

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Задачи оптимального восстановления решений разностных уравнений по неточным измерениям часто сводятся к следующей общей постановке: приближенно известны некоторые степени конечномерного оператора, и по этой информации надо наилучшим образом восстановить любую его промежуточную степень. В данной работе доказывается теорема об оптимальном восстановлении степеней нормального оператора, и в качестве иллюстрации доказываются утверждения относительно оптимального восстановления температуры тела в разностной модели уравнения теплопроводности и оптимального восстановления решения в разностной модели системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $T: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ — линейный оператор. Предположим, что $x \in \mathbb{C}^d$ и $T^n x$ (T^n — n -ая степень оператора T) известны неточно, а именно, известны векторы $y_0, y_n \in \mathbb{C}^d$ такие, что $\|x - y_0\| \leq \delta_0$ и $\|T^n x - y_n\| \leq \delta_n$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\delta_0, \delta_n > 0$. По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение $T^k x$, $0 < k < n$. В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $\varphi: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup_{\substack{x, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d \\ \|x - y_0\| \leq \delta_0, \|T^n x - y_n\| \leq \delta_n}} \|T^k x - \varphi(y_0, y_n)\|.$$

Нас интересует величина

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d} e(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n, \varphi), \quad (1)$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и те методы, на которых нижняя грань достигается, называемые *оптимальными методами восстановления*.

Перед формулировкой основной теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $T: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ — ненулевой нормальный оператор,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №11-01-00529, №12-01-90014).

т. е. $TT^* = T^*T$. Тогда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — соответствующие собственные числа. Можно считать, что их модули упорядочены по возрастанию и тем самым $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_{s_1}| < \dots < |\lambda_{s_{r-1}+1}| = \dots = |\lambda_{s_r}|$. Общее значение модулей собственных чисел в j -ой группе обозначим через μ_j , $1 \leq j \leq r$. Разобьем полупрямую $(0, \infty)$ на промежутки: $\Delta_0 = (0, \mu_1^n]$, $\Delta_1 = (\mu_1^n, \mu_2^n]$, \dots , $\Delta_{r-1} = (\mu_{r-1}^n, \mu_r^n]$, $\Delta_r = (\mu_r^n, \infty)$, причем полуинтервал Δ_0 отсутствует, если $\mu_1 = 0$. Каждому промежутку Δ_j сопоставим пару чисел u_j и v_j , $0 \leq j \leq r$ (если $\mu_1 = 0$, то $1 \leq j \leq r$) по правилу: $u_0 = 0$,

$$u_j = \frac{\mu_j^{2k} \mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n} \mu_{j+1}^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad 1 \leq j \leq r-1,$$

$$u_r = \mu_r^{2k} \text{ и } v_0 = \mu_1^{-2(n-k)},$$

$$v_j = \frac{\mu_{j+1}^{2k} - \mu_j^{2k}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}, \quad 1 \leq j \leq r-1,$$

$$v_r = 0.$$

Теорема 1. Пусть $T: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ — ненулевой нормальный оператор и $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — его собственные числа в ортонормированном базисе из его собственных векторов. Если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $0 \leq j \leq r$, то

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) = \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j},$$

и для любого $\theta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\theta| \leq 1$, и любого линейного оператора $B: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$, для которого тот же базис является базисом из его собственных векторов с собственными числами

$$\beta_i = \frac{v_j \bar{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} + \theta \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \sqrt{-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

линейный оператор $\widehat{\varphi}: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$, действующий по правилу

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = (T^k - BT^n)\xi + B\eta,$$

является оптимальным методом восстановления.

Перед доказательством теоремы отметим ее некоторые частные случаи. Пусть $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$. Тогда $u_0 = 0$ и тем самым $\beta_i = \lambda_i^{-(n-k)}$, $1 \leq i \leq d$, т. е. $B = T^{-(n-k)}$. Следовательно, действие оптимального метода $\widehat{\varphi}$ таково

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = T^k(T^{-n}\eta).$$

Метод использует только измерение η , а именно, находится элемент x из условия $T^n x = \eta$ и берется от него k -ая степень оператора T .

Пусть теперь $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_r$. Тогда $v_0 = 0$ и значит, $\beta_i = 0$, $1 \leq i \leq d$, т. е. B — нулевой оператор. В этом случае метод использует только измерение ξ :

$$\widehat{\varphi}(\xi, \eta) = T^k \xi.$$

Доказательство теоремы 1. Оценим снизу погрешность оптимального восстановления $E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n)$. Покажем, что она не меньше значения (т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала) следующей задачи

$$\|T^k x\| \rightarrow \max, \quad \|x\| \leq \delta_0, \quad \|T^n x\| \leq \delta_n, \quad x \in \mathbb{C}^d. \quad (2)$$

Действительно, пусть x_0 — допустимый вектор в (2). Тогда, очевидно, вектор $-x_0$ также допустим и мы имеем для любого $\varphi: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$

$$\begin{aligned} 2\|T^k x_0\| &= \|T^k x_0 - \varphi(0, 0) - (T^k(-x_0) - \varphi(0, 0))\| \\ &\leq \|T^k x_0 - \varphi(0, 0)\| + \|T^k(-x_0) - \varphi(0, 0)\| \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^d \\ \|x\| \leq \delta_0, \|T^n x\| \leq \delta_n}} \|T^k x - \varphi(0, 0)\| \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d \\ \|x - y_0\| \leq \delta_0, \|T^n x - y_n\| \leq \delta_n}} \|T^k x - \varphi(y_0, y_n)\|. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2), а справа к нижней грани по всем методам φ , получаем требуемое.

Пусть e_1, \dots, e_d — ортонормированный базис в \mathbb{C}^d из собственных векторов оператора T и $x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$. Тогда квадрат значения задачи (2) равен значению такой задачи

$$\sum_{j=1}^d |\lambda_j|^{2k} |x_j|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^d |x_j|^2 \leq \delta_0^2, \quad \sum_{j=1}^d |\lambda_j|^{2n} |x_j|^2 \leq \delta_n^2. \quad (3)$$

Оценим снизу ее значение. Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1) $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$. Определим $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)$ по правилу: $\widehat{x}_1 = \delta_n/\mu_1^n$ и $\widehat{x}_j = 0$, $2 \leq j \leq d$. Так как $\delta_n/\delta_0 \leq \mu_1^n$, то $\widehat{x}_1^2 \leq \delta_0^2$ и значит, элемент \widehat{x} допустим в задаче (3). Следовательно, ее значение не меньше величины

$$\sum_{j=1}^d |\lambda_j|^{2k} |\widehat{x}_j|^2 = \mu_1^{2k} \frac{\delta_n^2}{\mu_1^{2n}} = \delta_n^2 \mu_1^{-(n-k)} = \delta_0^2 u_0 + \delta_n^2 v_0.$$

2) $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $1 \leq j \leq r-1$. Пусть k_1 и k_2 такие числа, что $|\lambda_{k_1}| = \mu_j$, а $|\lambda_{k_2}| = \mu_{j+1}$. Выберем \widehat{x}_{k_1} и \widehat{x}_{k_2} из условий

$$\widehat{x}_{k_1}^2 + \widehat{x}_{k_2}^2 = \delta_0^2, \quad \mu_j^{2n} \widehat{x}_{k_1}^2 + \mu_{j+1}^{2n} \widehat{x}_{k_2}^2 = \delta_n^2,$$

т. е.

$$\widehat{x}_{k_1} = \sqrt{\frac{\delta_0^2 \mu_{j+1}^{2n} - \delta_n^2}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}}, \quad \widehat{x}_{k_2} = \sqrt{\frac{\delta_n^2 - \delta_0^2 \mu_j^{2n}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}}}.$$

Положим $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)$, где \widehat{x}_{k_1} и \widehat{x}_{k_2} только что определены, а остальные компоненты нулевые. Тогда легко видеть, что \widehat{x} — допустимый элемент в задаче (3) и поэтому ее значение не меньше величины

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d |\lambda_j|^{2k} |\widehat{x}_j|^2 &= \mu_j^{2k} \widehat{x}_{k_1}^2 + \mu_{j+1}^{2k} \widehat{x}_{k_2}^2 = \\ &= \mu_j^{2k} \frac{\delta_0^2 \mu_{j+1}^{2n} - \delta_n^2}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}} + \mu_{j+1}^{2k} \frac{\delta_n^2 - \delta_0^2 \mu_j^{2n}}{\mu_{j+1}^{2n} - \mu_j^{2n}} = \delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j. \end{aligned}$$

3) $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_r$. Положим $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_d)$, где $\widehat{x}_d = \delta_0$ и $\widehat{x}_j = 0$, $1 \leq j \leq d-1$. Так как $\mu_r^{2n} |\widehat{x}_d|^2 = \mu_r^{2n} \delta_0^2 < \delta_n^2$, то вектор \widehat{x} допустим в задаче (3) и следовательно, ее значение не меньше величины

$$\sum_{j=1}^d |\lambda_j|^{2k} |\widehat{x}_j|^2 = \mu_r^{2k} \delta_0^2 = \delta_0^2 u_r + \delta_n^2 v_r.$$

4) Если $\mu_1 = 0$, то фактически дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $1 \leq j \leq r$, то значение задачи (3) не меньше величины $\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j$.

Согласно установленному выше, погрешность оптимального восстановления не меньше значения задачи (2) и значит, если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $j = 0, 1, \dots, r$, то доказано, что

$$E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n) \geq \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j}. \quad (4)$$

Перейдем теперь к оценке сверху величины $E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n)$ и построению оптимальных методов восстановления. Оптимальные методы будем искать среди линейных операторов из $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ в \mathbb{C}^d , т. е. среди операторов, действующих по правилу: $(\xi, \eta) \mapsto A\xi + B\eta$, где A и B — линейные операторы из \mathbb{C}^d в \mathbb{C}^d . Оптимальность такого метода означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|T^k x - Ay_0 - By_n\| \rightarrow \max, \quad \|x - y_0\| \leq \delta_0, \quad \|T^n x - y_n\| \leq \delta_n, \\ x, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d \quad (5)$$

равно $E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n)$.

Обозначим $\xi = x - y_0$ и $\eta = T^n x - y_n$. Тогда данная задача переписется так

$$\|T^k x - Ax - BT^n x + A\xi + B\eta\| \rightarrow \max, \quad \|\xi\| \leq \delta_0, \quad \|\eta\| \leq \delta_n, \\ x, \xi, \eta \in \mathbb{C}^d.$$

Заметим, что если $T^k - A - BT^n$ — ненулевой оператор, то значение этой задачи равно бесконечности. В самом деле, если существует такое $x_0 \in \mathbb{C}^d$, что $T^k x_0 - Ax_0 - BT^n x_0 \neq 0$, то за счет выбора константы $C > 0$ на допустимых элементах Cx_0 , $\xi = 0$ и $\eta = 0$ максимизируемый функционал может быть сделан сколь угодно большим.

Далее считаем, что $A = T^k - BT^n$ и, кроме того, будем предполагать, что собственные векторы e_1, \dots, e_d оператора T являются и собственными векторами оператора B . Но тогда они являются собственными векторами и оператора A . Если α_i и β_i , $1 \leq i \leq d$, — соответствующие собственные числа операторов A и B , то ясно, что

$$\alpha_i = \lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6)$$

Учитывая сделанные предположения и разложения $\xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_d e_d$ и $\eta = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_d e_d$, ясно, что квадрат значения задачи (5) равен значению такой задачи

$$\sum_{i=1}^d |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^d |\xi_i|^2 \leq \delta_0^2, \quad \sum_{i=1}^d |\eta_i|^2 \leq \delta_n^2. \quad (7)$$

Пусть $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$ и при этом $\mu_1 > 0$ и $1 \leq j \leq r-1$ или $\mu_1 = 0$ и $2 \leq j \leq r-1$. В этом случае числа u_j и v_j положительны. Оценим в данной ситуации слагаемые под знаком суммы в максимизируемом функционале в (7) по неравенству Коши–Буняковского

$$|\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 \leq \left(\frac{|\alpha_i|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} \right) (|\xi_i|^2 u_j + |\eta_i|^2 v_j), \quad 1 \leq i \leq d. \quad (8)$$

Если (см. (6))

$$\frac{|\alpha_i|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} = \frac{|\lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} \leq 1, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (9)$$

то складывая неравенства (8), получаем, что значение задачи (7) не превосходит величины $\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j$ и значит, согласно (4), совпадает с ней, а метод из теоремы с оператором B , определяемым данными β_i , $i = 1, \dots, d$, оптимален.

Перепишем левые части неравенств (9) в другой форме (выделяя полный квадрат)

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda_i^k - \beta_i \lambda_i^n|^2}{u_j} + \frac{|\beta_i|^2}{v_j} &= \\ &= \frac{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}{u_j v_j} \left| \beta_i - \frac{v_j \bar{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \right|^2 + \frac{|\lambda_i|^{2k}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}. \end{aligned}$$

Требование, чтобы эти выражения не превосходили единицы равносильно неравенствам

$$\left| \beta_i - \frac{v_j \bar{\lambda}_i^n \lambda_i^k}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \right| \leq \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j} \sqrt{-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j}, \quad (10)$$

$1 \leq i \leq d$, которые, в свою очередь, эквивалентны выражениям для β_i , $i = 1, \dots, d$, из формулировки теоремы (для рассматриваемых сейчас случаев, когда $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, а j таково, что u_j и v_j одновременно отличны от нуля). При этом, выражения под знаком корня в (10) неотрицательны. Действительно, точки (μ_j^{2n}, μ_j^{2k}) и $(\mu_{j+1}^{2n}, \mu_{j+1}^{2k})$ лежат на вогнутой кривой $y = x^{k/n}$ и через них проходит прямая $y = u_j + v_j x$. Следовательно, для всех μ_i справедливо неравенство $\mu_i^{2k} \leq u_j + v_j \mu_i^{2n}$ и значит $-|\lambda_i|^{2k} + u_j + |\lambda_i|^{2n} v_j \geq 0$. Из (10), в частности, следует, что числа β_i , $i = 1, \dots, d$, удовлетворяющие (9) существуют.

Итак, если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, а j такое, что u_j и v_j одновременно отличны от нуля, то числа β_i , $i = 1, \dots, d$, удовлетворяющие условиям теоремы, дают нужное выражение для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в теореме метода.

Докажем, что и в остальных случаях, найденные из (10) выражения для β_i , $i = 1, \dots, d$, обладают тем же свойством. Действительно, пусть $\mu_1 > 0$ и $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$. Тогда, по определению, $u_0 = 0$ и $v_0 = \mu_1^{-2(n-k)}$. Из (10) следует, что $\beta_i = \lambda_i^{-(n-k)}$ и значит, согласно (6), $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, d$, и мы получаем (учитывая, что $\mu_1 \leq |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, d$) оценку сверху для значения задачи (7)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 &= \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^{-2(n-k)} |\eta_i|^2 \leq \mu_1^{-2(n-k)} \sum_{i=1}^d |\eta_i|^2 \leq \\ &\leq \delta_n^2 v_0 = \delta_0^2 u_0 + \delta_n^2 v_0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что утверждения теоремы справедливы, когда $\mu_1 > 0$, а $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_0$.

Пусть теперь $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_r$. Тогда, по определению, $u_r = \mu_r^{2k}$ и $v_r = 0$. Из (10) получаем, что $\beta_i = 0$ и вследствие (6) $\alpha_i = \lambda_i^k$, $i = 1, \dots, d$. Следовательно (учитывая, что $|\lambda_i| \leq \mu_r$, $i = 1, \dots, d$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d |\xi_i \alpha_i + \eta_i \beta_i|^2 &= \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^{2k} |\xi_i|^2 \leq \mu_r^{2k} \sum_{i=1}^d |\xi_i|^2 \leq \delta_0^2 u_r = \\ &= \delta_0^2 u_r + \delta_n^2 v_r, \end{aligned}$$

т. е. и в этом случае утверждения теоремы справедливы. \square

2. ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО
 НЕТОЧНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ

Рассмотрим уравнение теплопроводности на окружности, задаваемое неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j} - u_{sj}}{\tau} = \frac{u_{s+1,j+1} - 2u_{s+1,j} + u_{s+1,j-1}}{h^2}. \quad (11)$$

Здесь τ и h — положительные числа, $(s, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_m$, где \mathbb{Z}_m — группа вычетов по модулю $m \geq 1$, которую будем реализовывать как набор чисел $\{0, 1, \dots, m-1\}$ со сложением по модулю m , $u_{s,j}$ — температура тела в момент времени $s\tau$ в точке jh .

Обозначим через l_2^m пространство функций (векторов) $x = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ на \mathbb{Z}_m с нормой

$$\|x\|_{l_2^m} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Предположим, что приближенно измерена температура тела в нулевой момент времени и в момент времени $n\tau$, т. е. приближенно известны векторы $u_0 = (u_{0,0}, \dots, u_{0,m-1})$ и $u_n = (u_{n,0}, \dots, u_{n,m-1})$, или, точнее говоря, нам известны векторы $y_0 = (y_{0,0}, \dots, y_{0,m-1})$ и $y_n = (y_{n,0}, \dots, y_{n,m-1})$ такие, что

$$\|u_q - y_q\|_{l_2^m} \leq \delta_q, \quad q = 0, n,$$

где $\delta_q > 0$, $q = 0, n$. По этой информации требуется восстановить вектор $u_k = (u_{k,0}, \dots, u_{k,m-1})$, где $0 < k < n$, т. е. восстановить значение температуры тела в момент времени $k\tau$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi: l_2^m \times l_2^m \rightarrow l_2^m$. Для данного метода φ его погрешностью назовем величину

$$e_{kn}(\delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup_{\substack{u_0, y_0, y_n \in l_2^m \\ \|u_q - y_q\|_{l_2^m} \leq \delta_q, \quad q=0, n}} \|u_k - \varphi(y_0, y_n)\|_{l_2^m}.$$

Величина

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi: l_2^m \times l_2^m \rightarrow l_2^m} e_{kn}(\delta_0, \delta_n, \varphi)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

На \mathbb{Z}_m определено преобразование Фурье — линейное отображение, переводящее \mathbb{Z}_m в себя, задаваемое матрицей

$$F = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-\frac{2\pi i p}{m} j} \right)_{p,j=0}^{m-1},$$

которая, как нетрудно видеть, является унитарной.

Применим преобразование Фурье по переменной j к обеим частям уравнения (11), учитывая, что оно переводит сдвиг на ± 1 в

умножение на $\exp(\pm 2\pi ip/m)$. После несложных преобразований получим, что $Fu_{s+1} = \Lambda Fu_s$ для всех $s \in \mathbb{Z}_+$, где Λ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\lambda_p = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi p}{m}\right)^{-1}, \quad p = 0, 1, \dots, m-1. \quad (12)$$

Из соотношения $Fu_{s+1} = \Lambda Fu_s$ следует, что

$$u_{s+1} = Tu_s, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

где $T = F^{-1}\Lambda F$.

Таким образом, мы приходим к предыдущей задаче, и ясно, что

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = E(T^k, T^n, \delta_0, \delta_n).$$

Сформулируем соответствующий результат, вытекающий из теоремы 1. Положим

$$\mu_j = \left(1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{m}(r-j)\right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, r,$$

где $r = [m/2] + 1$.

Определим Δ_j , v_j и u_j , $j = 1, \dots, r$, по тем же формулам, что и в теореме 1. Тогда из нее вытекает

Теорема 2. *Если $\delta_n/\delta_0 \in \Delta_j$, $0 \leq j \leq r$, то*

$$E_{kn}(\delta_0, \delta_n) = \sqrt{\delta_0^2 u_j + \delta_n^2 v_j},$$

и для любого $\theta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\theta| \leq 1$, и любой диагональной матрицы B с диагональными элементами

$$\beta_p = \frac{v_j \lambda_p^{n+k}}{u_j + \lambda_p^{2n} v_j} + \theta \frac{\sqrt{u_j v_j}}{u_j + \lambda_p^{2n} v_j} \sqrt{-\lambda_p^{2k} + u_j + \lambda_p^{2n} v_j}, \quad p = 0, 1, \dots, m-1,$$

метод

$$\widehat{\varphi}(y_0, y_n) = (T^k - T^n \widetilde{B})y_0 + \widetilde{B}y_n,$$

где $\widetilde{B} = F^{-1}BF$, является оптимальным.

Аналоги рассматриваемой задачи для непрерывных моделей рассматривались в работах [1], [2], [4]–[6]. В работе [5] изучалась также дискретная модель для непериодического случая.

3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дискретную модель перемещения d -мерного вектора, задаваемую равенствами

$$\frac{x_{s+1} - x_s}{\tau} = Ax_s, \quad s = 0, 1, \dots,$$

где $x_s \in \mathbb{C}^d$, $\tau > 0$ и A — квадратная матрица порядка d с постоянными коэффициентами.

Предположим, что известны векторы $y_0, y_n \in \mathbb{C}^d$ такие, что $\|x_0 - y_0\| \leq \delta_0$ и $\|x_n - y_n\| \leq \delta_n$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\delta_0, \delta_n > 0$. По этой информации мы хотим восстановить значение x_k , $0 < k < n$. В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения $\varphi: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(k, n, \delta_0, \delta_n, \varphi) = \sup_{\substack{x_0, y_0, y_n \in \mathbb{C}^d \\ \|x_0 - y_0\| \leq \delta_0, \|x_n - y_n\| \leq \delta_n}} \|x_k - \varphi(y_0, y_n)\|.$$

Нас интересует величина

$$E(k, n, \delta_0, \delta_n) = \inf_{\varphi: \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d} e(k, n, \delta_0, \delta_n, \varphi).$$

В силу равенств

$$x_s = T^s x_0, \quad T = E + \tau A,$$

рассматриваемая задача сводится к задаче (1). Предположим, что A — нормальная матрица с собственными значениями μ_1, \dots, μ_d . Тогда T — также нормальная матрица с собственными значениями $\lambda_j = 1 + \tau\mu_j$, $j = 1, \dots, d$. Непосредственное применение теоремы 1 дает решение поставленной задачи для данного случая.

Аналог этой задачи для непрерывной модели рассматривался в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Введенская Е. В. “Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени”, *Владикавказский мат. журн.*, **8**:1 (2006), 16-21.
- [2] Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. W. “Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data”, *J. Complexity*, **23**:4-6 (2007), 653-661.
- [3] Введенская Е. В. “Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:2 (2009), 255-259.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37-54.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Тр. МИАН*, **269** (2010), 181-192.
- [6] Osipenko K. Yu. “Extremal problems for the generalized heat equation and optimal recovery of its solution from inaccurate data”, *Optimization*, **60**:6, (2011), 755-767.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА, г. МОСКВА; ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА, г. МОСКВА; ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВЛАДИКАВКАЗСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН, г. ВЛАДИКАВКАЗ

E-mail address: magaril@mech.math.msu.su

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА,
Г. МОСКВА; ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВЛАДИКАВКАЗСКОГО
НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН, Г. ВЛАДИКАВКАЗ

E-mail address: kosipenko@yahoo.com