

Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно

Е. В. Введенская, К. Ю. Осипенко

В работе рассматривается задача восстановления разделенной разности k -го порядка по неточно заданной последовательности, с ограниченной разделенной разностью n -го порядка, $0 \leq k < n$. При решении этой задачи возникает экстремальная задача, аналогичная той, которая в непрерывном случае известна как неравенство Л.В. Тайкова.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Для функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, при всех $0 \leq k \leq n-1$ Л.В. Тайковым [1] было получено точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq K \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}},$$

где

$$K = \left((2k+1) \sin \pi \frac{2k+1}{2n} \right)^{-1/2} \left(\frac{2k+1}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}$$

(точность этого неравенства означает, что константу K нельзя заменить меньшей). Эта задача тесно связана со следующей экстремальной задачей

$$x^{(k)}(0) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1. \quad (1.1)$$

Значение этой задачи по обобщенной теореме С. А. Смоляка (см., например, [2] [3]) равно погрешности оптимального восстановления k -ой производной в нуле по неточно заданной самой функции на соболевском классе $W_2^n(\mathbb{R})$, состоящем из функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$ -ая производная локально абсолютно непрерывна

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00188).

и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. Задачи такого типа рассматривались в работе [4]. Мы рассматриваем дискретный аналог (1.1) и его связь с задачей восстановления неточно заданной последовательности.

Через $\mathcal{L}_{2,h}$, $h > 0$, будем обозначать пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Положим

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} x), \quad k = 2, 3, \dots$$

Через $l_{2,h}^n$ обозначим класс последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $\|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq 1$.

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значения $(\Delta_h^k x)_0$ по неточно заданной последовательности $x \in l_{2,h}^n$, $0 \leq k < n$. Предполагается, что для каждого $x \in l_{2,h}^n$ известна последовательность $\tilde{x} \in \mathcal{L}_{2,h}$ такая, что $\|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq \delta$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m: \mathcal{L}_{2,h} \rightarrow \mathbb{C}$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(k, n, h, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in l_{2,h}^n, \tilde{x} \in \mathcal{L}_{2,h} \\ \|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq \delta}} |(\Delta_h^k x)_0 - m(\tilde{x})|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(k, n, h, \delta) = \inf_{m: \mathcal{L}_{2,h} \rightarrow \mathbb{C}} e(k, n, h, \delta, m).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. При всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq k \leq n - 1$

$$E(k, n, h, \delta) = K + \frac{\sin^{1/2} \pi \frac{2k+1}{2n}}{16\sqrt{2k+1} \sin \pi \frac{2k+3}{2n}} \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}} h^2 + o(h^2).$$

При достаточно малой погрешности в качестве оптимального метода надо брать k -ую разделенную разность от приближенных данных. При этом удается точно вычислить погрешность оптимального восстановления.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 1$ и выполнено условие

$$\delta \leq \left(\frac{h}{2} \right)^n \left(\frac{(2k+2)(2k+4) \dots (2k+2n)}{(2k+1)(2k+3) \dots (2k+2n-1)} \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Тогда

$$E(k, n, h, \delta) = \frac{2^k}{h^{k+1/2}} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^{1/2} \delta,$$

а метод $\hat{m}(\tilde{x}) = (\Delta_h^k \tilde{x})_0$ — оптимальный.

При малых n и k поставленную задачу удается решить при любых δ и h . При $n = 1$ и $k = 0$ имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место равенство*

$$E(0, 1, h, \delta) = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta \leq h/\sqrt{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(4\delta^2 - h^2)^{1/4}, & \delta > h/\sqrt{2}. \end{cases}$$

При $\delta \leq h/\sqrt{2}$ метод $\hat{m}(\tilde{x}) = \tilde{x}_0$ — оптимальный, а при $\delta > h/\sqrt{2}$ метод

$$\hat{m}(\tilde{x}) = \frac{h}{\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2} \right)^{|j|} \tilde{x}_j$$

— оптимальный.

Таким образом, при большой погрешности в исходных данных для наилучшего восстановления значения последовательности надо использовать все приближенные значения, сглаживая их определенным образом.

Аналогичный результат имеет место для $n = 2$ и $k = 0, 1$. В силу теоремы 2 мы формулируем теорему лишь для случая $\delta > h^2/\sqrt{4k+6}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\delta > h^2/\sqrt{4k+6}$. Тогда для $k = 1, 2$*

$$E(k, 2, h, \delta) = \frac{(d_k + 1)^{3/4-k/2} \sqrt{d_k}}{2^{5/4-k} \sqrt{(2k+1)d_k + 2}} h^{3/2-k},$$

где d_k — решение уравнения.

$$\frac{(d_k + 1)((3 - 2k)d_k^2 + (2k - 1)d_k + 2)}{(2k + 1)d_k + 2} = \frac{16\delta^2}{h^4}. \quad (2.2)$$

Метод

$$\hat{m}(\tilde{x}) = -\frac{4}{h\sqrt{d_k^2 - 1}} (\Delta_h^k \nu_k, \tilde{x})_{\mathcal{L}_{2,h}},$$

где

$$(\nu_k)_j = \operatorname{Im} \frac{\mu_k^{|j|+1}}{1 - \mu_k^2}, \quad \mu_k = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d_k + 1}}\right) \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d_k - 1}}\right), \quad (2.3)$$

является оптимальным.

3. Доказательства. Положим для $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $y = \{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}$

$$(x, y)_{\mathcal{L}_{2,h}} = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \bar{y}_j.$$

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 1. *Пусть существуют такие $\hat{\lambda}_1 \geq 0$, $\hat{\lambda}_2 \geq 0$ и $\hat{x} \in l_{2,h}^n$, при которых для всех $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ справедливо тождество*

$$(\Delta_h^k x)_0 = \hat{\lambda}_1 (x, \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}} + \hat{\lambda}_2 (\Delta_h^n x, \Delta_h^n \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}, \quad (3.1)$$

а элемент \hat{x} удовлетворяет условиям $\|\hat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \delta$ и $\|\Delta_h^n \hat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = 1$ при $\hat{\lambda}_2 > 0$ или $\|\Delta_h^n \hat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq 1$ при $\hat{\lambda}_2 = 0$. Тогда метод

$$\hat{m}(\tilde{x}) = \hat{\lambda}_1(\tilde{x}, \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}$$

будет оптимальным и

$$E(k, n, h, \delta) = \hat{\lambda}_1 \delta^2 + \hat{\lambda}_2. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m — произвольный метод восстановления, а $x \in l_{2,h}^n$ такой, что $\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq \delta$. Тогда

$$2|(\Delta_h^k x)_0| = |(\Delta_h^k x)_0 - m(0) - ((\Delta_h^k(-x))_0 - m(0))| \leq 2e(k, n, h, \delta, m)$$

В силу произвольности метода имеем

$$E(k, n, h, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in l_{2,h}^n \\ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leq \delta}} |(\Delta_h^k x)_0| \geq (\Delta_h^k \hat{x})_0 = \hat{\lambda}_1 \delta^2 + \hat{\lambda}_2.$$

С другой стороны, из тождества (3.1) получаем

$$\begin{aligned} |(\Delta_h^k x)_0 - \hat{m}(\tilde{x})| &= |(\Delta_h^k x)_0 - \hat{\lambda}_1(x, \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}} + \hat{\lambda}_1(\tilde{x} - x, \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}| \\ &\leq |\hat{\lambda}_2(\Delta_h^n x, \Delta_h^n \hat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}| + \hat{\lambda}_1 \delta^2 \leq \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 \delta^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (3.2) и оптимальность метода \hat{m} . Лемма доказана.

С каждой последовательностью $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_{2,h}$ свяжем функцию

$$Fx(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{ijt} \in L_2(\mathbb{T}),$$

где \mathbb{T} — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами, а

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Положим

$$(x(\cdot), y(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) \overline{y(t)} dt.$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$(x, y)_{\mathcal{L}_{2,h}} = h(Fx(\cdot), Fy(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Тем самым тождество (3.1) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F(\Delta_h^k x)(t) dt = \frac{\hat{\lambda}_1 h}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} Fx(t) \overline{F\hat{x}(t)} dt + \frac{\hat{\lambda}_2 h}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F(\Delta_h^n x)(t) \overline{F(\Delta_h^n \hat{x})(t)} dt. \quad (3.3)$$

В силу того, что

$$F(\Delta_h x)(t) = \frac{1}{h}(e^{-it} - 1)Fx(t),$$

имеем

$$F(\Delta_h^k x)(t) = \frac{1}{h^k} (e^{-it} - 1)^k Fx(t).$$

Следовательно, равенство (3.3) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi h^k} \int_{\mathbb{T}} (e^{-it} - 1)^k Fx(t) dt &= \frac{\widehat{\lambda}_1 h}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} Fx(t) \overline{F\widehat{x}(t)} dt \\ &\quad + \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi h^{2n-1}} \int_{\mathbb{T}} |e^{it} - 1|^{2n} Fx(t) \overline{F\widehat{x}(t)} dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h^{2n-k-1} (e^{it} - 1)^k}{\widehat{\lambda}_1 h^{2n} + \widehat{\lambda}_2 |e^{it} - 1|^{2n}},$$

а $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ должны быть выбраны из условий (будем пока искать $\widehat{\lambda}_2 > 0$)

$$\begin{aligned} h \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \delta^2, \\ h \|F(\Delta_h^n \widehat{x})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= 1, \end{aligned}$$

которые записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{h^{4n-2k-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|e^{it} - 1|^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n} + \widehat{\lambda}_2 |e^{it} - 1|^{2n})^2} dt &= \delta^2, \\ \frac{h^{2n-2k-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|e^{it} - 1|^{2(n+k)}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n} + \widehat{\lambda}_2 |e^{it} - 1|^{2n})^2} dt &= 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство теоремы 1. Сделав в (3.5) замену $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{4^k h^{4n-2k-1}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k} (1+u^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n} (1+u^2)^n + \widehat{\lambda}_2 4^n u^{2n})^2} du &= \delta^2, \\ \frac{4^{n+k} h^{2n-2k-1}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)} (1+u^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n} (1+u^2)^n + \widehat{\lambda}_2 4^n u^{2n})^2} du &= 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Перейдем теперь к переменной $v = h^{-1}u$. Получим систему

$$\begin{aligned} \frac{4^k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k} (1+h^2 v^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 (1+h^2 v^2)^n + \widehat{\lambda}_2 4^n v^{2n})^2} dv &= \delta^2, \\ \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)} (1+h^2 v^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 (1+h^2 v^2)^n + \widehat{\lambda}_2 4^n v^{2n})^2} dv &= 1. \end{aligned}$$

Положим $b = 4^n \widehat{\lambda}_2 / \widehat{\lambda}_1$. Тогда эта система запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{4^k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k} (1+h^2 v^2)^{2n-k-1}}{((1+h^2 v^2)^n + b v^{2n})^2} dv &= \delta^2 \widehat{\lambda}_1^2, \\ \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)} (1+h^2 v^2)^{n-k-1}}{((1+h^2 v^2)^n + b v^{2n})^2} dv &= \widehat{\lambda}_1^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тем самым для b получаем уравнение

$$\Phi(\tau, b) = 0, \quad (3.8)$$

где $\tau = h^2$, а

$$\Phi(\tau, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}(1 + \tau v^2)^{2n-k-1}}{((1 + \tau v^2)^n + bv^{2n})^2} dv - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}(1 + \tau v^2)^{n-k-1}}{((1 + \tau v^2)^n + bv^{2n})^2} dv.$$

Положим $h = 0$. Тогда

$$\Phi(0, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}}{(1 + bv^{2n})^2} dv - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}}{(1 + bv^{2n})^2} dv.$$

Сделаем замену $u^{2n} = bv^{2n}$, получаем

$$\Phi(0, b) = b^{-\frac{2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1 + u^{2n})^2} du - \delta^2 4^n b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)}}{(1 + u^{2n})^2} du.$$

Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1 + u^{2n})^2} du &= \frac{\pi}{2n^2} (2n - 2k - 1) \sin^{-1} \pi \frac{2k + 1}{2n}, \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(k+n)}}{(1 + u^{2n})^2} du &= \frac{\pi}{2n^2} (2k + 1) \sin^{-1} \pi \frac{2k + 1}{2n}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

которые легко получить, выразив эти интегралы через бета-функцию $B(\cdot, \cdot)$ и применив формулу приведения

$$B(a, 1 - a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Тогда будем иметь

$$\Phi(0, b) = b^{-\frac{2k+1}{2n}} \frac{\pi}{2n^2} \sin^{-1} \pi \frac{2k + 1}{2n} (2n - 2k - 1 - \delta^2 4^n b^{-1} (2k + 1)).$$

Отсюда $\Phi(0, b_0) = 0$, где

$$b_0 = \delta^2 4^n \frac{2k + 1}{2n - 2k - 1}.$$

Для того чтобы применить теорему о неявной функции вычислим $\Phi'_\tau(0, b_0)$ и $\Phi'_b(0, b_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi'_\tau(0, b) &= (2n - k - 1) \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1 + bv^{2n})^2} dv - 2n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1 + bv^{2n})^3} dv \\ &\quad - \delta^2 4^n (n - k - 1) \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1 + bv^{2n})^2} dv + \delta^2 4^n 2n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1 + bv^{2n})^3} dv. \end{aligned}$$

Сделаем ту же замену $u^{2n} = bv^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi'_\tau(0, b) &= (2n - k - 1) b^{-\frac{2k+3}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1 + u^{2n})^2} du - 2n b^{-\frac{2k+3}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1 + u^{2n})^3} du \\ &\quad - \delta^2 4^n (n - k - 1) b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1 + u^{2n})^2} du + \delta^2 4^n 2n b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1 + u^{2n})^3} du. \end{aligned}$$

Аналогично (3.9) можно получить

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^3} du = \frac{\pi}{8n^3} (4n-2k-3)(2n-2k-3) \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3} du = \frac{\pi}{8n^3} (2n-2k-3)(2k+3) \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n}.$$

Таким образом,

$$\Phi'_\tau(0, b) = \frac{\pi}{4n^2} b^{-\frac{2k+3}{2n}} (2n-2k-3) \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n} - \delta^2 4^n \frac{\pi}{4n^2} b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}} (2k+3) \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n}.$$

Отсюда

$$\Phi'_\tau(0, b_0) = -\frac{\pi}{n(2k+1)} b_0^{-\frac{2k+3}{2n}} \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n}.$$

Для $\Phi'_b(0, b)$ имеем

$$\Phi'_b(0, b) = -2 \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k}}{(1+bv^{2n})^3} dv + 2\delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{4n+2k}}{(1+bv^{2n})^3} dv.$$

После замены $u^{2n} = bv^{2n}$ получим

$$\begin{aligned} \Phi'_b(0, b) &= -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k}}{(1+u^{2n})^3} du + 2\delta^2 4^n b^{-\frac{4n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4n+2k}}{(1+u^{2n})^3} du \\ &= -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \frac{\pi(2k+1)}{8n^3} \sin^{-1} \pi \frac{2k+1}{2n} (2n-2k-1 - \delta^2 4^n b^{-1} (2n+2k+1)). \end{aligned}$$

Тем самым

$$\Phi'_b(0, b_0) = \frac{\pi(2n-2k-1)}{2n^2} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \sin^{-1} \pi \frac{2k+1}{2n}.$$

По теореме о неявной функции в достаточно малой окрестности нуля существует функция $b = b(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (3.8). При этом

$$b'(0) = -\frac{\Phi'_\tau(0, b_0)}{\Phi'_b(0, b_0)} = \frac{2n \sin \pi \frac{2k+1}{2n}}{(2n-2k-1)(2k+1) \sin \pi \frac{2k+3}{2n}} \left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b(h) &= \delta^2 4^n \frac{2k+1}{2n-2k-1} \\ &+ \frac{2n \sin \pi \frac{2k+1}{2n}}{(2n-2k-1)(2k+1) \sin \pi \frac{2k+3}{2n}} \left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики $\hat{\lambda}_1$ рассмотрим функцию

$$c(\tau) = \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)} (1+\tau v^2)^{n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2} dv.$$

Имеем

$$\begin{aligned} c(0) &= \frac{4^{n+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}}{(1+b_0 v^{2n})^2} dv = \frac{4^{n+k}}{\pi} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)}}{(1+u^{2n})^2} du \\ &= 4^{n+k} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \frac{2k+1}{2n^2} \sin^{-1} \pi \frac{2k+1}{2n}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} c'(0) &= \frac{4^{n+k}}{\pi} (n-k-1) \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0 v^{2n})^2} dv - \frac{4^{n+k}}{\pi} 2n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0 v^{2n})^3} dv \\ &\quad - \frac{4^{n+k}}{\pi} 2b'(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{4n+2k}}{(1+b_0 v^{2n})^3} dv \\ &= 4^{n+k-1} b_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}} \frac{(2k+1)(2n-2k-5)}{n^2(2n-2k-1)} \sin^{-1} \pi \frac{2k+3}{2n}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 = \sqrt{c(\tau)} &= \sqrt{c(0)} + \frac{c'(0)}{2\sqrt{c(0)}} \tau + o(\tau) = 2^{n+k-1/2} b_0^{-\frac{2n+2k+1}{4n}} \frac{\sqrt{2k+1}}{n} \sin^{-1/2} \pi \frac{2k+1}{2n} \\ &\quad + 2^{n+k-5/2} b_0^{-\frac{2n+2k+5}{4n}} \frac{\sqrt{2k+1}(2n-2k-5)}{n(2n-2k-1)} \frac{\sin^{1/2} \pi \frac{2k+1}{2n}}{\sin \pi \frac{2k+3}{2n}} h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, для погрешности оптимального восстановления имеем

$$\begin{aligned} E(k, n, h, \delta) &= \widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1 \left(\delta^2 + \frac{b}{4^n} \right) \\ &= K \delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}} + \frac{\sin^{1/2} \pi \frac{2k+1}{2n}}{16\sqrt{2k+1} \sin \pi \frac{2k+3}{2n}} \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1} \right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}} h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим теперь $\widehat{\lambda}_2 = 0$. Тогда

$$F\widehat{x}(t) = \frac{(e^{it} - 1)^k}{\widehat{\lambda}_1 h^{k+1}},$$

а $\widehat{\lambda}_1$ должно быть выбрано из условий

$$\begin{aligned} h \|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \delta^2, \\ h \|F(\Delta_h^n \widehat{x})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &\leq 1, \end{aligned}$$

которые записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \widehat{\lambda}_1^2 h^{2k+1}} \int_{\mathbb{T}} |e^{it} - 1|^{2k} dt &= \delta^2, \\ \frac{1}{2\pi \widehat{\lambda}_1^2 h^{2n+2k+1}} \int_{\mathbb{T}} |e^{it} - 1|^{2(n+k)} dt &\leq 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Используя хорошо известную формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \tau \, d\tau = \frac{\pi}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

получаем

$$\int_{\mathbb{T}} |e^{it} - 1|^{2k} dt = 4^k \int_{\mathbb{T}} \sin^{2k} \frac{t}{2} dt = 2\pi 4^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Тем самым условия (3.10) записываются в виде

$$\frac{4^k}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2k+1}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \delta^2,$$

$$\frac{4^{n+k}}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2n+2k+1}} \frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!} \leq 1.$$

Отсюда

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{2^k}{\delta h^{k+1/2}} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^{1/2},$$

а δ должно удовлетворять условию (2.1). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $\delta \leq h/\sqrt{2}$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 2. Будем считать, что $\delta > h/\sqrt{2}$. Система (3.7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + h^2 v^2}{(1 + (h^2 + b)v^2)^2} dv = \delta^2 \widehat{\lambda}_1^2,$$

$$\frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1 + (h^2 + b)v^2)^2} dv = \widehat{\lambda}_1^2. \quad (3.11)$$

После замены $v = (h^2 + b)^{-1/2} u$ имеем (см. (3.9))

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + (h^2 + b)v^2)^2} dv = (h^2 + b)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + u^2)^2} du = \frac{\pi}{2} (h^2 + b)^{-1/2}.$$

Аналогично

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1 + (h^2 + b)v^2)^2} dv = (h^2 + b)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du = \frac{\pi}{2} (h^2 + b)^{-3/2}.$$

Таким образом, из системы (3.11) получаем

$$\frac{1}{2} (h^2 + b)^{-1/2} + \frac{1}{2} h^2 (h^2 + b)^{-3/2} = \delta^2 \widehat{\lambda}_1^2,$$

$$2(h^2 + b)^{-3/2} = \widehat{\lambda}_1^2.$$

Отсюда

$$b = 4\delta^2 - 2h^2, \quad \widehat{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{(4\delta^2 - h^2)^{3/4}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2 - h^2}{\sqrt{2}(4\delta^2 - h^2)^{3/4}}.$$

Следовательно,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h}{\widehat{\lambda}_1 h^2 + 2\widehat{\lambda}_2(1 - \cos t)} = \frac{h(4\delta^2 - h^2)^{3/4}}{\sqrt{2}(2\delta^2 - h^2)} \frac{1}{a - \cos t},$$

где $a = 2\delta^2/(2\delta^2 - h^2)$. Для нахождения коэффициентов Фурье функции $F\widehat{x}(\cdot)$ воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{\frac{1-\mu^2}{2\mu}}{\frac{1+\mu^2}{2\mu} - \cos t}, \quad (3.12)$$

справедливым для любых μ , $0 < |\mu| < 1$. Положив

$$\mu = a - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2},$$

получаем

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{2\delta^2 - h^2}{h\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Таким образом,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Отсюда

$$\widehat{x}_j = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \mu^{|j|}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Здесь нам удобнее будет иметь дело с системой (3.6), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{4^k h^{7-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k} (1+u^2)^{3-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2} du &= \delta^2, \\ \frac{4^{2+k} h^{3-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k} (1+u^2)^{1-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2} du &= 1. \end{aligned}$$

Эта система переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{4^k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k} (1+u^2)^{3-k}}{((1+u^2)^2 + a^2 u^4)^2} du &= h^{1+2k} \delta^2 \widehat{\lambda}_1^2, \\ \frac{4^{2+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k} (1+u^2)^{1-k}}{((1+u^2)^2 + a^2 u^4)^2} du &= h^{5+2k} \widehat{\lambda}_1^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $a = 4h^{-2} \sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$. Положим $c = p + iq$, где

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} - 1}{2(1+a^2)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{2(1+a^2)}}. \quad (3.14)$$

Тогда $c^2 = -(1+ia)^{-1}$ и

$$((1+u^2)^2 + a^2 u^4)^2 = (1+a^2)^2 (u-c)^2 (u+c)^2 (u-\bar{c})^2 (u+\bar{c})^2.$$

Вычислим каждый из интегралов с помощью вычетов (множители 4^k в обоих интегралах учтем потом). В верхней полуплоскости имеется два полюса знаменателя кратности 2: c и $-\bar{c}$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_{1k} &= \frac{1}{\pi(1+a^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\bar{c})^2(u+\bar{c})^2} du \\ &= \frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2c^2(c-\bar{c})^2(c+\bar{c})^2} \left(\frac{2k-1}{c} + \frac{(6-2k)c}{1+c^2} - \frac{2}{c-\bar{c}} - \frac{2}{c+\bar{c}} \right) \\ &\quad + \frac{i\bar{c}^{2k}(1+\bar{c}^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2\bar{c}^2(c-\bar{c})^2(c+\bar{c})^2} \left(-\frac{2k-1}{\bar{c}} - \frac{(6-2k)\bar{c}}{1+\bar{c}^2} - \frac{2}{c-\bar{c}} + \frac{2}{c+\bar{c}} \right). \end{aligned}$$

В силу того, что

$$(c-\bar{c})^2(c+\bar{c})^2 = -\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}, \quad (3.15)$$

имеем

$$\begin{aligned} I_{1k} &= -\frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{8a^2c^2} \left(\frac{(6-2k)c}{1+c^2} + \frac{2k-1}{c} - \frac{4c}{c^2-\bar{c}^2} \right) \\ &\quad - \frac{i\bar{c}^{2k}(1+\bar{c}^2)^{3-k}}{8a^2\bar{c}^2} \left(-\frac{(6-2k)\bar{c}}{1+\bar{c}^2} - \frac{2k-1}{\bar{c}} - \frac{4\bar{c}}{c^2-\bar{c}^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $1+c^2 = -iac^2$, а $1+\bar{c}^2 = ia\bar{c}^2$, получаем

$$I_{1k} = \frac{3-k}{4a^k i^{k+1}} (\bar{c}^3 - (-1)^k c^3) + \frac{(2k-1)a^{1-k}}{8i^k} ((-1)^k c^3 + \bar{c}^3) + \frac{a^{1-k}(\bar{c}^5 - (-1)^k c^5)}{2i^k(c^2 - \bar{c}^2)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{3}{2}q(q^2 - 3p^2) - \frac{a}{4p}(6p^4 - 13p^2q^2 + q^4), \\ I_{11} &= -\frac{p(p^2 - 3q^2)}{a} - \frac{p^4 - 7p^2q^2 + 4q^4}{4q}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения p и q из (3.14), будем иметь

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}} \left(3a^2 - \sqrt{1+a^2} + 5 \right), \\ I_{11} &= \frac{a^2 + \sqrt{1+a^2} + 3}{4\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}. \end{aligned}$$

Вычислим теперь второй интеграл

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{16}{\pi(1+a^2)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\bar{c})^2(u+\bar{c})^2} du \\ &= \frac{8ic^{2+2k}(1+c^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\bar{c})^2(c+\bar{c})^2} \left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2} + \frac{3+2k}{c} - \frac{2}{c-\bar{c}} - \frac{2}{c+\bar{c}} \right) \\ &\quad + \frac{8i\bar{c}^{2+2k}(1+\bar{c}^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\bar{c})^2(c+\bar{c})^2} \left(-\frac{2(1-k)\bar{c}}{1+\bar{c}^2} - \frac{3+2k}{\bar{c}} - \frac{2}{c-\bar{c}} + \frac{2}{c+\bar{c}} \right). \end{aligned}$$

Используя равенство (3.15), получаем

$$I_{2k} = -\frac{2i}{a^2}c^{2+2k}(1+c^2)^{1-k} \left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2} + \frac{3+2k}{c} - \frac{4c}{c^2-\bar{c}^2} \right) - \frac{2i}{a^2}\bar{c}^{2+2k}(1+\bar{c}^2)^{1-k} \left(-\frac{2(1-k)\bar{c}}{1+\bar{c}^2} - \frac{3+2k}{\bar{c}} - \frac{4\bar{c}}{c^2-\bar{c}^2} \right).$$

Учитывая, что $1+c^2 = -iac^2$, а $1+\bar{c}^2 = ia\bar{c}^2$, получаем

$$I_{2k} = \frac{4-4k}{i^{k+1}a^{2+k}}((-1)^k c^3 - \bar{c}^3) - \frac{6+4k}{ik a^{1+k}}((-1)^k c^3 + \bar{c}^3) + \frac{8((-1)^k c^5 - \bar{c}^5)}{ik a^{1+k}(c^2 - \bar{c}^2)}. \quad (3.16)$$

Отсюда

$$I_{20} = \frac{8q}{a^2}(3p^2 - q^2) + \frac{4}{ap}(2p^4 - p^2q^2 + q^4),$$

$$I_{21} = \frac{20q}{a^2}(3p^2 - q^2) + \frac{4}{a^2q}(p^4 - 10p^2q^2 + 5q^4).$$

Подстановка p и q из (3.14) дает

$$I_{20} = \frac{2^{3/2}(2 + \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(1+a^2)^{3/2}},$$

$$I_{21} = \frac{2^{3/2}(2 + 3\sqrt{1+a^2})}{(\sqrt{1+a^2}+1)^{3/2}(1+a^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 0$. Тогда система (3.13) имеет вид

$$\frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2(2(1+a^2))^{3/2}} \left(3a^2 - \sqrt{1+a^2} + 5 \right) = h\delta^2 \hat{\lambda}_1^2,$$

$$\frac{8(2 + \sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(2(1+a^2))^{3/2}} = h^5 \hat{\lambda}_1^2.$$

Положив $d = \sqrt{a^2+1}$, получаем для d уравнение (2.2) при $k = 0$

$$\frac{(d+1)(3d^2-d+2)}{d+2} = \frac{16\delta^2}{h^4}.$$

Нетрудно показать, что это уравнение при $d > 1$ имеет единственное решение для всех $\delta > h^2/\sqrt{6}$ (при желании его можно явно найти, пользуясь формулами для корней кубического уравнения). Для $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ получаем

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{2^{3/4}(2+d)^{1/2}}{(d+1)^{1/4}d^{3/2}h^{5/2}},$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{a^2 h^4 \hat{\lambda}_1}{16} = \frac{(d^2-1)h^4 \hat{\lambda}_1}{16}.$$

Следовательно, при $\delta > h^2/\sqrt{6}$

$$E(0, 2, h, \delta) = \widehat{\lambda}_1 \delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1 \left(\delta^2 + \frac{(d^2 - 1)h^4}{16} \right) = \frac{(d + 1)^{3/4} \sqrt{d}}{2^{5/4} \sqrt{d + 2}} h^{3/2}.$$

Построим теперь оптимальный метод восстановления x_0 . Имеем

$$\begin{aligned} F\widehat{x}(t) &= \frac{h^3}{\widehat{\lambda}_1 h^4 + 4\widehat{\lambda}_2 (1 - \cos t)^2} = \frac{h^3}{4\widehat{\lambda}_2} \frac{1}{\lambda^2 + (1 - \cos t)^2} \\ &= \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2} \left(\frac{1}{1 + i\lambda - \cos t} - \frac{1}{1 - i\lambda - \cos t} \right), \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{2} \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_2}} = \frac{2}{\sqrt{d^2 - 1}}.$$

Выберем $|\mu| < 1$ из условия

$$\frac{1 + \mu^2}{2\mu} = 1 + i\lambda.$$

Получим

$$\mu = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d + 1}} \right) \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d - 1}} \right).$$

Из (3.12) имеем

$$\frac{1}{1 + i\lambda - \cos t} - \frac{1}{1 - i\lambda - \cos t} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2\mu}{1 - \mu^2} \mu^{|j|} - \frac{2\bar{\mu}}{1 - \bar{\mu}^2} \bar{\mu}^{|j|} \right) e^{ijt}.$$

Поэтому

$$\widehat{x}_j = \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2} \left(\frac{2\mu}{1 - \mu^2} \mu^{|j|} - \frac{2\bar{\mu}}{1 - \bar{\mu}^2} \bar{\mu}^{|j|} \right) = -\frac{4}{h\sqrt{d^2 - 1}\widehat{\lambda}_1} \operatorname{Im} \frac{\mu^{|j|+1}}{1 - \mu^2}.$$

Случай $k = 1$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Тайков, “Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования”, *Матем. заметки*, **4:2** (1968), 233–238.
- [2] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.
- [3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50:6** (1991), 85–93.
- [4] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье”, *Матем. сб.*, **195:10** (2004), 67–82.

Е. В. Введенская

МАТИ, г. Москва

*E-mail: zayatslena@yahoo.com***К. Ю. Осипенко**

МАТИ, г. Москва, ЮМН ВНЦ РАН, г. Владикавказ

E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило

17.11.2010

Исправленный

вариант

00.00.2010