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $m\colon Y_2 \to K$. В соответствии с введенными ранее определениями погрешность метода m равна

$$e(x',W,I,\delta,m) = \sup_{\substack{x\in W,\ y\in Y_2\\ \|Ix-y\|_{Y_2}\le\delta}} |\,\langle x',x\rangle - m(y)|,$$

а погрешность оптимального восстановления линейного функционала равна

$$E(x',W,I,\delta) = \inf_{m\colon Y_2\to K} e(x',W,I,\delta,m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом.

Теорема 4. *Пусть при некоторых* $\widehat\lambda_1 \ge 0$, $\widehat\lambda_2 \ge 0$ *и* $\widehat x \in W$ *для любого* $x\in X$ *справедливо тождество*

$$\langle x',x\rangle = \widehat\lambda_1\,(Ix,I\widehat x)_{Y_2} + \widehat\lambda_2\,(Lx,L\widehat x)_{Y_1}\,,$$

а, кроме того, $\|I\widehat x\|_{Y_2} = \delta$ *и при* $\widehat\lambda_2 > 0$ $\|L\widehat x\|_{Y_1} = 1$, *а при* $\widehat\lambda_2 = 0$ $\|L\widehat x\|_{Y_1} \le 1$. *Тогда метод*

$$\widehat m(y) = \widehat\lambda_1\,(y,I\widehat x)_{Y_2}$$

является оптимальным, а погрешность оптимального восстановления равна

$$E(x',W,I,\delta) = \widehat\lambda_1\delta^2 + \widehat\lambda_2.$$

Доказательство. Из теоремы 3 вытекает, что достаточно проверить условия a)–c) этой теоремы для

$$\langle r,x\rangle = \widehat\lambda_2(Lx,L\widehat x)_{Y_1}, \quad \langle \widehat m,y\rangle = \widehat\lambda_1(y,I\widehat x)_{Y_2}.$$

Имеем

$$\sup_{x\in W} |\,\langle r,x\rangle\,| = \widehat\lambda_2 \sup_{x\in W}(Lx,L\widehat x)_{Y_1} \le \widehat\lambda_2.$$

С другой стороны,

$$\langle r,\widehat x\,\rangle = \widehat\lambda_2\|L\widehat x\|^2_{Y_1} = \widehat\lambda_2.$$

Тем самым

$$\sup_{x\in W} |\,\langle r,x\rangle\,| = \widehat\lambda_2 = \langle r,\widehat x\,\rangle$$

и условие a) выполнено.

Далее,

$$\|\widehat{m}\| = \widehat{\lambda}_1 \sup_{\|y\|_{Y_2}\le 1} (y, I\widehat{x})_{Y_2} \le \widehat{\lambda}_1\delta,$$

а для $y_0 = I\widehat{x}/\delta$ $\|y_0\|_{Y_2} = 1$ и $(y_0, I\widehat{x})_{Y_2} = \delta$. Таким образом, $\|\widehat{m}\| = \widehat{\lambda}_1\delta$. Следовательно,

$$\langle \widehat{m}, I\widehat{x}\,\rangle = \widehat{\lambda}_1(I\widehat{x}, I\widehat{x})_{Y_2} = \widehat{\lambda}_1\delta^2 = \delta\|\widehat{m}\|,$$

и условие b) тоже выполнено. Условие c) выполняется очевидным образом. □

Теорема, подобная теоремам 3 и 4, указывающая на связь множителей Лагранжа в двойственной экстремальной задаче (в вещественном случае)

$$\langle x', x\rangle \to \max, \quad x \in W, \quad \|Ix\|_Y \le \delta,$$

доказана в книге Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова "Выпуклый анализ".

2.3. Понятие обобщенного решения уравнения параболического типа

Пусть D — ограниченная область с кусочногладкой границей ∂D, $D \subset R^n$. Рассмотрим цилиндр $Q_T = \{x \in D, 0 < t < T\}$, $\Gamma = \{x \in \partial D, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность этого цилиндра, а $D_\tau = \{x \in D, t = \tau, 0 < \tau < T\}$ — сечение цилиндра, в частности, $D_0 = \{x \in D, t = 0\}$ — его нижнее основание, $D_T = \{x \in D, t = T\}$ — верхнее основание, а $\Gamma_T = \{x \in \partial D, t = T\}$ — граница сечения $t = T$.

Обобщенной производной функции $f(x)$, $x \in Q \subset R^n$, называется (см. **[23]**) $f^{(\alpha)}(x) \in L_2(Q)$, такая, что для любой функции $g(x) \in C^{|\alpha|}(\overline{D})$ справедливо равенство

$$\int_Q f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int_Q f^\alpha(x)\overline{g(x)}dx.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, где α_j, $j = 1, \dots, n$ — целые неотрицательные числа, а

$$D^\alpha g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} g(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Рассмотрим следующие классы функций:

$C^{2,1}(Q_T)$– множество всех функций $f(x,t)$, у которых существуют в Q_T непрерывные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ — целые неотрицательные числа, такие, что $\alpha_1+\ldots\alpha_n+\beta\le 2$, т.е. существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\ \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial f}{\partial t};\quad i,j=1,\ldots,n.$$

$H^{2,1}(Q_T)$ — пространство функций $f(x,t)$, у которых существуют обобщенные производные вида

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}},$$

принадлежащие классу $L_2(Q_T)$, где также $\alpha_1+\ldots\alpha_n+\beta\le 2$.

$H^{(1,0)}(Q_T)$ — пространство функций $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, таких, что все их обобщенные производные

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

при $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n\le 1$ принадлежат $L_2(Q_T)$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L_2(Q_T);\quad i=1,\ldots,n.$$

Функция $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C_2(Q_T\cup\Gamma\cup\overline{D_0})$, удовлетворяющая в Q_T уравнению

$$u_t-\operatorname{div}(k(x)\nabla u)+a(x)u=f(x,t), \tag{2.11}$$

где

$$k(x)\in C^1(\overline{Q}_T),\quad a(x)\in C(\overline{Q}_T),\quad k(x)\ge k_0>0,$$

на D_0 — начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{2.12}$$

а на Γ — граничному условию

$$u|_{\Gamma}=\chi, \tag{2.13}$$

называется классическим решением задачи (2.11)–(2.13).

ТЕОРЕМА 5 ([**23**]). *Классическое решение задачи* (2.11)–(2.13) *удовлетворяет тождеству*

$$\int_{Q_T} (-uv_t + k\nabla u \nabla v + auv)\, dxdt = \int_{D_0} \varphi v dx + \int_{Q_T} fv dxdt \tag{2.14}$$

для любого $v(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$.

В случае недостаточной гладкости функций в начальном и краевом условиях приходится понимать решение задачи (2.11)–(2.13) в обобщенном смысле. Для построения обобщенного решения этой задачи используется тождество (2.14). Если правые части (2.12) и (2.13) принадлежат пространству $L_2(Q_T)$, то обобщенным решением задачи (2.11)-(2.13) называется функция $u(x,t) \in H^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая граничному условию (2.13) и тождеству (2.14) при всех $v(x,t) \in H^{1,0}(Q_T)$, таких, что

$$v|_{D_T} = 0, v|_{\Gamma_T} = 0.$$

2.4. Решение общего эволюционного уравнения

Пусть L — некоторый оператор, действующий на ограниченном множестве $\Omega \in \mathbb{R}^d$, а Γ — кусочногладкая граница области Ω, т.е. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Пусть в задаче

$$LX = \lambda X, \quad x \in \Omega, \quad X|_\Gamma = 0$$

существует счетный набор действительных собственных чисел $\lambda_k \geq 0,\ k \in N$, и соответствующих им попарно ортогональных собственных функций оператора L: $X_{kj}(x),\ j = 1, \dots, m_k$, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ без точек сгущения. Здесь m_k — кратность собственного числа λ_k. Предположим, кроме того, что $\{X_{kj}\}_{k\in N, j=1,\dots,m_k}$ — ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega)$. Это предположение выполняется, например, для оператора

$$L = -\left(\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)\right),\ x \in \Omega,$$

если $k(x) \geq k_0 > 0,\ a \geq 0$ (см. [**23**]).

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u_t = Lu, \\ u(x,t)|_{t=0} = f(x), \\ u(x,t)|_{x\in\Gamma} = 0. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Решение задачи (2.15), получаемое методом Фурье разделения переменных, имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj} X_{kj}(x), \tag{2.16}$$

где $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj} X_{kj}(x)$.

2.5. Собственные функции оператора Лапласа в d-мерном шаре

Для построения метода оптимального восстановления решения обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре нам потребуются собственные функции оператора Лапласа. Пусть Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3, \dots$, а

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} {x_j}^2 < 1 \right\}.$$

Сфера $\mathbb{S}^{d-1}$ — граница шара $\mathbb{B}^d$. Пусть $\mathcal{P}_k$ — множество однородных многочленов степени k. Известно (см. [**24**]), что размерность пространства $\mathcal{P}_k$ равна

$$d_k = C_{d+k-1}^{d-1} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}.$$

Рассмотрим многочлены из $\mathcal{P}_k$, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\Delta P = 0, \quad P \in \mathcal{P}_k.$$

Множество таких многочленов $\mathcal{A}_k$ называется пространством однородных гармонических многочленов степени k. Очевидно, что $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}_k$. Размерность $\mathcal{A}_k$ равна

$$a_k = \frac{(d+k-3)!(d+2k-2)}{(d-2)!k!}.$$

Множество многочленов из $\mathcal{A}_k$, суженное на сферу $\mathbb{S}^{d-1}$, называется множеством однородных сферических гармоник и обозначается $\mathcal{H}_k$. Рассмотрим некоторую систему однородных сферических гармоник $\left\{ Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)} \right\}$, образующую ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$. Система функций $\left\{ Y_j^{(k)} \right\}$, $j = 1, \dots, a_k$; $k = 0, 1, \dots$, является базисом в $L_2\left(\mathbb{S}^{d-1}\right)$ (см. [**24**]). Функции

$$Z_{skj}(x) = \frac{J_p(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где J_p — функция Бесселя первого рода p-го порядка, $\mu_s^{(p)}$ — ее корни, занумерованные в порядке возрастания, $p = k + (d-2)/2$, $r = |x|$, $x' = x/|x|$, являются собственными функциями оператора Лапласа в шаре $\mathbb{B}^d$. Здесь $s \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Эти функции можно нормировать, положив

$$Y_{skj}(x) = \frac{Z_{skj}(x)}{\|Z_{skj}(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}.$$

Система функций $\{Y_{skj}(x)\}$ является ортонормированным базисом в $L_2(B^d)$. Этим функциям соответствуют собственные числа $\left(\mu_s^{(p)}\right)^2$.

Глава 3

Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения теплопроводности

3.1. Оптимальное восстановление решения эволюционного уравнения

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения общего эволюционного уравнения (2.15) по неточно измеренным его решениям в два момента времени. Будем предполагать, что нам известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\Omega)$, такие, что

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \le \delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Требуется, зная функции $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$, восстановить значение решения (2.16) задачи (2.15) в момент τ: $t_1 < \tau < t_2$. В соответствии с общей постановкой задачи (см. §2.1), здесь $X = Y_1 = Y_2 = Z = L_2(\Omega)$, $k = 2$, $I_j x$ — значения решения задачи (2.15) в моменты t_j, $j = 1, 2$, соответственно, а Tx — в момент времени τ, $l = 0$, $W_0 = L_2(\Omega)$.

Погрешностью метода $\xi\colon L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ называется величина

$$e_\tau \left(L_2(\Omega), \delta_1, \delta_2, \xi\right) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\Omega) \\ \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - \xi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\Omega)},$$

а погрешностью оптимального восстановления — величина

$$E_\tau \left(L_2(\Omega), \delta_1, \delta_2\right) = \inf_{\xi\colon L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} e_\tau \left(L_2(\Omega), \delta_1, \delta_2, \xi\right).$$

Введем следующие обозначения: $\beta_m = e^{-2\lambda_m}$, где λ_m, $m = 1, 2, \ldots$ — собственные числа оператора L,

$$\Delta_m = [\beta_{m+1}^{t_2 - t_1}, \beta_m^{t_2 - t_1}), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \Delta_0 = [\beta_1^{t_2 - t_1}, +\infty),$$

$$\widehat{\mu}_1 = \begin{cases} \dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_2} - \beta_m^{\tau-t_2}}{\beta_{m+1}^{t_1-t_2} - \beta_m^{t_1-t_2}}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_m,\ m \geq 1, \\ \beta_1^{\tau-t_1}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0, \end{cases}$$

$$\widehat{\mu}_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta_m^{\tau-t_1} - \beta_{m+1}^{\tau-t_1}}{\beta_m^{t_2-t_1} - \beta_{m+1}^{t_2-t_1}}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_m,\ m \geq 1, \\ 0, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0. \end{cases}$$

Теорема 6. *Для погрешности оптимального восстановления решения (2.16) задачи (2.15) имеет место равенство*

$$E_\tau\left(L_2(\Omega), \delta_1, \delta_2\right) = \sqrt{\widehat{\mu}_1\delta_1^2 + \widehat{\mu}_2\delta_2^2}, \tag{3.1}$$

а метод восстановления

$$\widehat{\xi}(y_1, y_2)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\widehat{\mu}_1 d_{kj}\beta_k^{t_1/2} + \widehat{\mu}_2 p_{kj}\beta_k^{t_2/2}}{\widehat{\mu}_1\beta_k^{t_1} + \widehat{\mu}_2\beta_k^{t_2}} X_{kj}(x)e^{-\lambda_k\tau}, \tag{3.2}$$

где d_{kj} и p_{kj} — коэффициенты Фурье функций $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ при разложении по ортонормированной системе $X_{kj}(\cdot)$ собственных функций оператора L, является оптимальным.

Доказательство. Согласно теореме 1, с задачей вычисления погрешности оптимального восстановления и построения оптимального метода тесно связана следующая двойственная задача

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \to \max, \quad \|u(\cdot,t_j)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2, \qquad f(\cdot) \in L_2(\Omega). \tag{3.3}$$

Представим эту задачу в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k\tau} b_k \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t_j} b_k \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2,$$

где

$$b_k = \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj}^2,$$

а C_{kj} — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$. Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(f(\cdot),\mu_1,\mu_2)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{-2\lambda_k\tau}\left(-1+\mu_1 e^{-2\lambda_k(t_1-\tau)}+\mu_2 e^{-2\lambda_k(t_2-\tau)}\right).$$

Из теорем 1, 2 следует, что если существуют такие $\widehat{\mu}_j\geq 0$, $j=1,2$, а также допустимая в задаче (3.3) функция

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\widetilde{C}_{kj}X_{kj}(x),$$

для которых выполнены условия

$$(a)\qquad \min_{f\in L_2(\Omega)}\mathcal{L}(f(\cdot),\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2)=\mathcal{L}(\widetilde{f}(\cdot),\widehat{\mu}_1,\widehat{\mu}_2),$$

$$(b)\ \widehat{\mu}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{b}_k e^{-2\lambda_k t_1}-\delta_1^2\right)+\widehat{\mu}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{b}_k e^{-2\lambda_k t_2}-\delta_2^2\right)=0,$$

где $\widetilde{b}_k=\sum_{j=1}^{m_k}\widetilde{C}_{kj}^2$, и, если, кроме того, при всех $y_1(\cdot),y_2(\cdot)\in\widetilde{Y}$, где $\widetilde{Y}$ — всюду плотное множество функций в $L_2(\Omega)$, в задаче

$$(3.4)\quad \widehat{\mu}_1\|u(\cdot,t_1)-y_1(\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}+\widehat{\mu}_2\|u(\cdot,t_2)-y_2(\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\to\min,\quad f(\cdot)\in L_2(\Omega),$$

существует решение

$$\widehat{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\widehat{C}_{kj}X_{kj}(x)\in L_2(\Omega),$$

а оператор

$$A(y_1,y_2)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k\tau}\sum_{j=1}^{m_k}\widehat{C}_{kj}X_{kj}(x)$$

является непрерывным на $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$, то имеет место равенство (3.2), а метод

$$\widehat{\xi}(y_1,y_2)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k\tau}\sum_{j=1}^{m_k}\widehat{C}_{kj}X_{kj}(x)$$

является оптимальным.

Пусть $\delta_2^2/\delta_1^2 \in \Delta_m$, $m \geq 1$. Рассмотрим функцию $g(z) = -1 + \mu_1 e^{-2z(t_1-\tau)} + \mu_2 e^{-2z(t_2-\tau)}$. Нетрудно убедиться, что эта функция выпукла. Следовательно, если $g(z) = 0$ при $z = \lambda_m$ и $z = \lambda_{m+1}$, то больше нулей у нее нет и $g(\lambda_k) \geq 0$, при всех $k \in N$. Выберем $\widehat{\mu}_1$ и $\widehat{\mu}_2$ из условия $g(z_m) = g(z_{m+1}) = 0$. Имеем

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_1 e^{-2\lambda_m t_1} + \widehat{\mu}_2 e^{-2\lambda_m t_2} = e^{-2\lambda_m \tau}, \\ \widehat{\mu}_1 e^{-2\lambda_{m+1} t_1} + \widehat{\mu}_2 e^{-2\lambda_{m+1} t_2} = e^{-2\lambda_{m+1}\tau}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{\beta_{m+1}^{\tau-t_2} - \beta_m{}^{\tau-t_2}}{\beta_{m+1}^{t_1-t_2} - \beta_m^{t_1-t_2}}, \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{\beta_m^{\tau-t_1} - \beta_{m+1}^{\tau-t_1}}{\beta_m^{t_2-t_1} - \beta_{m+1}^{t_2-t_1}}.$$

Таким образом, при всех $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$ $\mathcal{L}\left(f(\cdot), \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2\right) \geq 0$.

Для выполнения равенства (b) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2\lambda_k t_1} = \delta_1^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2\lambda_k t_2} = \delta_2^2.$$

Положим $\widehat{b}_k = 0$ при $n \neq m, m+1$, а $\widehat{b}_m$ и $\widehat{b}_{m+1}$ выберем из условия

$$\begin{cases} \widehat{b}_m e^{-2\lambda_m t_1} + \widehat{b}_{m+1} e^{-2\lambda_{m+1} t_1} = \delta_1^2 \\ \widehat{b}_m e^{-2\lambda_m t_2} + \widehat{b}_{m+1} e^{-2\lambda_{m+1} t_2} = \delta_2^2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение системы (3.5) имеет вид

$$\widehat{b}_m = \frac{\delta_1^2 e^{-2\lambda_{m+1} t_2} - \delta_2^2 e^{-2\lambda_{m+1} t_1}}{e^{-2(\lambda_m t_1 + \lambda_{m+1} t_2)} - e^{-2(\lambda_m t_2 + \lambda_{m+1} t_1)}},$$

$$\widehat{b}_{m+1} = \frac{\delta_2^2 e^{-2\lambda_m t_1} - \delta_1^2 e^{-2\lambda_m t_2}}{e^{-2(\lambda_m t_1 + \lambda_{m+1} t_2)} - e^{-2(\lambda_m t_2 + \lambda_{m+1} t_1)}}.$$

В силу того, что $\delta_2^2/\delta_1^2 \in \Delta_m$, $\widehat{b}_m, \widehat{b}_{m+1} \geq 0$. Тогда функция

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k=m}^{m+1} \sqrt{\widehat{b}_k} X_{k1}(x)$$

является допустимой в задаче (3.3) и $\mathcal{L}\left(\widetilde{f}(\cdot), \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2\right) = 0$, и, значит, выполнены условия (a) и (b).

В случае, когда

$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0,$$

Положим $\widehat{\mu}_1 = \beta_1^{\tau-t_1}$, $\widehat{\mu}_2 = 0$. Тогда при всех $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$ $\mathcal{L}\left(f(\cdot), \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2\right) \geq 0$, а для

$$\widetilde{f}(x) = \delta_1 e^{\lambda_1 t_1} X_{11}(x)$$

имеем $\mathcal{L}\left(\widetilde{f}(\cdot), \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2\right) = 0$. Кроме того, функция $\widetilde{f}(\cdot)$ допустима в задаче (3.3), так как для нее

$$\|u(\cdot,t_1)\|^2_{L_2(\Omega)} = \delta_1^2, \quad \|u(\cdot,t_2)\|^2_{L_2(\Omega)} = \delta_1^2 e^{2\lambda_1(t_1-t_2)} \leq \delta_2^2.$$

Решим теперь задачу (3.4). В качестве всюду плотного в $L_2(\Omega)$ множества выберем $\mathcal{M}(\Omega)$– всевозможные линейные комбинации первых n собственных функций оператора L, $n \in N$. Тогда задача (3.4) примет вид

$$\widehat{\mu}_1 \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \left(C_{kj} e^{-\lambda_k t_1} - d_{kj}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj}^2 e^{-2\lambda_k t_1} \right) + \widehat{\mu}_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \left(C_{kj} e^{-\lambda_k t_2} - p_{kj}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj}^2 e^{-2\lambda_k t_2} \right) \to \min.$$

Легко видеть, что решение этой задачи

$$\widehat{C}_{kj} = \begin{cases} \dfrac{\widehat{\mu}_1 d_{kj} e^{-\lambda_k t_1} + \widehat{\mu}_2 p_{kj} e^{-\lambda_k t_2}}{\widehat{\mu}_1 e^{-2\lambda_k t_1} + \widehat{\mu}_2 e^{-2\lambda_k t_2}}, & k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Остается применить теорему 1. □

3.2. Оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре

Рассмотрим задачу оптимального восстановления решения начально - краевой задачи для обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре по неточным значениям этого решения в моменты $t = t_1$

и $t = t_2$.

Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\},$$

$$\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x \in R^d : |x| = 1 \right\}.$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ равенством

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj},$$

где

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj}(x), \quad x \in \mathbb{B}^d,$$

Y_{skj} — ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в шаре $\mathbb{B}^d$, $\mu_s^{(p)}$ — корни функций Бесселя 1-го рода p-го порядка, $p = k + \dfrac{d-2}{2}$ (см. §5 главы 2).

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0, \\ & u|_{t=0} = f(x), \quad f(\cdot) \in L_2\left(\mathbb{B}^d\right), \\ & u(x,t)|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} = 0, \quad x \in \mathbb{B}^d, \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Точное решение задачи (3.6) получается методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\mu_s^{(p)}\right)^{\alpha} t} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj}(x). \tag{3.7}$$

Задача (3.6) может рассматриваться как частный случай задачи (2.15), где оператор $L = (-\Delta)^{\alpha/2}$. Из неравенств

$$\mu_s^{(n)} < \mu_s^{(n+1)} < \mu_{s+1}^{(n)} \tag{3.8}$$

и асимптотики корней корней функций Бесселя 1-го рода n-го порядка

$$\mu_1^{(n)} = n + O(n^{\frac{1}{3}})$$

(см. [**25**]) следует, что последовательность чисел $\mu_s^{(n)}$ не имеет точек сгущения и $\mu_s^{(n)} \to \infty$ при $n \to \infty$ так же, как и $\mu_s^{(n)} \to \infty$ при $s \to \infty$.

Таким образом, последовательность $\mu_s^{(n)}$ допускает перенумерацию в порядке возрастания. Пусть

$$\mu_{s_1}^{(p_1)} < \mu_{s_2}^{(p_2)} < \ldots < \mu_{s_n}^{(p_n)} < \ldots.$$

Тогда система функций $X_{mj} = Y_{s_m k_m j}(\cdot)$, $m = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots, a_k$, образует ортонормированный базис в $L_2(B^d)$, являясь при этом системой собственных функций оператора $(-\Delta)^{\alpha/2}$, соответствующих собственным числам $\left(\mu_{s_m}^{(p_m)}\right)^2$. Введем обозначения в соответствии с обозначениями для общего случая (т.е. для задачи (2.15)).

$$a_s^k = e^{-2(\mu_s^{(p)})^\alpha}, \quad a_{s_m}^{k_m} = \beta_m, \quad \Delta_m = [\beta_{m+1}^{t_2-t_1}, \quad \beta_m^{t_2-t_1}),$$
$$m = 1, 2, ...; \quad \Delta_0 = [{\beta_1}^{t_2-t_1}, +\infty).$$

При этом

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > \ldots.$$

Предположим, что нам известны решения задачи (3.6) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в моменты t_1 и t_2 соответственно, $0 \le t_1 < t_2$, заданные с погрешностями δ_1 и δ_2 в метрике $L_2(B^d)$:

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\| \le \delta_j, j = 1, 2.$$

Задача оптимального восстановления решения (3.7) обобщенного уравнения теплопроводности представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в §1 главы 2. В соответствии с общими определениями здесь погрешностью оптимального восстановления решения (3.7) задачи (3.6) является величина

$$E_\tau\left(\alpha, L_2(\mathbb{B}^d), \delta_1, \delta_2\right) = \\ = \inf_\xi \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d), \\ \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - \xi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L(\mathbb{B}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем методам $\xi\colon L_2(B^d) \times L_2(B^d) \to L_2(B^d)$.

Представим функции $y_j(x)$, $j = 1, 2$, в виде

$$y_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{1skj} Y_{skj}(x),\ y_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{2skj} Y_{skj}(x).$$

Здесь

$$y_{1skj}=\int_{\mathbb{B}^d} y_1(x)Y_{skj}(x)\,dx, \quad y_{2skj}=\int_{\mathbb{B}^d} y_2(x)Y_{skj}(x)\,dx.$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases}\dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_2}-\beta_m^{\tau-t_2}}{\beta_{m+1}^{t_2-t_1}-\beta_m^{t_2-t_1}}, & \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\in\Delta_m,\ m=1,2,...;\\ (a_1^0)^{\tau-t_1} & ,\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\in\Delta_0;\end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases}\dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_1}-\beta_m^{\tau-t_1}}{\beta_{m+1}^{t_2-t_1}-\beta_m^{t_2-t_1}} & ,\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\in\Delta_m,\ m=1,2,...;\\ 0 & ,\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\in\Delta_0.\end{cases}$$

Из теоремы 6 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. *При всех $\delta_1>0,\delta_2>0$ имеет место равенство*

$$E(\alpha,L_2(B^d),\delta_1,\delta_2)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1{\delta_1}^2+\widehat{\lambda}_2{\delta_2}^2},$$

при этом метод восстановления решения задачи (3.6)

$$\widehat{\xi}(y_1,y_2)(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_s^k)^{\tau/2}\cdot \tag{3.9}$$
$$\cdot\sum_{j=1}^{a_k}\frac{\widehat{\lambda}_1y_{1skj}(a_s^k)^{t_1/2}+\widehat{\lambda}_2y_{2skj}(a_s^k)^{t_2/2}}{\widehat{\lambda}_1(a_s^k)^{t_1}+\widehat{\lambda}_2(a_s^k)^{t_2}}Y_{skj}(x)$$

является оптимальным.

3.3. Восстановление решения уравнения теплопроводности в круге и в шаре.

Рассмотрим примеры задачи оптимального восстановления решения классического уравнения теплопроводности ($\alpha=2$) в двумерном и трехмерном шарах как частные случаи задачи (3.6).

1) При $d = 2$ $p = k$, $a_k = 2$

$$Z_{sk1}(r, \varphi) = J_k\left(\mu_s^{(k)} r\right) \cos k\varphi,$$

$$Z_{sk2}(r, \varphi) = J_k\left(\mu_s^{(k)} r\right) \sin k\varphi,$$

$$Y_{skj}(\cdot, \cdot) = \frac{Z_{skj}(\cdot, \cdot)}{\|Z_{skj}(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}}, \; j = 1, 2$$

(см., например, [**25**]). Метод (3.9) будет иметь вид

$$\widehat{\xi}(y_1, y_2)(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_s^k)^{\tau/2} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j=1}^{2} \frac{\widehat{\lambda}_1 y_{1skj} (a_s^k)^{t_1/2} + \widehat{\lambda}_2 y_{2skj} (a_s^k)^{t_2/2}}{\widehat{\lambda}_1 (a_s^k)^{t_1} + \widehat{\lambda}_2 (a_s^k)^{t_2}} Y_{skj}(r, \varphi).$$

2) При $d = 3$ $a_k = 2k + 1$, $p = k + 1/2$.

$$Y_{skj}(\cdot, \cdot) = \frac{Z_{skj}(\cdot, \cdot)}{\|Z_{skj}(\cdot, \cdot)\|_{L_2(D)}}, \; j = 0, 1, \dots, 2k,$$

где

$$Z_{skj}(r, \varphi, \theta) = \cos j\varphi P_k^j(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+1/2}\left(\mu_s^{(k+1/2)} r\right),$$
$$j = 0, 1, \dots, k,$$
$$Z_{skj}(r, \varphi, \theta) = \sin(j-k)\varphi P_k^{j-k}(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{k+1/2}\left(\mu_s^{(k+1/2)} r\right),$$
$$j = k+1, \dots, 2k,$$

где $P_k^j(\cdot)$ — присоединенные функции Лежандра.

Метод (3.9) будет иметь здесь вид

$$\widehat{\xi}(y_1, y_2)(r, \varphi, \theta) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_s^k)^{\tau/2} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{2k} \frac{\widehat{\lambda}_1 y_{1skj} (a_s^k)^{t_1/2} + \widehat{\lambda}_2 y_{2skj} (a_s^k)^{t_2/2}}{\widehat{\lambda}_1 (a_s^k)^{t_1} + \widehat{\lambda}_2 (a_s^k)^{t_2}} Y_{skj}(r, \varphi, \theta).$$

3.4. Восстановление решения уравнения теплопроводности на отрезке.

Случай $d = 1$ имеет свои специфические особенности. Мы рассматриваем его отдельно, хотя общая методика построения оптимального метода совпадает с той, которая применялась при $d > 1$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \\ &u(x,0) = f(x), \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Предполагаем, что $f(\cdot) \in L_2([0,\pi]) = L_2$. Известно, что решение задачи (3.10) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-k^2 t} \sin kx, \tag{3.11}$$

где

$$f_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

— коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$.

Пусть нам известны $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ — приближенные решения (3.11) в моменты t_1 и t_2, такие, что

$$\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2} \le \delta_j, \quad j = 1,2. \tag{3.12}$$

Требуется восстановить решение в момент времени τ, $t_1 < \tau < t_2$.

В соответствии с общей постановкой задачи восстановления погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_\tau(\delta_1,\delta_2) = \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2,\\ y_1(\cdot),y_2(\cdot)\in L_2\\ \|u(\cdot,t_j)-y_j(\cdot)\|_{L_2}\le\delta_j,\\ j=1,2,}} \|u(\cdot,\tau) - m(y_1,y_2)(\cdot)\|_{L_2},$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям (методам) $m\colon L_2 \times L_2 \to L_2$. Метод, на котором достигается эта нижняя грань, называется оптимальным.

Введем следующие обозначения

$$\Delta_s = \left[e^{-2(s+1)^2(t_2-t_1)}; e^{-2s^2(t_2-t_1)}\right),$$
$$s \in N, \Delta_0 = \left[e^{-2(t_2-t_1)}; \infty\right).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} e^{2s^2(\tau-t_1)} \dfrac{1-e^{2(2s+1)(t_2-\tau)}}{1-e^{2(2s+1)(t_2-t_1)}}, \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_s, s \geq 1, \\ e^{-2(\tau-t_1)}, \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0. \end{cases}$$
$$(3.13) \qquad \widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} e^{2(s+1)^2(t_2-\tau)} \dfrac{1-e^{2(2s+1)(t_1-\tau)}}{1-e^{2(2s+1)(t_2-t_1)}}, \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_s, s \geq 1, \\ 0, \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0, \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Для любых $\delta_1, \delta_2 > 0$ погрешность оптимального восстановления решения задачи* (3.10) *равна*

$$E_\tau(\delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y_1, y_2)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{-k^2 t_1} y_{1k} + \widehat{\lambda}_2 e^{-k^2 t_2} y_{2k}}{\widehat{\lambda}_1 e^{-2k^2 t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2k^2 t_2}} e^{-k^2 \tau} \sin kx,$$

где y_{1k} и y_{2k} — коэффициенты Фурье функций $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$, является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$(3.14) \qquad \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2}^2 \to \max, \ \|u(\cdot, t_j)\|_{L_2}^2 \leq \delta_j^2, \ j = 1, 2, \ f(\cdot) \in L_2.$$

Представим (3.14) в виде

$$(3.15) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 e^{-2k^2\tau} \to \max, \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 e^{-2k^2 t_j} \leq \delta_j^2, \ j = 1, 2.$$

Функция Лагранжа задачи (3.15) имеет вид

$$\mathcal{L}\left(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\left(-e^{-2k^2\tau}+\lambda_1e^{-2k^2t_1}+\lambda_2e^{-2k^2t_2}\right).$$

Из теорем 1 и 2 следует, что, если существуют $\widehat{\lambda}_j\geq 0$, $j=1,2$, а также допустимая в задаче (3.14) функция $\widetilde{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k\sin kx$, для которых выполнены условия

$$(a)\quad \min_{f\in L_2}\mathcal{L}\left(f(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\right)=\mathcal{L}\left(\widetilde{f}(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\right),$$

$$(b)\ \widehat{\lambda}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^2e^{-2k^2t_1}-\delta_1^2\right)+\widehat{\lambda}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^2e^{-2k^2t_2}-\delta_2^2\right)=0,$$

и, если, кроме того, при всех $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)\in\widetilde{Y}$, где $\widetilde{Y}-$ всюду плотное множество функций из L_2, в задаче

$$(c)\ \widehat{\lambda}_1\|u(\cdot,t_1)-y_1(\cdot)\|_{L_2}^2+\widehat{\lambda}_2\|u(\cdot,t_2)-y_2(\cdot)\|_{L_2}^2\to\min,$$
$$f(\cdot)\in L_2$$

существует решение

$$\widehat{f}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k\sin kx\in L_2,$$

а оператор

$$A(y_1,y_2)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_ke^{-k^2\tau}\sin kx$$

является непрерывным на $L_2\times L_2$, то

$$E_\tau(L_2,\delta_1,\delta_2)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1^2\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y_1,y_2)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_ke^{-k^2\tau}\sin kx$$

является оптимальным.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}\left(f(\cdot),\lambda_1,\lambda_2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\left(-e^{-2k^2\tau}+\lambda_1e^{-2k^2t_1}+\lambda_2e^{-2k^2t_2}\right).$$

Пусть $\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_s, s \geq 1$. Нетрудно убедиться, что функция $g(z) = -1 + \widehat{\lambda}_1 e^{-2z(t_1-\tau)} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2z(t_2-\tau)}$ выпукла. Следовательно, если $g(z) = 0$ при $z = s^2$ и $z = (s+1)^2$, то больше нулей у нее нет. Кроме того, $g(k^2) \geq 0$ при $k \in N$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ из условия $g(s^2) = g((s+1)^2) = 0$. Имеем

$$\widehat{\lambda}_1 e^{-2s^2 t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2s^2 t_2} = e^{-2s^2\tau},$$
$$\widehat{\lambda}_1 e^{-2(s+1)^2 t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2(s+1)^2 t_2} = e^{-2(s+1)^2\tau},$$

откуда в качестве решения получим (3.13).

Положим $\widetilde{f}_k = 0$ при $k \neq s, s+1$, а $\widetilde{f}_s, \widetilde{f}_{s+1}$ выберем из условия

$$\widetilde{f}_s^2 e^{-2s^2 t_1} + \widetilde{f}_{s+1}^2 e^{-2(s+1)^2 t_1} = \delta_1^2,$$
$$\widetilde{f}_s^2 e^{-2s^2 t_2} + \widetilde{f}_{s+1}^2 e^{-2(s+1)^2 t_2} = \delta_2^2.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{f}_s^2 = \frac{\delta_1^2 e^{-2(s+1)^2 t_2} - \delta_2^2 e^{-2(s+1)^2 t_1}}{e^{-2s^2(t_1+t_2)}\left(e^{-2(2s+1)t_2} - e^{-2(2s+1)t_1}\right)},$$
$$\widetilde{f}_{s+1}^2 = \frac{\delta_2^2 e^{-2s^2 t_1} - \delta_1^2 e^{-2s^2 t_2}}{e^{-2s^2(t_1+t_2)}\left(e^{-2(2s+1)t_2} - e^{-2(2s+1)t_1}\right)}.$$

Заметим, что $\mathcal{L}\left(\widetilde{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\right) = 0$, если функция

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_s \sin sx + \widetilde{f}_{s+1} \sin(s+1)x,$$

и, следовательно, условие (a) выполнено. Нетрудно убедиться, что условие (b) также выполнено.

В случае, когда

$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0 = \left[e^{-2(t_2-t_1)}, \infty\right),$$

положим $\widehat{\lambda}_1 = e^{-2(\tau-t_1)}, \widehat{\lambda}_2 = 0$. Функция Лагранжа примет вид

$$\mathcal{L}\left(f(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(-e^{-2k^2\tau} + e^{-2(\tau - t_1 + k^2 t_1)}\right) \geq 0.$$

Если положить $\widetilde{f}_k = 0, k \neq 1$ и $\widetilde{f}_1 = \delta_1 e^{t_1}$, то

$$\mathcal{L}\left(\widetilde{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2\right) = 0,$$

т.е. выполнено условие (a), и, кроме того, выполнено условие (b).

Перейдем к задаче (c). В качестве множества $\widetilde{Y}$ будем рассматривать функции, имеющие конечное число ненулевых коэффициентов Фурье. Представим задачу (c) в виде

$$\begin{gathered}\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=1}^{k_0}\left(f_k e^{-k^2 t_1} - y_{1,k}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k^2 e^{-2k^2 t_1} + \\ \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=1}^{k_0}\left(f_k e^{-k^2 t_2} - y_{2,k}\right)^2 + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k^2 e^{-2k^2 t_2} \to \min, \\ f(\cdot) \in L_2.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Решение задачи (3.16) имеет вид

$$\widehat{f}_k = \begin{cases} \dfrac{\widehat{\lambda}_1 e^{-k^2 t_1} y_{1k} + \widehat{\lambda}_2 e^{-k^2 t_2} y_{2k}}{\widehat{\lambda}_1 e^{-2k^2 t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2k^2 t_2}}, & k \leq k_0, \\ 0, & k > k_0. \end{cases}$$

Остается воспользоваться теоремой 1. $\square$

Глава 4

Оптимальное восстановление решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$
$$x\Big|_{t=0} = x_0,$$

где $x(t) \in K^n$, $t \geq 0$, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K.$$

Предположим, что существует базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства K^n из собственных векторов матрицы A и собственные числа μ_j, отвечающие собственным векторам e_j, $j = 1, \dots, n$. Нетрудно убедиться, что решение этой задачи единственно и имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} c_j(x_0) e_j, \tag{4.1}$$

где

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_0) e_j.$$

Предположим, что известны приближенные значения решения этой задачи $\widetilde{x}_j$, $j = 1, 2$, в моменты времени $0 \leq t_1 < t_2$. Требуется по этим двум элементам наилучшим образом восстановить решение в момент времени τ, $t_1 < \tau < t_2$.

Перейдем к точной постановке задачи. Предположим, что даны $\widetilde{x}_j \in K^n$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\|x(t_j) - \widetilde{x}_j\|_p \le \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

где для

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) e_j$$

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j(x)|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{1 \le j \le n} |c_j(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $m\colon K^n \times K^n \to K^n$. Погрешностью метода m назовем величину

$$e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m) = \sup_{\substack{x_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in K^n \\ \|x(t_j) - \widetilde{x}_j\|_p \le \delta_j, \ j=1,2}} \|x(\tau) - m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\|_p,$$

где $x(\cdot)$ определено равенством (4.1). Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) = \inf_{m\colon K^n \times K^n \to K^n} e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

4.2. Построение семейства оптимальных методов

Поставленная задача оптимального восстановления отличается от рассмотренных ранее тем, что здесь мы имеем дело с неевклидовым случаем. Поэтому теорема 1 в этом случае неприменима. Тем не менее мы построим семейство оптимальных методов, непосредственно оценивая погрешность методов сверху.

Будем считать, что собственные числа μ_j упорядочены по возрастанию их вещественных частей

$$\operatorname{Re}\mu_1 = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_1} < \operatorname{Re}\mu_{j_1+1} = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_2} < \ldots < \operatorname{Re}\mu_{j_{k-1}+1} = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_k}.$$

Для удобства обозначений положим $\nu_r = \operatorname{Re}\mu_{j_r}$, $r = 1, \ldots, k$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Если при некотором $1 \le s < k$

$$e^{\nu_s(t_2-t_1)} \le \frac{\delta_2}{\delta_1} < e^{\nu_{s+1}(t_2-t_1)}, \tag{4.2}$$

положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{e^{-p\nu_s(t_2-\tau)} - e^{-p\nu_{s+1}(t_2-\tau)}}{e^{-p\nu_s(t_2-t_1)} - e^{-p\nu_{s+1}(t_2-t_1)}},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{p\nu_{s+1}(\tau-t_1)} - e^{p\nu_s(\tau-t_1)}}{e^{p\nu_{s+1}(t_2-t_1)} - e^{p\nu_s(t_2-t_1)}}.$$

В случае, если $\delta_2/\delta_1 \ge e^{\nu_k(t_2-t_1)}$ положим $\widehat{\lambda}_1 = e^{p\nu_k(\tau-t_1)}$, а $\widehat{\lambda}_2 = 0$. При $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$ положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$, а $\widehat{\lambda}_2 = e^{-p\nu_1(t_2-\tau)}$.

Теорема 9. *При всех $1 \le p < \infty$, $0 \le t_1 < \tau < t_2$ и всех $\delta_1, \delta_2 > 0$ имеет место равенство*

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) = \left(\widehat{\lambda}_1\delta_1^p + \widehat{\lambda}_2\delta_2^p\right)^{1/p}. \tag{4.3}$$

Если выполнено условие (4.2), то для всех α_j, β_j, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_j e^{\mu_j t_1} + \beta_j e^{\mu_j t_2} = e^{\mu_j \tau}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{|\alpha_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}} + \dfrac{|\beta_j|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p}} \le 1, & j = 1, \dots, n,\ 1 < p < \infty, \\ |\alpha_j| \le \widehat{\lambda}_1,\ |\beta_j| \le \widehat{\lambda}_2, & j = 1, \dots, n,\ p = 1, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $1/p + 1/q = 1$, методы

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j c_j(\widetilde{x}_1) + \beta_j c_j(\widetilde{x}_2)) e_j \tag{4.6}$$

являются оптимальными. При $\delta_2/\delta_1 \ge e^{\nu_k(t_2-t_1)}$ метод

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j(\tau-t_1)} c_j(\widetilde{x}_1) e_j, \tag{4.7}$$

а при $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$ метод

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n e^{-\mu_j(t_2-\tau)} c_j(\widetilde{x}_2) e_j,$$

являются оптимальными.

Доказательство. 1. Оценка снизу. Пусть m — произвольный метод восстановления, а $x_0 \in K^n$ такой, что

$$\|x(t_j)\|_p \le \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

где $x(\cdot)$ определено равенством (4.1). Имеем

$$2\|x(\tau)\|_p \le \|x(\tau) - m(0,0) - (-x(\tau) - m(0,0))\|_p \le \\ \le \|x(\tau) - m(0,0)\|_p + \| - x(\tau) - m(0,0))\|_p \le \\ \le 2e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m).$$

Отсюда следует, что

$$e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m) \ge \sup_{\substack{x_0 \in K^n \\ \|x(t_j)\|_p \le \delta_j, \ j=1,2}} \|x(\tau)\|_p.$$

В силу произвольности m имеем

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) \ge \sup_{\substack{x_0 \in K^n \\ \|x(t_j)\|_p \le \delta_j, \ j=1,2}} \|x(\tau)\|_p.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x(\tau)\|_p^p \to \max, \quad \|x(t_j)\|_p^p \le \delta_j^p, \quad j = 1, 2, \quad x_0 \in K^n.$$

Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда эта задача в силу (4.1) переписывается в виде

$$\sum_{r=1}^{k} e^{p\nu_r \tau} u_r \to \max, \quad \sum_{r=1}^{k} e^{p\nu_r t_j} u_r \le \delta_j^p, \quad j = 1, 2, \quad u_r \ge 0, \tag{4.8}$$

здесь

$$u_r = \sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r} |c_j(x_0)|^p, \quad j_0 = 0.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{r=1}^{k} (-e^{p\nu_r \tau} + \lambda_1 e^{p\nu_r t_1} + \lambda_2 e^{p\nu_r t_2}) u_r,$$

где $u = \{u_r\}_{r=1}^k$. Если найти такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$ и вектор $\widehat{u} = \{\widehat{u}_r\}_{r=1}^k$, допустимый в задаче (4.8), что выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_r \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_j \left(\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r t_j} \widehat{u}_r - \delta_j^p \right) = 0, \quad j = 1, 2,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (4.8). Действительно, для любого допустимого вектора u имеем

$$-\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r \tau} u_r \ge -\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r \tau} u_r + \widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r t_1} u_r - \delta_1^p \right)$$
$$+ \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r t_2} u_r - \delta_2^p \right) = \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) - \widehat{\lambda}_1 \delta_1^p - \widehat{\lambda}_2 \delta_2^p \ge$$
$$\ge \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) - \widehat{\lambda}_1 \delta_1^p - \widehat{\lambda}_2 \delta_2^p = -\sum_{r=1}^k e^{p\nu_r \tau} \widehat{u}_r.$$

Пусть δ_1 и δ_2 удовлетворяют условию (4.2). Нетрудно проверить, что $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 e^{p\nu_s t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{p\nu_s t_2} &= e^{p\nu_s \tau}, \\ \widehat{\lambda}_1 e^{p\nu_{s+1} t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{p\nu_{s+1} t_2} &= e^{p\nu_{s+1} \tau}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Отсюда вытекает, что $g(\nu_s) = g(\nu_{s+1}) = 0$, где

$$g(x) = -1 + \widehat{\lambda}_1 e^{-px(\tau - t_1)} + \widehat{\lambda}_2 e^{px(t_2 - \tau)}.$$

Из выпуклости функции $g(\cdot)$ следует, что при всех $1 \le r \le k$ $g(\nu_r) \ge 0$. Тем самым для всех $u_r \ge 0$

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{r=1}^k e^{p\nu_r \tau} g(\nu_r) u_r \ge 0. \tag{4.10}$$

Положим $\widehat{u}_r = 0$, $r \ne s, s+1$, а $\widehat{u}_s$ и $\widehat{u}_{s+1}$ определим из условий

$$\begin{aligned} \widehat{u}_s e^{p\nu_s t_1} + \widehat{u}_{s+1} e^{p\nu_{s+1} t_1} &= \delta_1^p, \\ \widehat{u}_s e^{p\nu_s t_2} + \widehat{u}_{s+1} e^{p\nu_{s+1} t_2} &= \delta_2^p \end{aligned} \tag{4.11}$$

(условие (4.2) гарантирует существование таких $\widehat{u}_s \geq 0, \widehat{u}_{s+1} \geq 0$). Тогда $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Тем самым, учитывая (4.10) и (4.11), будут выполняться условия (a) и (b). Следовательно, $\widehat{u}$ — решение задачи (4.8), а ее значение равно

$$\widehat{\lambda}_1 \delta_1^p + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^p. \tag{4.12}$$

Пусть теперь $\delta_2/\delta_1 \geq e^{\nu_k(t_2-t_1)}$. Тогда для всех $u_r \geq 0$

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \sum_{r=1}^{k}(-e^{p\nu_r\tau} + \widehat{\lambda}_1 e^{p\nu_r t_1})u_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} e^{p\nu_r\tau}(-1 + e^{p(\nu_k-\nu_r)(\tau-t_1)})u_r \geq 0.$$

Положив $\widehat{u}_r = 0$, $r \neq k$, а $\widehat{u}_k = \delta_1^p e^{-p\nu_k t_1}$, получим допустимый в (4.8) вектор $\widehat{u}$, для которого $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$ и выполнены условия (a) и (b). Поэтому $\widehat{u}$ — решение задачи (4.8), а для значения задачи снова справедливо равенство (4.12). Если $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$, то аналогично проверяется, что при всех $u_r \geq 0$ $\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0$. Здесь надо положить $\widehat{u}_r = 0$, $r \neq 1$, а $\widehat{u}_1 = \delta_2^p e^{-p\nu_1 t_2}$.

Тем самым доказано, что

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) \geq \left(\widehat{\lambda}_1 \delta_1^p + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^p\right)^{1/p}. \tag{4.13}$$

2. Оценка сверху. Будем искать оптимальные методы среди методов вида (4.6). Для оценки погрешности таких методов надо решить экстремальную задачу (для удобства мы оцениваем p-ую степень погрешности)

$$\sum_{j=1}^{n} |e^{\mu_j\tau}c_j(x_0) - \alpha_j c_j(\widetilde{x}_1) - \beta_j c_j(\widetilde{x}_2)|^p \to \max, \tag{4.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |e^{\mu_j t_l}c_j(x_0) - c_j(\widetilde{x}_l)|^p \leq \delta_l^p,\ l = 1, 2,\ x_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in K^n.$$

Положим

$$h_{jl} = e^{\mu_j t_l}c_j(x_0) - c_j(\widetilde{x}_l), \quad l = 1, 2.$$

Тогда задача (4.14) перепишется в виде

$$\sum_{j=1}^{n}|(e^{\mu_j\tau}-\alpha_j e^{\mu_j t_1}-\beta_j e^{\mu_j t_2})c_j(x_0)+\alpha_j h_{j1}+\beta_j h_{j2}|^p\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|h_{jl}|^p\le\delta_l^p,\quad l=1,2.$$

Нетрудно убедиться, что должны выполняться равенства

$$e^{\mu_j\tau}-\alpha_j e^{\mu_j t_1}-\beta_j e^{\mu_j t_2}=0,\quad j=1,\dots,n \tag{4.15}$$

(которые совпадают с (4.4)), так как в противном случае, положив $h_{jl}=0$, $j=1,\dots,n$, $l=1,2$, за счет выбора величин $c_j(x_0)$ погрешность метода можно сделать сколь угодно большой.

Таким образом, мы приходим к задаче

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j h_{j1}+\beta_j h_{j2}|^p\to\max,\quad \sum_{j=1}^{n}|h_{jl}|^p\le\delta_l^p,\quad l=1,2.$$

Пусть выполнено неравенство (4.2). Это означает, что $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2>0$. По неравенству Гёльдера при $1<p<\infty$ имеем

$$|\alpha_j h_{j1}+\beta_j h_{j2}|\le\left(\frac{|\alpha_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}}+\frac{|\beta_j|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p}}\right)^{1/q}\left(\widehat{\lambda}_1|h_{j1}|^p+\widehat{\lambda}_2|h_{j2}|^p\right)^{1/p}.$$

Следовательно, значение задачи (4.14) оценивается величиной

$$\max_{1\le j\le n}\left(\frac{|\alpha_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}}+\frac{|\beta_j|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p}}\right)^{p/q}\left(\widehat{\lambda}_1\delta_1^p+\widehat{\lambda}_2\delta_2^p\right). \tag{4.16}$$

Если $p=1$, то

$$|\alpha_j h_{j1}+\beta_j h_{j2}|\le\max\left(\frac{|\alpha_j|}{\widehat{\lambda}_1},\frac{|\beta_j|}{\widehat{\lambda}_2}\right)\left(\widehat{\lambda}_1|h_{j1}|+\widehat{\lambda}_2|h_{j2}|\right),$$

а значение задачи (4.14) оценивается величиной

$$\max_{1\le j\le n}\left(\max\left(\frac{|\alpha_j|}{\widehat{\lambda}_1},\frac{|\beta_j|}{\widehat{\lambda}_2}\right)\right)\left(\widehat{\lambda}_1\delta_1+\widehat{\lambda}_2\delta_2\right). \tag{4.17}$$

Если выполняются неравенства (4.5), то из (4.16) и (4.17) получаем оценки сверху таких методов, совпадающие с оценками снизу погрешности оптимального метода восстановления. Тем самым все такие методы будут оптимальными. Остается только показать, что множество таких методов не пусто.

Положим

$$\widehat{\alpha}_j = e^{-\mu_j(t_1-\tau)}\frac{\widehat{\lambda}_1 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}}{\widehat{\lambda}_1 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}+\widehat{\lambda}_2 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}},$$

$$\widehat{\beta}_j = e^{-\mu_j(t_2-\tau)}\frac{\widehat{\lambda}_2 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}}{\widehat{\lambda}_1 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}+\widehat{\lambda}_2 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}}.$$

Тогда равенства (4.15) очевидным образом выполнены и при $1 < p < \infty$

$$\frac{|\widehat{\alpha}_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}}+\frac{|\widehat{\beta}_j|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p}} = \left(\frac{e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j\tau}}{\widehat{\lambda}_1 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}+\widehat{\lambda}_2 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}}\right)^{q-1},$$

а при $p = 1$

$$\frac{|\widehat{\alpha}_j|}{\widehat{\lambda}_1} = \frac{|\widehat{\beta}_j|}{\widehat{\lambda}_2} = \frac{e^{\mathrm{Re}\,\mu_j\tau}}{\widehat{\lambda}_1 e^{\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}+\widehat{\lambda}_2 e^{\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}}.$$

При оценке снизу было доказано, что при выбранных $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ $g(\mathrm{Re}\,\mu_j) \geq 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Это означает, что для всех $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j\tau}}{\widehat{\lambda}_1 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_1}+\widehat{\lambda}_2 e^{p\,\mathrm{Re}\,\mu_j t_2}} \leq 1, \tag{4.18}$$

т.е. $\widehat{\alpha}_j$ и $\widehat{\beta}_j$ удовлетворяют неравенствам (4.5).

Пусть теперь $\delta_2/\delta_1 \geq e^{\nu_k(t_2-t_1)}$. Тогда, положив $\beta_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, имеем $\alpha_j = e^{\mu_j(\tau-t_1)}$, $j = 1, \ldots, n$. Тем самым

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j h_{j1}|^p = \sum_{j=1}^{n}|e^{\mu_j(\tau-t_1)}h_{j1}|^p \leq e^{p\nu_k(\tau-t_1)}\delta_1^p = \widehat{\lambda}_1\delta_1^p.$$

Отсюда видно, что оценка сверху совпадает с оценкой снизу и соответствующий метод (4.7) является оптимальным. Аналогично рассматривается случай, когда $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$. $\square$

4.3. Некоторые частные случаи

Из доказательства теоремы 9 (положим $\alpha_j = \widehat{\alpha}_j$, $\beta_j = \widehat{\beta}_j$, $j = 1, \dots, n$) непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если выполнено условие* (4.2), *то метод*

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j \tau} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{(p \operatorname{Re} \mu_j - \mu_j) t_1} c_j(\widetilde{x}_1) + \widehat{\lambda}_2 e^{(p \operatorname{Re} \mu_j - \mu_j) t_2} c_j(\widetilde{x}_2)}{\widehat{\lambda}_1 e^{p \operatorname{Re} \mu_j t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{p \operatorname{Re} \mu_j t_2}} e_j$$

является оптимальным.

Построенный метод использует все координаты векторов $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$. В некоторых случаях удается построить оптимальный метод, который не использует некоторое количество последних координат вектора $\widetilde{x}_1$ и некоторое количество первых координат вектора $\widetilde{x}_2$.

Пусть $\widehat{\lambda}_1 \geq e^{p\nu_1(\tau - t_1)}$. Положим

$$r_1 = \max\{\, r : e^{p\nu_r(\tau - t_1)} \leq \widehat{\lambda}_1,\ 1 \leq r \leq k \,\}.$$

Если $\widehat{\lambda}_1 > e^{p\nu_1(\tau - t_1)}$, положим $r_1 = 0$. Если $\widehat{\lambda}_2 \geq e^{-p\nu_k(t_2 - \tau)}$, положим

$$r_2 = \min\{\, r : e^{-p\nu_r(t_2 - \tau)} \leq \widehat{\lambda}_2,\ 1 \leq r \leq k \,\}.$$

В противном случае положим $r_2 = k + 1$, а $j_{k+1} = n + 1$.

Будем, как обычно, считать, что сумма равна нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего. Имеет место

Следствие 2. *Если выполнено условие* (4.2), *то метод*

$$\begin{aligned} m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) &= \sum_{j=1}^{j_{r_1}} e^{p\mu_j(\tau - t_1)} c_j(\widetilde{x}_1) e_j \\ &+ \sum_{j=j_{r_1}+1}^{j_{r_2}-1} e^{\mu_j \tau} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{(p \operatorname{Re} \mu_j - \mu_j) t_1} c_j(\widetilde{x}_1) + \widehat{\lambda}_2 e^{(p \operatorname{Re} \mu_j - \mu_j) t_2} c_j(\widetilde{x}_2)}{\widehat{\lambda}_1 e^{p \operatorname{Re} \mu_j t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{p \operatorname{Re} \mu_j t_2}} e_j \\ &\qquad + \sum_{j=j_{r_2}}^{n} e^{-p\mu_j(t_2 - \tau)} c_j(\widetilde{x}_2) e_j \end{aligned}$$

является оптимальным. При этом $r_1 \leq s$, *а* $r_2 \geq s + 1$.

Доказательство. Покажем сначала, что $r_1 \le s$ и $r_2 \ge s+1$. Записав систему (4.9) в виде

$$\frac{\widehat{\lambda}_1}{e^{p\nu_s(\tau-t_1)}} + \frac{\widehat{\lambda}_2}{e^{-p\nu_s(t_2-\tau)}} = 1,$$
$$\frac{\widehat{\lambda}_1}{e^{p\nu_{s+1}(\tau-t_1)}} + \frac{\widehat{\lambda}_2}{e^{-p\nu_{s+1}(t_2-\tau)}} = 1,$$

получаем, что $\widehat{\lambda}_1 \le e^{p\nu_s(\tau-t_1)}$, а $\widehat{\lambda}_2 \le e^{-p\nu_{s+1}(t_2-\tau)}$.

Если $\beta_j = 0$, то из (4.4) вытекает, что $\alpha_j = e^{\mu_j(\tau-t_1)}$. Для того чтобы удовлетворялось условие (4.5), необходимо выполнение неравенств

$$|\alpha_j|^p = e^{p\operatorname{Re}\mu_j(\tau-t_1)} \le \widehat{\lambda}_1.$$

В силу определения r_1 эти неравенства выполнены при $1 \le j \le j_{r_1}$. Аналогично доказывается, что $\alpha_j = 0$, $\beta_j = e^{-p\mu_j(t_2-\tau)}$ удовлетворяют условиям (4.4) и (4.5) при $j_{r_2} \le j \le n$. □

Рассмотрим теперь случай, когда $p = 2$. Положим

$$\alpha_j = e^{\mu_j(\tau-t_1)}\omega_j.$$

Тогда из (4.4)

$$\beta_j = e^{-\mu_j(t_2-\tau)}(1-\omega_j).$$

Условия (4.5) запишутся тогда в виде

$$\frac{|\omega_j|^2 e^{2\operatorname{Re}\mu_j(\tau-t_1)}}{\widehat{\lambda}_1} + \frac{|1-\omega_j|^2 e^{-2\operatorname{Re}\mu_j(t_2-\tau)}}{\widehat{\lambda}_2} \le 1. \tag{4.19}$$

Положим

$$a^2 = \frac{e^{2\operatorname{Re}\mu_j(\tau-t_1)}}{\widehat{\lambda}_1}, \quad b^2 = \frac{e^{-2\operatorname{Re}\mu_j(t_2-\tau)}}{\widehat{\lambda}_2}.$$

Тогда неравенства (4.19) перепишутся в виде

$$|\omega_j|^2 - \frac{2b^2}{a^2+b^2}\operatorname{Re}\omega_j \le \frac{1-b^2}{a^2+b^2}.$$

Отсюда

$$\left|\omega_j - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right| \le \frac{\sqrt{a^2+b^2-a^2b^2}}{a^2+b^2}.$$

Подставляя выражения для a^2 и b^2, а также обозначив $\operatorname{Re}\mu_j = \nu_j$, получаем

$$\left|\omega_j - \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_j t_1}}{\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_j t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\nu_j t_2}}\right| \le \\ \le \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}\, e^{\nu_j (t_1 + t_2 - \tau)}}{\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_j t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\nu_j t_2}} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 e^{2\nu_j t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{2\nu_j t_2} - e^{2\nu_j \tau}} \tag{4.20}$$

Отметим, что из (4.18) при $p = 2$ вытекает, что выражение под последним корнем неотрицательно при всех $j = 1, \ldots, n$.

Таким образом доказано

Следствие 3. *Если выполнено условие* (4.2), *то для всех* ω_j, *удовлетворяющих условиям* (4.20) *методы*

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^{n} (e^{\mu_j(\tau - t_1)} \omega_j c_j(\widetilde{x}_1) + e^{-\mu_j(t_2 - \tau)} (1 - \omega_j) c_j(\widetilde{x}_2)) e_j$$

являются оптимальными.

Глава 5

Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно

5.1. Постановка задачи

Для функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, при всех $0 \le k \le n-1$ Л.В. Тайковым [**26**] было получено точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le K \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}},$$

где

$$K = \left((2k+1)\left(\sin \pi \frac{2k+1}{2n}\right)\right)^{-1/2} \left(\frac{2k+1}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}.$$

Эта задача сводится к следующей экстремальной задаче

$$x^{(k)}(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1,$$

значение которой, в свою очередь, по обобщенной теореме С. А. Смоляка (см., например, [**6**]) равна погрешности оптимального восстановления k-ой производной в нуле по неточно заданной самой функции на соболевском классе $W_2^n(\mathbb{R})$, состоящем из функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1$.

Мы рассматриваем некоторые дискретные аналоги подобных задач восстановления. Задачи такого типа рассматривались в работе [**27**].

Через $\mathcal{L}_{2,h}$, $h > 0$, будем обозначать пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Положим

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right\}_{j \in \mathbb{Z}},$$

$$\Delta_h^k x = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} x), \quad k = 2, 3, \dots .$$

Через $l_{2,h}^n$ обозначим класс последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $\|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \le 1$.

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значения $(\Delta_h^k x)_0$ по неточно заданной последовательности $x \in l_{2,h}^n$, $0 \le k < n$. Предполагается, что для каждого $x \in l_{2,h}^n$ известна последовательность $\widetilde{x} \in \mathcal{L}_{2,h}$ такая, что $\|x - \widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \le \delta$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon \mathcal{L}_{2,h} \to \mathbb{C}$. В соответствии с общей постановкой задачи восстановления погрешностью метода m назовем величину

$$e(k,n,h,\delta,m) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n,\ \widetilde{x}\in\mathcal{L}_{2,h} \\ \|x-\widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\le\delta}} \|(\Delta_h^k x)_0 - m(\widetilde{x})\|.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(k,n,h,\delta) = \inf_{m\colon \mathcal{L}_{2,h}\to\mathbb{C}} e(k,n,h,\delta,m).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом.

5.2. Асимптотика погрешности оптимального восстановления

Положим для $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}$

$$(x,y)_{\mathcal{L}_{2,h}} = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \overline{y}_j.$$

Пространство $\mathcal{L}_{2,h}$ с так введенным скалярным произведением становится векторным пространством.

Из теоремы 4 вытекает, что для построения оптимального метода восстановления достаточно найти такие $\widehat{\lambda}_1 \ge 0$, $\widehat{\lambda}_2 \ge 0$ и $\widehat{x} \in l_{2,h}^n$, при которых для всех $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ справедливо тождество

$$(\Delta_h^k x)_0 = \widehat{\lambda}_1 (x, \widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}} + \widehat{\lambda}_2 (\Delta_h^n x, \Delta_h^n \widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}, \tag{5.1}$$

а элемент $\widehat{x}$ удовлетворяет условиям $\|\widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \delta$ и $\|\Delta_h^n \widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = 1$ при $\widehat{\lambda}_2 > 0$ или $\|\Delta_h^n \widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \le 1$ при $\widehat{\lambda}_2 = 0$. При этом метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \widehat{\lambda}_1 (\widetilde{x}, \widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}$$

будет оптимальным и

$$E(k,n,h,\delta)=\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2. \tag{5.2}$$

С каждой последовательностью $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{L}_{2,h}$ свяжем функцию

$$Fx(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_je^{ijt}\in L_2(\mathbb{T}),$$

где $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами, а

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Положим

$$(x(\cdot),y(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$(x,y)_{\mathcal{L}_{2,h}}=h(Fx(\cdot),Fy(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Тем самым тождество (5.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(\Delta_h^kx)(t)\,dt=\frac{\widehat{\lambda}_1h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt\\+\frac{\widehat{\lambda}_2h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(\Delta_h^nx)(t)\overline{F(\Delta_h^n\widehat{x})(t)}\,dt.\end{aligned} \tag{5.3}$$

В силу того, что

$$F(\Delta_hx)(t)=\frac{1}{h}(e^{-it}-1)Fx(t),$$

имеем

$$F(\Delta_h^kx)(t)=\frac{1}{h^k}(e^{-it}-1)^kFx(t).$$

Следовательно, равенство (5.3) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi h^k}\int_{\mathbb{T}}(e^{-it}-1)^kFx(t)\,dt=\frac{\widehat{\lambda}_1h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt\\+\frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi h^{2n-1}}\int_{\mathbb{T}}|e^{it}-1|^{2n}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Отсюда
$$F\widehat{x}(t)=\frac{h^{2n-k-1}(e^{it}-1)^k}{\widehat{\lambda}_1h^{2n}+\widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n}},$$
а $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ должны быть выбраны из условий (будем пока искать $\widehat{\lambda}_2>0$)
$$h\|F\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}=\delta^2,$$
$$h\|F(\Delta^n_h\widehat{x})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}=1,$$
которые записываются в виде
$$\frac{h^{4n-2k-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{|e^{it}-1|^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1h^{2n}+\widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n})^2}\,dt=\delta^2,$$
$$\frac{h^{2n-2k-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{|e^{it}-1|^{2(n+k)}}{(\widehat{\lambda}_1h^{2n}+\widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n})^2}\,dt=1.$$
Сделав замену $u=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, будем иметь
$$\begin{aligned}&\frac{4^kh^{4n-2k-1}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2k}(1+u^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1h^{2n}(1+u^2)^n+\widehat{\lambda}_24^nu^{2n})^2}\,du=\delta^2,\\ &\frac{4^{n+k}h^{2n-2k-1}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2(n+k)}(1+u^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1h^{2n}(1+u^2)^n+\widehat{\lambda}_24^nu^{2n})^2}\,du=1.\end{aligned}\tag{5.5}$$
Перейдем теперь к переменной $v=h^{-1}u$. Получим систему
$$\frac{4^k}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2k}(1+h^2v^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1(1+h^2v^2)^n+\widehat{\lambda}_24^nv^{2n})^2}\,dv=\delta^2,$$
$$\frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2(n+k)}(1+h^2v^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1(1+h^2v^2)^n+\widehat{\lambda}_24^nv^{2n})^2}\,dv=1.$$
Положим $b=4^n\widehat{\lambda}_2/\widehat{\lambda}_1$. Тогда эта система запишется в виде
$$\begin{aligned}&\frac{4^k}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2k}(1+h^2v^2)^{2n-k-1}}{((1+h^2v^2)^n+bv^{2n})^2}\,dv=\delta^2\widehat{\lambda}_1^2,\\ &\frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2(n+k)}(1+h^2v^2)^{n-k-1}}{((1+h^2v^2)^n+bv^{2n})^2}\,dv=\widehat{\lambda}_1^2.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Тем самым для b получаем уравнение
$$\Phi(\tau,b)=0,\tag{5.7}$$

где $\tau = h^2$, а

$$\Phi(\tau, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}(1+\tau v^2)^{2n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv \\ - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}(1+\tau v^2)^{n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv.$$

Положим $h = 0$. Тогда

$$\Phi(0, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv.$$

Сделав замену $u^{2n} = bv^{2n}$, получаем

$$\Phi(0, b) = b^{-\frac{2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1+u^{2n})^2}\,du - \delta^2 4^n b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)}}{(1+u^{2n})^2}\,du.$$

Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1+u^{2n})^2}\,du = \frac{\pi}{2n^2}(2n-2k-1)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right), \\ &\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(k+n)}}{(1+u^{2n})^2}\,du = \frac{\pi}{2n^2}(2k+1)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right), \end{aligned} \tag{5.8}$$

которые легко получить, выразив эти интегралы через бета-функцию $B(\cdot,\cdot)$ и применив формулу приведения

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Тогда будем иметь

$$\Phi(0, b) = \\ b^{-\frac{2k+1}{2n}} \frac{\pi}{2n^2} \sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)(2n-2k-1-\delta^2 4^n b^{-1}(2k+1)).$$

Отсюда $\Phi(0, b_0) = 0$, где

$$b_0 = \delta^2 4^n \frac{2k+1}{2n-2k-1}.$$

Для того чтобы применить теорему о неявной функции вычислим $\Phi'_\tau(0,b_0)$ и $\Phi'_b(0,b_0)$. Имеем

$$\Phi'_\tau(0,b) = (2n-k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv - 2n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv- \\ - \delta^2 4^n(n-k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv + \delta^2 4^n 2n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv.$$

Сделаем ту же замену $u^{2n} = bv^{2n}$. Тогда

$$\Phi'_\tau(0,b) = (2n-k-1)b^{-\frac{2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^2}\,du \\ - 2nb^{-\frac{2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du - \delta^2 4^n(n-k-1)b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^2}\,du \\ + \delta^2 4^n 2nb^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du.$$

Аналогично (5.8) можно получить

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du = \frac{\pi}{8n^3}(4n-2k-3)(2n-2k-3)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right), \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du = \frac{\pi}{8n^3}(2n-2k-3)(2k+3)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right).$$

Таким образом,

$$\Phi'_\tau(0,b) = \frac{\pi}{4n^2}b^{-\frac{2k+3}{2n}}(2n-2k-3)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right) \\ - \delta^2 4^n\frac{\pi}{4n^2}b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}(2k+3)\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+3}{2}n\right).$$

Отсюда

$$\Phi'_\tau(0,b_0) = -\frac{\pi}{n(2k+1)}b_0^{-\frac{2k+3}{2n}}\sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right).$$

Для $\Phi'_b(0,b)$ имеем

$$\Phi'_b(0,b) = -2\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv + 2\delta^2 4^n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{4n+2k}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv.$$

После замены $u^{2n} = bv^{2n}$ получим

$$\Phi'_b(0,b) = -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k}}{(1+u^{2n})^3}\,du + 2\delta^2 4^n b^{-\frac{4n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4n+2k}}{(1+u^{2n})^3}\,du$$

$$= -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \frac{\pi(2k+1)}{8n^3} \sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)$$

$$\times\left(2n-2k-1-\delta^2 4^n b^{-1}(2n+2k+1)\right).$$

Тем самым

$$\Phi'_b(0,b_0) = \frac{\pi(2n-2k-1)}{2n^2} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right).$$

По теореме о неявной функции в достаточно малой окрестности нуля существует функция $b = b(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (5.7). При этом

$$b'(0) = -\frac{\Phi'_\tau(0,b_0)}{\Phi'_b(0,b_0)} =$$

$$= \frac{2n\sin(\pi\frac{2k+1}{2n})}{(2n-2k-1)(2k+1)\sin(\pi\frac{2k+3}{2n})} \left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$b(h) = \delta^2 4^n \frac{2k+1}{2n-2k-1} +$$

$$+ \frac{2n\sin(\pi\frac{2k+1}{2n})}{(2n-2k-1)(2k+1)\sin(\pi\frac{2k+3}{2n})} \left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} h^2 +$$

$$+ o(h^2).$$

Для нахождения асимптотики $\widehat{\lambda}_1$ рассмотрим функцию

$$c(\tau) = \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}(1+\tau v^2)^{n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv.$$

Имеем

$$c(0) = \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}}{(1+b_0 v^{2n})^2}\,dv = \frac{4^{n+k}}{\pi} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)}}{(1+u^{2n})^2}\,du =$$

$$= 4^{n+k} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \frac{2k+1}{2n^2} \sin^{-1}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right).$$

$$c'(0) = \frac{4^{n+k}}{\pi}(n-k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0v^{2n})^2}\,dv - \frac{4^{n+k}}{\pi}2n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0v^{2n})^3}\,dv$$
$$- \frac{4^{n+k}}{\pi}2b'(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{4n+2k}}{(1+b_0v^{2n})^3}\,dv$$
$$= \frac{4^{n+k}}{\pi}(n-k-1)b_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^2}\,du$$
$$-\frac{4^{n+k}}{\pi}2nb_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du - \frac{4^{n+k}}{\pi}2b'(0)b_0^{-\frac{4n+2k+1}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4n+2k}}{(1+u^{2n})^3}\,du$$
$$= \frac{4^{n+k}}{\pi}b_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\left(\frac{\pi}{2n^2}(n-k-1)(2k+3)\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right)}\right.$$
$$-\frac{\pi}{4n^2}(2n-2k-3)(2k+3)\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right)}$$
$$\left.-2b'(0)b_0^{-\frac{n-1}{n}}\frac{\pi}{8n^3}(2n+2k+1)(2k+1)\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)}\right) =$$
$$= 4^{n+k-1}b_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\frac{(2k+1)(2n-2k-5)}{n^2(2n-2k-1)}\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right)}.$$

Отсюда

$$\widehat{\lambda}_1 = \sqrt{c(\tau)} = \sqrt{c(0)} + \frac{c'(0)}{2\sqrt{c(0)}}\tau + o(\tau)$$
$$= 2^{n+k-1/2}b_0^{-\frac{2n+2k+1}{4n}}\frac{\sqrt{2k+1}}{n}\sin^{-1/2}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)$$
$$+ 2^{n+k-5/2}b_0^{-\frac{2n+2k+5}{4n}}\frac{\sqrt{2k+1}(2n-2k-5)}{n(2n-2k-1)}\frac{\sin^{1/2}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)}{\sin\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right)}h^2 + o(h^2).$$

Следовательно, для погрешности оптимального восстановления имеем

$$E(k,n,h,\delta) = \widehat{\lambda}_1\delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1\left(\delta^2 + \frac{b}{4^n}\right) =$$
$$= K\delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}} + K_1h^2 + o(h^2),$$

где

$$K_1 = \delta^2 \frac{2n}{2n-2k-1} 2^{n+k-5/2} b_0^{-\frac{2n+2k+5}{4n}} \frac{\sqrt{2k+1}(2n-2k-5)}{n(2n-2k-1)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sin^{1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}{\sin\left(\pi \frac{2k+3}{2n}\right)} + 2^{n+k-1/2} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{4n}} \frac{\sqrt{2k+1}}{n} \sin^{-1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right) \cdot$$
$$\cdot 4^{-n} \frac{2n \sin\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}{(2n-2k-1)(2k+1)\left(\sin \pi \frac{2k+3}{2n}\right)} \left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$
$$= \frac{\delta^2 2^{n+k-3/2} \sqrt{2k+1} \sin^{1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}{(2n-2k-1)\sin\left(\pi \frac{2k+3}{2n}\right)} b_0^{-\frac{2n+2k+5}{4n}} =$$
$$= \frac{\sin^{1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}{16\sqrt{2k+1}\sin\left(\pi \frac{2k+3}{2n}\right)} \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}}.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 10. *При всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 \le k \le n-1$

$$E(k,n,h,\delta) = \frac{1}{\sqrt{2k+1}\sin^{1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)} \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}$$
$$+ \frac{\sin^{1/2}\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}{16\sqrt{2k+1}\sin\left(\pi \frac{2k+3}{2n}\right)} \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}} h^2 + o(h^2).$$

5.3. Случай малых погрешностей

Положим теперь $\widehat{\lambda}_2 = 0$. Тогда

$$F\widehat{x}(t) = \frac{(e^{it}-1)^k}{\widehat{\lambda}_1 h^{k+1}},$$

а $\widehat{\lambda}_1$ должно быть выбрано из условий

$$h\|F\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \delta^2,$$
$$h\|F(\Delta_h^n \widehat{x})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \le 1,$$

которые записываются в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\widehat{\lambda}_1^2 h^{2k+1}}\int_{\mathbb{T}}|e^{it}-1|^{2k}\,dt=\delta^2,\\
&\frac{1}{2\pi\widehat{\lambda}_1^2 h^{2n+2k+1}}\int_{\mathbb{T}}|e^{it}-1|^{2(n+k)}\,dt\le 1.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Используя хорошо известную формулу

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}\tau\,d\tau=\frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

получаем

$$\int_{\mathbb{T}}|e^{it}-1|^{2k}\,dt=4^k\int_{\mathbb{T}}\sin^{2k}\frac{t}{2}\,dt=2\pi 4^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Тем самым условия (5.9) записываются в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{4^k}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2k+1}}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}&=\delta^2,\\
\frac{4^{n+k}}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2n+2k+1}}\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!}&\le 1.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{2^k}{\delta h^{k+1/2}}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^{1/2},$$

а δ должно удовлетворять условию

$$\delta\le\left(\frac{h}{2}\right)^n\left(\frac{(2k+2)(2k+4)\dots(2k+2n)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2n-1)}\right)^{1/2}. \tag{5.10}$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 11. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $0\le k\le n-1$ и выполнено условие* (5.10). *Тогда*

$$E(k,n,h,\delta)=\frac{2^k}{h^{k+1/2}}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^{1/2}\delta,$$

а метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=(\Delta_h^k\widetilde{x})_0$$

— оптимальный.

При малых n и k поставленную задачу удается решить при любых δ и h. Рассмотрению некоторых таких случаев посвящены следующие разделы.

5.4. Случай $n = 1$

Рассмотрим случай, когда $n = 1$. Тогда $k = 0$. При $\delta \le h/\sqrt{2}$ решение задачи вытекает из теоремы 11. Будем считать, что $\delta > h/\sqrt{2}$. Система (5.6) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+h^2v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\,dv = \delta^2\widehat{\lambda}_1^2, \\ &\frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\,dv = \widehat{\lambda}_1^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

После замены $v = (h^2+b)^{-1/2}u$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\,dv = (h^2+b)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{\pi}{2}(h^2+b)^{-1/2}.$$

Аналогично

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\,dv = (h^2+b)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \frac{\pi}{2}(h^2+b)^{-3/2}.$$

Таким образом, из системы (5.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h^2+b)^{-1/2} + \frac{1}{2}h^2(h^2+b)^{-3/2} &= \delta^2\widehat{\lambda}_1^2, \\ 2(h^2+b)^{-3/2} &= \widehat{\lambda}_1^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b = 4\delta^2 - 2h^2,\ \widehat{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{(4\delta^2-h^2)^{3/4}},\ \widehat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2-h^2}{\sqrt{2}(4\delta^2-h^2)^{3/4}}.$$

Следовательно,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h}{\widehat{\lambda}_1h^2 + 2\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)} = \frac{h(4\delta^2-h^2)^{3/4}}{\sqrt{2}(2\delta^2-h^2)}\ \frac{1}{(a-\cos t)},$$

где

$$a = \frac{2\delta^2}{2\delta^2 - h^2}.$$

Для нахождения коэффициентов Фурье функции $F\widehat{x}(\cdot)$ воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{\frac{1-\mu^2}{2\mu}}{\frac{1+\mu^2}{2\mu} - \cos t}, \tag{5.12}$$

справедливым для любых μ, $0 < |\mu| < 1$. Положив

$$\mu = a - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2},$$

получаем

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}$$
$$= \frac{2\delta^2 - h^2}{h\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Таким образом,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Отсюда

$$\widehat{x}_j = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \mu^{|j|}.$$

В итоге получаем следующий результат.

Теорема 12. *Имеет место равенство*

$$E(0, 1, h, \delta) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta \le h/\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(4\delta^2 - h^2)^{1/4}, & \delta > h/\sqrt{2}. \end{cases}$$

При $\delta \le h/\sqrt{2}$

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_0$$

— *оптимальный метод, а при* $\delta > h/\sqrt{2}$ *метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \frac{h}{\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2} \right)^{|j|} \widetilde{x}_j$$

является оптимальным.

5.5. Случай $n = 2$

Рассмотрим теперь случай, когда $n = 2$. Тогда $k = 0$ или $k = 1$. Положим

$$\delta_k = \frac{h^2}{2} \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}}.$$

При $\delta \le \delta_k$ решение задачи вытекает из теоремы 11. Будем считать, что $\delta > \delta_k$. Здесь нам удобнее будет иметь дело с системой (5.5), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{4^k h^{7-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2}\, du = \delta^2,$$
$$\frac{4^{2+k} h^{3-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2}\, du = 1.$$

Эта система переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{4^k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2}\, du = h^{1+2k}\delta^2\widehat{\lambda}_1^2, \\ &\frac{4^{2+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2}\, du = h^{5+2k}\widehat{\lambda}_1^2, \end{aligned} \tag{5.13}$$

где $a = 4h^{-2}\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$. Положим $c = p + iq$, где

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} - 1}{2(1+a^2)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{2(1+a^2)}}. \tag{5.14}$$

Тогда

$$c^2 = -\frac{1}{1+ia}$$

и

$$((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2 = (1+a^2)^2(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2.$$

Вычислим каждый из интегралов с помощью вычетов (множители 4^k в обоих интегралов учтем потом). В верхней полуплоскости имеется два полюса знаменателя кратности 2: c и $-\overline{c}$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
I_{1k} = \frac{1}{\pi(1+a^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\, du = \\
= \frac{2i}{(1+a^2)^2} \frac{d}{du} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\bigg|_{u=c} + \\
+ \frac{2i}{(1+a^2)^2} \frac{d}{du} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2}\bigg|_{u=-\overline{c}} = \\
= \frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2c^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2} \left(\frac{2k-1}{c} + \frac{(6-2k)c}{1+c^2} - \frac{2}{c-\overline{c}} - \frac{2}{c+\overline{c}} \right) + \\
+ \frac{i\overline{c}^{2k}(1+\overline{c}^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2\overline{c}^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2} \cdot \\
\cdot \left(-\frac{2k-1}{\overline{c}} - \frac{(6-2k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2} - \frac{2}{c-\overline{c}} + \frac{2}{c+\overline{c}} \right).
\end{aligned}
$$

В силу того, что

$$
(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2 = -\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}, \tag{5.15}
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
I_{1k} = -\frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{8a^2c^2} \left(\frac{(6-2k)c}{1+c^2} + \frac{2k-1}{c} - \frac{4c}{c^2-\overline{c}^2} \right) - \\
- \frac{i\overline{c}^{2k}(1+\overline{c}^2)^{3-k}}{8a^2\overline{c}^2} \left(-\frac{(6-2k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2} - \frac{2k-1}{\overline{c}} - \frac{4\overline{c}}{c^2-\overline{c}^2} \right).
\end{aligned}
$$

Учитывая, что $1 + c^2 = -iac^2$, а $1 + \overline{c}^2 = ia\overline{c}^2$, получаем

$$I_{1k} = \frac{i^k c^4 a^{1-k}}{8}\left(\frac{6-2k}{-iac} + \frac{2k-1}{c} - \frac{4c}{c^2-\overline{c}^2}\right) - \\ - \frac{\overline{c}^4 a^{1-k}}{8i^k}\left(\frac{6-2k}{-ia\overline{c}} - \frac{2k-1}{\overline{c}} - \frac{4\overline{c}}{c^2-\overline{c}^2}\right) = \\ = \frac{3-k}{4a^k i^{k+1}}(\overline{c}^3 - (-1)^k c^3) + \frac{(2k-1)a^{1-k}}{8i^k}((-1)^k c^3 + \overline{c}^3) + \\ + \frac{a^{1-k}(\overline{c}^5 - (-1)^k c^5)}{2i^k(c^2-\overline{c}^2)}.$$

В силу равенств

$$\begin{aligned} c^3 - \overline{c}^3 &= 2iq(3p^2 - q^2), \\ c^3 + \overline{c}^3 &= 2p(p^2 - 3q^2), \\ c^2 - \overline{c}^2 &= 4ipq, \\ c^5 - \overline{c}^5 &= 2iq(5p^4 - 10p^2q^2 + q^4), \\ c^5 + \overline{c}^5 &= 2p(p^4 - 10p^2q^2 + 5q^4), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{3}{2}q(q^2 - 3p^2) - \frac{a}{4p}(6p^4 - 13p^2q^2 + q^4), \\ I_{11} &= -\frac{p(p^2 - 3q^2)}{a} - \frac{p^4 - 7p^2q^2 + 4q^4}{4q}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения p и q из (5.14), будем иметь

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}}\left(3a^2 - \sqrt{1+a^2} + 5\right), \\ I_{11} &= \frac{a^2 + \sqrt{1+a^2} + 3}{4\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}. \end{aligned}$$

Вычислим теперь второй интеграл

$$
\begin{aligned}
I_{2k} = \frac{16}{\pi(1+a^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\, du = \\
= \frac{32i}{(1+a^2)^2} \frac{d}{du} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\Bigg|_{u=c} + \\
+ \frac{32i}{(1+a^2)^2} \frac{d}{du} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2}\Bigg|_{u=-\overline{c}} = \\
= \frac{8ic^{2+2k}(1+c^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2}\frac{3+2k}{c} - \frac{2}{c-\overline{c}} - \frac{2}{c+\overline{c}}\right) + \\
+ \frac{8i\overline{c}^{2+2k}(1+\overline{c}^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(-\frac{2(1-k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2} - \frac{3+2k}{\overline{c}} - \frac{2}{c-\overline{c}} + \frac{2}{c+\overline{c}}\right).
\end{aligned}
$$

Используя равенство (5.15), получаем

$$
\begin{aligned}
I_{2k} = -\frac{2i}{a^2}c^{2+2k}(1+c^2)^{1-k}\left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2} + \frac{3+2k}{c} - \frac{4c}{c^2-\overline{c}^2}\right) + \\
+ \frac{2i}{a^2}\overline{c}^{2+2k}(1+\overline{c}^2)^{1-k}\left(+\frac{2(1-k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2} + \frac{3+2k}{\overline{c}} + \frac{4\overline{c}}{c^2-c^2}\right).
\end{aligned}
$$

Учитывая, что $1+c^2 = -iac^2$, а $1+\overline{c}^2 = ia\overline{c}^2$, получаем

$$
\begin{aligned}
I_{2k} = -\frac{2i^k c^4}{a^{1+k}}\left(\frac{2-2k}{-iac} + \frac{3+2k}{c} - \frac{4c}{c^2-\overline{c}^2}\right) + \\
+ \frac{2\overline{c}^4}{i^k a^{1+k}}\left(\frac{2-2k}{-ia\overline{c}} - \frac{3+2k}{\overline{c}} - \frac{4\overline{c}}{c^2-\overline{c}^2}\right) = \\
= \frac{4-4k}{i^{k+1}a^{2+k}}((-1)^k c^3 - \overline{c}^3) - \frac{6+4k}{i^k a^{1+k}}((-1)^k c^3 + \overline{c}^3) + \\
+ \frac{8((-1)^k c^5 - \overline{c}^5)}{i^k a^{1+k}(c^2-\overline{c}^2)}.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Отсюда

$$I_{20} = \frac{8q}{a^2}(3p^2 - q^2) + \frac{4}{ap}(2p^4 - p^2q^2 + q^4),$$
$$I_{21} = \frac{20q}{a^2}(3p^2 - q^2) + \frac{4}{a^2q}(p^4 - 10p^2q^2 + 5q^4).$$

Подстановка p и q из (5.14) дает

$$I_{20} = \frac{2^{3/2}(2 + \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(1+a^2)^{3/2}},$$
$$I_{21} = \frac{2^{3/2}(2 + 3\sqrt{1+a^2})}{(\sqrt{1+a^2}+1)^{3/2}(1+a^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$. Тогда система (5.13) имеет вид

$$\frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2(2(1+a^2))^{3/2}}\left(3a^2 - \sqrt{1+a^2} + 5\right) = h\delta^2\widehat{\lambda}_1^2,$$
$$\frac{8(2 + \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(2(1+a^2))^{3/2}} = h^5\widehat{\lambda}_1^2.$$

Положив $d = \sqrt{a^2+1}$, получаем уравнение для d

$$\frac{(d+1)(3d^2-d+2)}{d+2} = \frac{16\delta^2}{h^4}. \tag{5.17}$$

Нетрудно показать, что это уравнение при $d > 1$ имеет единственное решение для всех $\delta > h^2/\sqrt{6}$ (при желании его можно явно найти, пользуясь формулами для корней кубического уравнения). Для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ получаем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{2^{3/4}(2+d)^{1/2}}{(d+1)^{1/4}d^{3/2}h^{5/2}},$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{a^2h^4\widehat{\lambda}_1}{16} = \frac{(d^2-1)h^4\widehat{\lambda}_1}{16}.$$

Следовательно, при $\delta > h^2/\sqrt{6}$

$$E(0,2,h,\delta) = \widehat{\lambda}_1\delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1\left(\delta^2 + \frac{(d^2-1)h^4}{16}\right) =$$

$$= \frac{(d+1)^{3/4}\sqrt{d}}{2^{5/4}\sqrt{d+2}} h^{3/2}.$$

Построим теперь оптимальный метод восстановления x_0. Имеем

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h^3}{\widehat{\lambda}_1 h^4 + 4\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)^2} = \frac{h^3}{4\widehat{\lambda}_2} \frac{1}{\lambda^2 + (1-\cos t)^2} =$$

$$= \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2} \left(\frac{1}{1+i\lambda-\cos t} - \frac{1}{1-i\lambda-\cos t} \right),$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_2}} = \frac{2}{\sqrt{d^2-1}}.$$

Выберем $|\mu| < 1$ из условия

$$\frac{1+\mu^2}{2\mu} = 1 + i\lambda.$$

Получим

$$\mu = 1 - \sqrt{\lambda \frac{\sqrt{\lambda^2+4}-\lambda}{2}} + i\left(\lambda - \sqrt{\lambda \frac{\sqrt{\lambda^2+4}+\lambda}{2}} \right)$$

$$= \left(1 - \sqrt{\lambda \frac{\sqrt{\lambda^2+4}-\lambda}{2}} \right) \left(1 - i\sqrt{\lambda \frac{\sqrt{\lambda^2+4}+\lambda}{2}} \right)$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d+1}} \right) \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d-1}} \right).$$

Из (5.12) имеем

$$\frac{1}{1+i\lambda-\cos t} - \frac{1}{1+i\lambda-\cos t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\mu}{1-\mu^2}\mu^{|j|} - \frac{2\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2}\overline{\mu}^{|j|} \right) e^{ijt}.$$

Поэтому

$$\widehat{x}_j = \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2} \left(\frac{2\mu}{1-\mu^2}\mu^{|j|} - \frac{2\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2}\overline{\mu}^{|j|} \right) =$$

$$= -\frac{2^{5/4}h^{3/2}d^{3/2}}{(d-1)^{1/2}(d+2)^{1/2}(d+1)^{1/4}} \operatorname{Im} \frac{\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}.$$

Окончательно получаем следующий результат

Теорема 13. *Имеет место равенство*

$$E(0,2,h,\delta)=\begin{cases}\dfrac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta\le h^2/\sqrt{6},\\ \dfrac{(d+1)^{3/4}\sqrt{d}}{2^{5/4}\sqrt{d+2}}h^{3/2}, & \delta>h^2/\sqrt{6},\end{cases}$$

где d — решение уравнения (5.17). *При $\delta\le h^2/\sqrt{6}$*

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=\widetilde{x}_0$$

— оптимальный метод, а при $\delta>h^2/\sqrt{6}$ метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=-\frac{4}{\sqrt{d^2-1}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\operatorname{Im}\frac{\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}\widetilde{x}_j,$$

где

$$\mu=\left(1-\sqrt{\frac{2}{d+1}}\right)\left(1-i\sqrt{\frac{2}{d-1}}\right),$$

— оптимальный.

Пусть теперь $k=1$. Тогда система (5.13) имеет вид

$$\frac{a^2+\sqrt{1+a^2}+3}{\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}=h^3\delta^2\widehat{\lambda}_1^2,$$
$$\frac{8\sqrt{2}(2+3\sqrt{1+a^2})}{(\sqrt{1+a^2}+1)^{3/2}(1+a^2)^{3/2}}=h^7\widehat{\lambda}_1^2.$$

Положив $d=\sqrt{a^2+1}$, получаем уравнение для d

$$\frac{(d+1)(d^2+d+2)}{3d+2}=\frac{16\delta^2}{h^4}. \tag{5.18}$$

Нетрудно показать, что это уравнение при $d>1$ имеет единственное решение для всех $\delta>h^2/\sqrt{10}$. Для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ получаем

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{2^{7/4}(2+3d)^{1/2}}{(d+1)^{3/4}d^{3/2}h^{7/2}},$$
$$\widehat{\lambda}_2=\frac{a^2h^4\widehat{\lambda}_1}{16}=\frac{(d^2-1)h^4\widehat{\lambda}_1}{16}.$$

Следовательно, при $\delta > h^2/\sqrt{10}$

$$E(1, 2, h, \delta) = \widehat{\lambda}_1\delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1\left(\delta^2 + \frac{(d^2-1)h^4}{16}\right) =$$

$$= \frac{(d+1)^{1/4}\sqrt{d}}{2^{1/4}\sqrt{3d+2}}h^{1/2}.$$

Построим теперь оптимальный метод восстановления для разделенной разности $\dfrac{x_1 - x_0}{h}$. Имеем

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h^2(e^{it}-1)}{\widehat{\lambda}_1 h^4 + 4\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)^2}.$$

В силу того, что

$$\overline{F\widehat{x}(t)} = F(\Delta_h y)(t),$$

где

$$Fy(t) = \frac{h^3}{\widehat{\lambda}_1 h^4 + 4\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)^2},$$

достаточно найти коэффициенты Фурье функции $y(\cdot)$, что было сделано выше (при других $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$). Используя полученные выше результаты, получаем

$$y_j = \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2}\left(\frac{2\mu}{1-\mu^2}\mu^{|j|} - \frac{2\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2}\overline{\mu}^{|j|}\right) =$$

$$= -\frac{4}{h\sqrt{d^2-1}\widehat{\lambda}_1}\operatorname{Im}\frac{\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}.$$

Отсюда

$$\widehat{x}_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = -\frac{4}{h^2\sqrt{d^2-1}\widehat{\lambda}_1}\operatorname{Im}\frac{\mu^{|j+1|+1} - \mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 14. *Имеет место равенство*

$$E(0, 2, h, \delta) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{h^{3/2}}\delta, & \delta \le h^2/\sqrt{10}, \\ \dfrac{(d+1)^{1/4}\sqrt{d}}{2^{1/4}\sqrt{3d+2}}h^{1/2}, & \delta > h^2/\sqrt{10}, \end{cases}$$

где d *— решение уравнения* (5.18)*. При* $\delta \le h^2/\sqrt{10}$

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \frac{\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_0}{h}$$

— оптимальный метод, а при $\delta > h^2/\sqrt{10}$ *метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = -\frac{4}{h\sqrt{d^2-1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im} \frac{\mu^{|j+1|+1} - \mu^{|j|+1}}{1-\mu^2} \widetilde{x}_j,$$

где

$$\mu = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d+1}}\right)\left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d-1}}\right),$$

является оптимальным.

Литература

[1] *Kolmogorov A. N.* Uber die beste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse, Ann. of Math., 37(1936), 107–110.

[2] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, кандид. дисс., МГУ, 1965 г.

[3] *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, 17:3 (1975), 359–368.

[4] *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениям в конечном числе точек, Матем. заметки, 19:1 (1976), 29–40.

[5] *Micchelli C. A. and Rivlin T. J.* A Survey of Optimal Kecovery, Optimal Estimation in Approximatio Theory, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.

[6] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи, Тр. Мат. иститута АН СССР, 189 (1989), 3–20.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным, Матем. заметки, 50:6 (1991), 85–93.

[8] *Meikman A. A. and Micchelli C. A.* Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spases from Inacurate Data, SIAM J. Numer. Anal., 16 (1979), 87–105.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.*Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью, Функ. анализ и его прил., Матем. сб., 193:3 (2002), 79–100.

[10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных , Функ. анализ и его прил. 37(2003), 51–64.

[11] *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным, *Владикавказский мат. журн.*, 6 (2004), вып. 4, 55–62.

[12] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[13] *Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 81 (2006), вып.6, 803–815.

[14] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени, Владикавказский мат. журн., 8 (2006), вып. 1, 16–21.

[15] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в d-мерном шаре по неточным исходным данным, XIV Международная конференция “Математика. Экономика. Образование”, IV Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”, Тезисы докладов, Ростов-на-Дону, 2006, 20–21.

[16] *Wedenskaya E. V.* Optimal recovery of linear ordinary differential equations system solutions with self-adjoined matrix of constant coefficients and simple eigenvalues, Extremal Problems in Complex and Real Analysis, Albany, NY, 2007, 52.

[17] *Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V.* Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data, J. Complexity, 23 (2007), 4–6, 653–661.

[18] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении последовательности, заданной неточно, Труды международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007, “Спектральные и эволюционные задачи”, 18 (2008), 52–53.

[19] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении последовательности по неточным данным, 3-я Международная конференция “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования.” Тезисы докладов, М. МФТИ. 2008, 130–132.

[20] *Введенская Е. В.* Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения, 45 (2009), вып. 2, 255–259.

[21] *Osipenko K. Yu., Stessin M. I.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions, Constr. Approx., 2010, 31, 1, 37-67.

[22] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева, Мат. сб., 197 (2006), вып. 3, 15–34.

[23] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983.

[24] *Стейн И., Вейс Дж.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.

[25] *Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган, пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной,* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, М, Наука, 1979.

[26] *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования, Матем. заметки, 4:2 (1968), 233–238.

[27] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.*Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье, *Мат. сб.*, 195:10 (2004), 67–82.