РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

Введенская Елена Викторовна

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

01.01.02—дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва—2011

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика" МАТИ-Российского государственного технологического университета им. К. Э. Циолковского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой "Высшая математика" МАТИ им. К.Э. Циолковского К. Ю. Осипенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов М. Л. Гольдман;
	доктор физико-математических наук, профессор кафедры "Высшая математика" Московского энергетического института- технического университета И. М. Петрушко.
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 13 сентября 2011г. в 16-00 на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 495а.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 2011г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Л.Е. Россовский

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При решении многих задач математической физики, обыкновенных дифференциальных уравнений, а также при их дискретизации возникает необходимость восстановления функций, функционалов и операторов по неточной или неполной информации о них. Такого рода задачи решаются с помощью теории оптимального восстановления - раздела теории приближений. При классическом подходе к таким задачам, как правило, задаются средства приближения. В теории оптимального восстановления вид метода восстановления не фиксируется заранее, а в качестве претендентов на роль оптимального метода рассматриваются всевозможные методы восстановления, использующие исходную информацию. При этом выбирается наилучший способ приближения функции, оператора или функционала, т.е. такой метод, погрешность которого минимальна.

Цель работы

Цель диссертационной работы состояла в построении оптимальных методов восстановления решений уравнений с частными производными параболического типа, а также систем обыкновенных дифференциальных уравнений, по неточной информации о значениях решения в некоторые моменты времени. Кроме того, ставилась задача получения оптимальных методов численного дифференцирования по неточно заданным данным.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в том, что:
– Построены методы оптимального восстановления решения обобщенного уравнения теплопроводности и рассмотрены некоторые частные случаи этой задачи, не изучавшиеся ранее.
– Решена задача оптимального восстановления решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, причем построено семейство оптимальных методов.
– Построены методы оптимального восстановления последовательностей, а также разделенных разностей этих последовательностей, по неточной информации о самих последовательностях.

Практическая ценность

При решении технических задач, как правило, приходится использовать информацию, заданную неточно.
В диссертации предлагаются: – Методы восстановления решений начально-краевых задач для уравнений параболического типа, использующие неточные исходные данные.
– Методы оптимального приближения решений задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных с некоторыми погрешностями значениях решения в определенные моменты времени.
– Методы оптимального восстановления последовательностей и их разделенных разностей любого порядка. Для этих методов получена асимптотика погрешности, а в ряде случаев найдено точное ее значение.

Апробация работы и публикации

По темам диссертации опубликованы 7 работ [1 - 7]

Основные результаты, представленные в работе, были доложены на:

1. Международной конференции "Математика. Экономика. Образование.", IV международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения", Ростов - на - Дону, 2006г.;
2. Международной конференции "Extremal problems in complex and real analysis", Москва, 2007;
3. Конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум - 2007";
4. 3-й Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2008 г.;
5. Конференции "Крымская осенняя математическая школа - симпозиум - 2008";
6. Конференции "Крымская осенняя математическая школа - симпозиум - 2009";
7. Научном семинаре кафедры "Высшая математика", МАТИ им. К.Э. Циолковского;
8. Научном семинаре кафедры "Общие проблемы управления" механико-математического факультета МГУ;
9. Научном семинаре "Обратные задачи математической физики"(рук. А.Б. Бакушинский, А.В. Тихонравов, А.Г. Ягола) в НИВЦ МГУ.

Структура и объём диссертации

Работа состоит из пяти глав, включая введение, и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 68 страниц. Список литературы содержит 27 наименований.

Краткое содержание работы

В 1-й главе дан краткий исторический обзор работ, посвященных задачам, решаемым с помощью теории оптимального восстановления, которая берет свое начало от работ А.Н.Колмогорова, а также С.А.Смоляка. Кроме того, в 1-й главе приводится краткое содержание диссертации, а также информация о докладах и публикациях по теме диссертационной работы.

Во 2-й главе рассматриваются задачи оптимального восстановления линейного оператора, а также линейного функционала, по неточным данным с использованием методики, разработанной Г.Г.Магарил-Ильяевым и К.Ю.Осипенко. Здесь сформулированы 6 теорем и лемма и приведены их доказательства. В теореме 1 дается общая методика построения оптимального метода восстановления линейного оператора и вычисляется погрешность этого метода. В теореме 2 методика оптимального восстановления конкретизирована. Теорема 3 посвящена оптимальному восстановлению линейного функционала. В ней приводится оптимальный метод и вычисляется его погрешность. Теорема 4 конкретизирует теорему 3. Во 2-й главе приводится также понятие обобщенного решения уравнения параболического типа и строится решение общего эволюционного уравнения. Кроме того, описаны собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в d-мерном шаре, которые образуют базис в пространстве решений уравнения Лапласа.

3-я глава посвящена оптимальному восстановлению обобщенного уравнения теплопроводности. В теореме 6 строится оптимальный метод восстановления и вычисляется его погрешность. Теорема 7 посвящена восстановлению решения уравнения теплопроводности в d-мерном шаре. Затем приводятся частные случаи методов восстановления и их погрешностей для круга, шара и отрезка.

В 4-й главе рассматривается задача оптимального восстановления решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов в момент τ по неточно заданному решению системы в 2 момента времени t_1 и t_2, где $t_1 \leq \tau \leq t_2$. В теореме 9 строится семейство оптимальных методов восстановления решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексной матрицей постоянных коэффициентов и вычисляется погрешность этих методов в метрике $L_p, 1 \leq p \leq \infty$. Следствия из теоремы 9 показывают, что в некоторых случаях оптимальный метод может использовать не все координаты векторов, задающих приближенные значения решения системы в 2 момента времени, а лишь часть их координат.

В 5-й главе рассмотрена задача оптимального восстановления $n-$й разделенной разности последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}$. Задача решается в метрике $\mathcal{L}_{2,h}, h > 0$ т. е. в пространстве последовательностей

$$x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, x_j \in \mathbb{C},$$

для которых норма

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Построена асимптотика погрешности оптимального восстановления разделенной разности (см. теорему 10). В теореме 11 рассмотрен случай малых погрешностей и приведены оптимальный метод и его погрешность. В теореме 12 найден оптимальный метод восстановления первой разделенной разности (частный случай теоремы 11). Случай $n = 2$ рассмотрен в теоремах 13 и 14.

Рассмотрим более подробно содержание глав 2 – 5. Нумерация теорем соответствует нумерации в диссертационной работе.

Во 2-й главе строится метод оптимального восстановления линейного оператора.

Пусть $X-$векторное пространство, $Y_1, \dots, Y_k$ – пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{Y_j}$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_{Y_j}$, а $I_j : X \to Y_j, j = 1, \dots, k$ – линейные операторы. Пусть $Z-$ нормированное пространство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного оператора $T : X \to Z$ на классе

$$W_l = \left\{ x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, l,\ l < k \right\}.$$

Если $l = 0$, считаем, что $W_0 = X$. Пусть нам известен для каждого $x \in W_l$ вектор $y = (y_{l+1}, \dots, y_k) \in Y_{l+1} \times \dots \times Y_k$, такой, что

$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j, \quad j = l+1, \dots, k.$$

Требуется восстановить оператор T по априорной (W_l) и апостериорной (вектор y) информации об элементе x. В качестве *методов* восстановления рассматриваются всевозможные отображения

$$\varphi\colon Y_{l+1} \times \dots \times Y_k \to Z.$$

Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_l, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in W_l \\ y\in Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j, j=l+1,\ldots,k}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z,$$

где $I = \{I_1, \dots, I_k\}$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)$. *Погрешностью оптимального восстановления* называется величина

$$E(T, W_l, I, \delta) = \inf_{\varphi: Y_{l+1}\times\ldots\times Y_k \to Z} e(T, W_l, I, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется *оптимальным методом восстановления* оператора T на классе W_l по информации I. С описанной задачей тесно связана следующая экстремальная задача

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2,\ j = 1, ..., k; \quad x \in X. \tag{1}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть существуют такие* $\widehat{\lambda}_j \geq 0, j = 1, \ldots, k$, *что значения задачи*

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \ x \in X. \tag{2}$$

и задачи (1) *совпадают. Предположим, что для всех* $y = (y_{l+1}, \ldots, y_k) \in \widetilde{Y}_{l+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_k$, *где* $\widetilde{Y}_j-$ *некоторые всюду плотные в* Y_j *множества,* $j = l+1, \ldots, k$, *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^{l} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=l+1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min, \ x \in X. \tag{3}$$

Предположим, кроме того, что существует линейный непрерывный оператор $A : Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k \to Z$, *такой, что для всех* $y \in \widetilde{Y}_{l+1} \times \ldots \times \widetilde{Y}_k$

$$Ay = Tx_y.$$

При этом норма в $Y_{l+1} \times \ldots \times Y_k$ *определяется как*

$$\|y\| = \left(\sum_{j=l+1}^{k} \|y_j\|_{Y_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(T, W_l, I, \delta) = \sup_{\substack{\|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j, \\ j=1,\ldots,k}} \|Tx\|_Z,$$

а метод восстановления $\widehat{\varphi}(y) = Ay$ *является оптимальным.*

Приведем достаточное условие совпадения значений задач (1) и (2). Функция Лагранжа задачи (1) имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|_Z^2 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|I_j x\|_{Y_j}^2,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Теорема 2. *Пусть существуют* $\widehat{\lambda}_j \geq 0, j = 1, \ldots, k$, *и допустимый в задаче* (1) *элемент* $\widehat{x}$, *такие, что*

$$(a) \ \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k),$$

$$(b) \ \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \left(\|I_j \widehat{x}\|_{Y_j}^2 - \delta_j^2 \right) = 0.$$

Тогда $\widehat{x}-$ *решение этой задачи, и*

$$\sup_{\substack{x \in X, \\ \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \delta_j^2, j=1,\ldots,k}} \|Tx\|_Z^2 = \sup_{\substack{x \in \ X \\ \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|Tx\|_Z^2 = \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

<u>В 3-й главе</u> речь идет об оптимальном восстановлении решения обобщенного эволюционного уравнения:

$$u_t = Lu,$$
$$(4)\qquad u(x,t)|_{t=0} = f(x),$$
$$u(x,t)|_{x\in\Gamma} = 0.$$

Здесь L - некоторый оператор, действующий на ограниченном множестве $\Omega \in R^d$, а Γ — кусочно-гладкая граница области Ω, т.е. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Пусть в задаче

$$LX = \lambda X, \quad x \in \Omega, \quad X|_\Gamma = 0$$

существует счетный набор действительных собственных чисел $\lambda_k \geq 0,\ k \in N$, и соответствующих им попарно ортогональных собственных функций оператора L: $X_{kj}(x)$, $j = 1, \dots, m_k$, причем $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ без точек сгущения. Здесь m_k — кратность собственного числа λ_k. Предположим, кроме того, что $\{X_{kj}\}_{k\in N, j=1,\dots,m_k}$ — ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega)$.

Решение задачи (4), получаемое методом Фурье разделения переменных, имеет вид

$$(5)\qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj} X_{kj}(x),$$

где $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} C_{kj} X_{kj}(x)$.

Положим

$$\widehat{\mu}_1 = \begin{cases} \dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_2} - {\beta_m}^{\tau-t_2}}{\beta_{m+1}^{t_1-t_2} - \beta_m^{t_1-t_2}}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_m,\ m \geq 1, \\ \beta_1^{\tau-t_1}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0, \end{cases}$$

$$\widehat{\mu}_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta_m^{\tau-t_1} - \beta_{m+1}^{\tau-t_1}}{\beta_m^{t_2-t_1} - \beta_{m+1}^{t_2-t_1}}, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_m,\ m \geq 1, \\ 0, & \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0, \end{cases}$$

где $\beta_m = e^{-2\lambda_m}$, а λ_m— собственные числа оператора L. Задача состоит в том, чтобы оптимально восстановить решение эволюционного уравнения по неточным значениям его решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в моменты t_1 и t_2 соответственно. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6. *Для погрешности оптимального восстановления решения* (5) *задачи* (4) *имеет место равенство*

$$(6)\qquad E_\tau\left(L_2(\Omega), \delta_1, \delta_2\right) = \sqrt{\widehat{\mu}_1 \delta_1^2 + \widehat{\mu}_2 \delta_2^2},$$

а метод восстановления

$$(7)\qquad \widehat{\xi}(y_1, y_2)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\widehat{\mu}_1 d_{kj} \beta_k^{t_1/2} + \widehat{\mu}_2 p_{kj} \beta_k^{t_2/2}}{\widehat{\mu}_1 \beta_k^{t_1} + \widehat{\mu}_2 \beta_k^{t_2}} X_{kj}(x) e^{-\lambda_k \tau},$$

где d_{kj} и p_{kj} — коэффициенты Фурье функций $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ при разложении по ортонормированной системе $X_{kj}(\cdot)$ собственных функций оператора L, является оптимальным.

Частным случаем рассмотренной задачи является оптимальное восстановление решения обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре. Здесь оператор $L = (-\Delta)^{\alpha/2}$.

Займемся оптимальным восстановлением решения начально - краевой задачи для обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре по неточным значениям этого решения в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$.
Пусть

$$B^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\},$$

$$S^{d-1} = \left\{ x \in R^d : |x| = 1 \right\}.$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ равенством

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj},$$

где

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj}(x), \quad x \in B^d,$$

Y_{skj} — ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в шаре B^d, $\mu_s^{(p)}$ — корни функций Бесселя 1-го рода p-го порядка, $p = k + \dfrac{d-2}{2}$ (см. §5 главы 2). Здесь $a_k = \frac{(d+k-3)!(d+2k-2)!}{(d-2)!k!}$ — размерность пространства однородных гармонических многочленов.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0, \\ &u|_{t=0} = f(x), \quad f(\cdot) \in L_2\left(B^d\right), \\ &u(x,t)|_{x \in S^{d-1}} = 0, \quad x \in B^d, \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{8}$$

Точное решение задачи (8) получается методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left(\mu_s^{(p)}\right)^{\alpha} t} \sum_{j=1}^{a_k} C_{skj} Y_{skj}(x). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$a_s^k = e^{-2(\mu_s^{(p)})^{\alpha}}, \quad a_{s_m}^{k_m} = \beta_m, \quad \Delta_m = [\beta_{m+1}^{t_2 - t_1}, \quad \beta_m^{t_2 - t_1}),$$

$$m = 1, 2, ...; \quad \Delta_0 = [{\beta_1}^{t_2 - t_1}, +\infty).$$

При этом

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > \ldots .$$

Предположим, что нам известны решения задачи (8) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в моменты t_1 и t_2 соответственно, $0 \le t_1 < t_2$, заданные с погрешностями δ_1 и δ_2 в метрике $L_2(B^d)$:

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\| \le \delta_j, j = 1, 2.$$

Здесь погрешностью оптимального восстановления решения (9) задачи (8) является величина

$$E_\tau\left(\alpha, L_2(\mathbb{B}^d), \delta_1, \delta_2\right) = \inf_\xi \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{B}^d), \\ \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \delta_j,\ j=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - \xi(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L(\mathbb{B}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем методам $\xi\colon L_2(B^d) \times L_2(B^d) \to L_2(B^d)$.

Представим функции $y_j(x)$, $j = 1, 2$, в виде

$$y_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{1skj} Y_{skj}(x), \ \ y_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} y_{2skj} Y_{skj}(x).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_2} - \beta_m^{\tau-t_2}}{\beta_{m+1}^{t_2-t_1} - \beta_m^{t_2-t_1}}, & \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_m,\ m = 1, 2, ...; \\ (a_1^0)^{\tau-t_1} & , \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0; \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta_{m+1}^{\tau-t_1} - \beta_m^{\tau-t_1}}{\beta_{m+1}^{t_2-t_1} - \beta_m^{t_2-t_1}} & , \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_m,\ m = 1, 2, ...; \\ 0 & , \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \in \Delta_0. \end{cases}$$

Из теоремы 6 вытекает следующая

Теорема 7. *При всех $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ имеет место равенство*

$$E(\alpha, L_2(B^d), \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 {\delta_1}^2 + \widehat{\lambda}_2 {\delta_2}^2},$$

при этом метод восстановления решения задачи (8)

$$\widehat{\xi}(y_1, y_2)(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_s^k)^{\tau/2} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 y_{1skj} (a_s^k)^{t_1/2} + \widehat{\lambda}_2 y_{2skj} (a_s^k)^{t_2/2}}{\widehat{\lambda}_1 (a_s^k)^{t_1} + \widehat{\lambda}_2 (a_s^k)^{t_2}} Y_{skj}(x) \tag{10}$$

является оптимальным.

В 4-й главе рассматривается задача оптимального восстановления решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$
$$x\Big|_{t=0} = x_0,$$

где $x(t) \in K^n$, $t \geq 0$, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in K.$$

Предположим, что существует базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства K^n из собственных векторов матрицы A и собственные числа μ_j, отвечающие собственным векторам e_j, $j = 1, \dots, n$. Решение этой задачи единственно и имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} c_j(x_0) e_j, \tag{11}$$

где

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_0) e_j.$$

Предположим, что известны приближенные значения решения этой задачи $\widetilde{x}_i$, $i = 1, 2$, в моменты времени $0 \leq t_1 < t_2$. Требуется по этим двум элементам наилучшим образом восстановить решение в момент времени τ, $t_1 < \tau < t_2$.

Предположим, что даны $\widetilde{x}_i \in K^n$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\|x(t_i) - \widetilde{x}_i\|_p \leq \delta_i, \quad i = 1, 2,$$

где для

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) e_j$$

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |c_j(x)|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq n} |c_j(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $m\colon K^n \times K^n \to K^n$. Погрешностью метода m назовем величину

$$e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m) = \sup_{\substack{x_0, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in K^n \\ \|x(t_j) - \widetilde{x}_j\|_p \leq \delta_j,\ j=1,2}} \|x(\tau) - m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)\|_p,$$

Отсюда следует, что

$$e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m) \geq \sup_{\substack{x_0 \in K^n \\ \|x(t_j)\|_p \leq \delta_j,\ j=1,2}} \|x(\tau)\|_p.$$

В силу произвольности m имеем

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) \geq \sup_{\substack{x_0 \in K^n \\ \|x(t_j)\|_p \leq \delta_j,\ j=1,2}} \|x(\tau)\|_p.$$

где $x(\cdot)$ определено равенством (11). Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) = \inf_{m\colon K^n \times K^n \to K^n} e_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2, m),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Поставленная задача оптимального восстановления отличается от рассмотренных ранее тем, что здесь мы имеем дело с неевклидовым случаем. Поэтому теорема 1 в этом случае неприменима.

Будем считать, что собственные числа μ_j упорядочены по возрастанию их вещественных частей

$$\operatorname{Re}\mu_1 = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_1} < \operatorname{Re}\mu_{j_1+1} = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_2} < \ldots < \operatorname{Re}\mu_{j_{k-1}+1} = \ldots = \operatorname{Re}\mu_{j_k}.$$

Для удобства обозначений положим $\nu_r = \operatorname{Re}\mu_{j_r}$, $r = 1, \ldots, k$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Если при некотором $1 \le s < k$

$$e^{\nu_s(t_2-t_1)} \le \frac{\delta_2}{\delta_1} < e^{\nu_{s+1}(t_2-t_1)}, \tag{12}$$

положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{e^{-p\nu_s(t_2-\tau)} - e^{-p\nu_{s+1}(t_2-\tau)}}{e^{-p\nu_s(t_2-t_1)} - e^{-p\nu_{s+1}(t_2-t_1)}},$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{e^{p\nu_{s+1}(\tau-t_1)} - e^{p\nu_s(\tau-t_1)}}{e^{p\nu_{s+1}(t_2-t_1)} - e^{p\nu_s(t_2-t_1)}}.$$

В случае, если $\delta_2/\delta_1 \ge e^{\nu_k(t_2-t_1)}$ положим $\widehat{\lambda}_1 = e^{p\nu_k(\tau-t_1)}$, а $\widehat{\lambda}_2 = 0$. При $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$ положим $\widehat{\lambda}_1 = 0$, а $\widehat{\lambda}_2 = e^{-p\nu_1(t_2-\tau)}$.

Теорема 9. *При всех $1 \le p < \infty$, $0 \le t_1 < \tau < t_2$ и всех $\delta_1, \delta_2 > 0$ имеет место равенство*

$$E_p(\tau, A, \delta_1, \delta_2) = \left(\widehat{\lambda}_1\delta_1^p + \widehat{\lambda}_2\delta_2^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Если выполнено условие (12), *то для всех α_j, β_j, удовлетворяющих условиям*

$$\alpha_j e^{\mu_j t_1} + \beta_j e^{\mu_j t_2} = e^{\mu_j\tau}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{|\alpha_j|^q}{\widehat{\lambda}_1^{q/p}} + \dfrac{|\beta_j|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p}} \le 1, & j = 1, \ldots, n,\ 1 < p < \infty, \\ |\alpha_j| \le \widehat{\lambda}_1,\ |\beta_j| \le \widehat{\lambda}_2, & j = 1, \ldots, n,\ p = 1, \end{cases} \tag{15}$$

где $1/p + 1/q = 1$, методы

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j c_j(\widetilde{x}_1) + \beta_j c_j(\widetilde{x}_2))e_j \tag{16}$$

являются оптимальными. При $\delta_2/\delta_1 \ge e^{\nu_k(t_2-t_1)}$ метод

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j(\tau-t_1)} c_j(\widetilde{x}_1)e_j, \tag{17}$$

а при $\delta_2/\delta_1 < e^{\nu_1(t_2-t_1)}$ метод

$$m(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \sum_{j=1}^n e^{-\mu_j(t_2-\tau)} c_j(\widetilde{x}_2)e_j,$$

являются оптимальными.

<u>5-я глава</u> посвящена задаче оптимального восстановления $n-$й разделенной разности последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}$.

Задача восстановления члена последовательности, заданной неточно, эквивалентна следующей экстремальной задаче

$$x^{(k)}(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1,$$

значение которой, в свою очередь, равно погрешности оптимального восстановления k-ой производной в нуле по неточно заданной самой функции на соболевском классе $W_2^n(\mathbb{R})$, состоящем из функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1$.

Мы рассматриваем некоторые дискретные аналоги подобных задач восстановления.

Через $\mathcal{L}_{2,h}$, $h > 0$, будем обозначать пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \left(h \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Положим

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

$$\Delta_h^k x = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} x), \quad k = 2, 3, \dots .$$

Через $l_{2,h}^n$ обозначим класс последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $\|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \le 1$.

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значения $(\Delta_h^k x)_0$ по неточно заданной последовательности $x \in l_{2,h}^n$, $0 \le k < n$. Предполагается, что для каждого $x \in l_{2,h}^n$ известна последовательность $\widetilde{x} \in \mathcal{L}_{2,h}$ такая, что $\|x - \widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \le \delta$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon \mathcal{L}_{2,h} \to \mathbb{C}$. В соответствии с общей постановкой задачи восстановления погрешностью метода m назовем величину

$$e(k,n,h,\delta,m) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n,\ \widetilde{x}\in\mathcal{L}_{2,h} \\ \|x-\widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\le\delta}} \|(\Delta_h^k x)_0 - m(\widetilde{x})\|.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(k,n,h,\delta) = \inf_{m\colon \mathcal{L}_{2,h}\to\mathbb{C}} e(k,n,h,\delta,m).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом. Справедлива следующая асимптотика погрешности оптимального восстановления

Теорема 10. *При всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n-1$*

$$E(k,n,h,\delta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k+1}\sin^{1/2}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)}\left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}$$

$$+ \frac{\sin^{1/2}\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)}{16\sqrt{2k+1}\sin\left(\pi\frac{2k+3}{2n}\right)}\left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}} h^2+$$

$$+ o(h^2).$$

При этом метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \widehat{\lambda}_1(\widetilde{x}, \widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}.$$

является оптимальным.

При малых δ можно найти точное значение погрешности оптимального восстановления. При этом оптимальным методом является соответствующая разделенная разность для приближенных значений последовательности. Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n-1$ и выполнено условие*

$$\delta \le \left(\frac{h}{2}\right)^n \left(\frac{(2k+2)(2k+4)\dots(2k+2n)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2n-1)}\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$E(k,n,h,\delta) = \frac{2^k}{h^{k+1/2}}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^{1/2}\delta,$$

а метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = (\Delta_h^k \widetilde{x})_0$$

— оптимальный.

При малых n и k поставленную задачу удается решить при любых δ и h. В случае $n = 1$ при $k = 0$ справедлива

Теорема 12. *Имеет место равенство*

$$E(0,1,h,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta \le h/\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(4\delta^2 - h^2)^{1/4}, & \delta > h/\sqrt{2}. \end{cases}$$

При $\delta \le h/\sqrt{2}$

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_0$$

— *оптимальный метод, а при* $\delta > h/\sqrt{2}$ *метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \frac{h}{\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2}\right)^{|j|} \widetilde{x}_j$$

является оптимальным.

При $n = 2, k = 0$ получаем

Теорема 13. *Имеет место равенство*

$$E(0,2,h,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta \le h^2/\sqrt{6}, \\ \dfrac{(d+1)^{3/4}\sqrt{d}}{2^{5/4}\sqrt{d+2}} h^{3/2}, & \delta > h^2/\sqrt{6}, \end{cases}$$

где d *— решение уравнения*

$$\frac{(d+1)(3d^2 - d + 2)}{d+2} = \frac{16\delta^2}{h^4}$$

При $\delta \le h^2/\sqrt{6}$

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_0$$

— *оптимальный метод, а при* $\delta > h^2/\sqrt{6}$ *метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = -\frac{4}{\sqrt{d^2-1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im} \frac{\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2} \widetilde{x}_j,$$

где

$$\mu = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d+1}}\right)\left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d-1}}\right),$$

— *оптимальный.*

В условиях предыдущей теоремы при $k = 1$ справедлива

Теорема 14. *Имеет место равенство*

$$E(1,2,h,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{h^{3/2}}\delta, & \delta \le h^2/\sqrt{10}, \\ \dfrac{(d+1)^{1/4}\sqrt{d}}{2^{1/4}\sqrt{3d+2}} h^{1/2}, & \delta > h^2/\sqrt{10}, \end{cases}$$

где d *— решение уравнения*

$$\frac{(d+1)(d^2 + d + 2)}{3d+2} = \frac{16\delta^2}{h^4}.$$

При $\delta \le h^2/\sqrt{10}$

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = \frac{\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_0}{h}$$

— оптимальный метод, а при $\delta > h^2/\sqrt{10}$ *метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x}) = -\frac{4}{h\sqrt{d^2-1}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im}\frac{\mu^{|j+1|+1}-\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}\widetilde{x}_j,$$

где

$$\mu = \left(1-\sqrt{\frac{2}{d+1}}\right)\left(1-i\sqrt{\frac{2}{d-1}}\right),$$

является оптимальным.

Публикации

1. Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени // Владикавказский математический журнал, 8, 2006, вып. 1, С. 16–21.

2. Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в d - мерном шаре по неточным исходным данным // XIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование.", IV Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения", Тезисы докладов, Ростов-на-Дону, 2006, С. 20-21.

3. Wedenskaya E. V. Optimal recovery of linear ordinary differential equations system solutions with self-adjoined matrix of constant coefficients and simple eigenvalues // Extremal problems in complex and real analysis, Albany, NY, 2007,52.

4. Osipenko K. U., Wedenskaya E. V. Optimal recovery of solutions of the generalized heat equations in the unit ball from inaccurate data // J. Complexity, 27, 2007, 4-6, 653-661.

5. Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении последовательности, заданной неточно // Труды международной конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум - 2007", Спектральные и эволюционные задачи, 18, (2008), 52-53.

6. Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении последовательности по неточным данным // 3-я международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", Тезисы докладов. М., МФТИ, 2008, 130-132.

7. Введенская Е. В. Об оптимальном восстановлении решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 45(2009), вып. 2, 255-259.

Введенская Е. В.

Восстановление решений параболических уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным данным

Аннотация

В работе рассматриваются:
— Задача оптимального восстановления решения общего эволюционного уравнения и, в частности, обобщенного уравнения теплопроводности в d-мерном шаре.
— Задача восстановления решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей комплексных коэффициентов. Строится семейство оптимальных методов; показывается, что в некоторых случаях можно использовать лишь часть неточно заданной информации, что не увеличит погрешность метода.
— Задача восстановления последовательности и ее разделенных разностей любого порядка по неточной информации о самой последовательности. Строится асимптотика погрешности оптимального восстановления. Отдельно изучается случай малых погрешностей задания исходной информации.
Во всех представленных задачах построены методы оптимального восстановления и вычислены их погрешности.

Vvedenskaya E. V.

Recovery of the solutions of parabolic equations and ordinary differential equations from inaccurate data

Abstract

Recovery problems for the solution of partial differential equations of parabolic type from inaccurate initial information are considered. The problem of optimal recovery of the heat equation solution in d - dimensional ball are investigated. The error of optimal recovery is found and the optimal method is constructed.
The similar problems were considered for the system of ordinary differential equations with the normal matrix of constant coefficients. The family of optimal methods was constructed and the error of optimal recovery was calculated. It was showed, that in some cases only the part of the inaccurate information may be used for the optimal method construction without growth of the error.
The problem of optimal recovery of the sequence given with the error was investigated.
In the all problems the error of optimal recovery is calculated, and optimal methods are constructed.