ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Н. Д. ВЫСК

Рассматривается волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = f(x),$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Предполагается, что что $f(\cdot) \in W_2^N([0,\pi])$, где

$$W_2^n([0,\pi]) = \{\, f(\cdot) \in L_2([0,\pi]) : f^{(n-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [0,\pi], \\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \le 1 \,\}.$$

Ставится задача поиска оптимального метода восстановления решения волнового уравнения в момент времени $T > 0$ в предположении, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1, \dots, y_N$, причем

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j(f) - y_j|^2 \le \delta^2, \quad \delta > 0.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), \delta, \varphi) \\ = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N \\ \sum_{j=1}^N |a_j(f)-y_j|^2 \le \delta^2}} \|u(\cdot,T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}.$$

Величина

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), \delta, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Далее рассматривается более общая задача оптимального восстановления, к которой сводится поставленная задача. Пусть оператор $Q\colon X \to l_2$ задан равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \dots),\ j \in \mathbb{N},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Ставится задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \dots, x_N$, где $x \in W$,

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Считаем, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ такой, что

$$\|I_N x - y\|_{l_2^N} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} \le \delta$$

(здесь $I_N x = (x_1, \dots, x_N)$). В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_2^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in l_2^N \\ \|I_N x - y\|_{l_2^N} \le \delta}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_2^N \to l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_2^N.

Найдены оптимальный метод восстановления и погрешность оптимального восстановления. Полученный результат применяется к решению задачи оптимального восстановления решения волнового уравнения.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва