

**ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ
НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ, ЗАДАНЫМ С
ПОГРЕШНОСТЬЮ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ**

Н. Д. ВЫСК

МОСКВА, МАТИ-РГТУ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО

VYSK@YANDEX.RU, 8-916-973-05-78

Рассматривается волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что $f(\cdot) \in W_2^n([0, \pi])$, где

$$W_2^n([0, \pi]) = \{ f(\cdot) \in L_2([0, \pi]) : f^{(n-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [0, \pi], \\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])} \leq 1 \}.$$

Ставится задача поиска оптимального метода восстановления решения волнового уравнения в момент времени $T > 0$ в предположении, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ y_1, \dots, y_N , причем

$$(1) \quad |a_j(f) - y_j| \leq \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные операторы $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2([0, \pi])$. Погрешностью восстановления для данного метода φ называется величина

$$\begin{aligned} e(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N, \varphi) \\ = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n([0, \pi]), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N \\ |a_j(f) - y_j| \leq \delta_j, j=1, \dots, N}} \|u(\cdot, T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0, \pi])}. \end{aligned}$$

Величина

$$E(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2([0, \pi])} e(T, W_2^n([0, \pi]), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Далее рассматривается более общая задача оптимального восстановления, к которой сводится поставленная задача. Пусть оператор $Q: X \rightarrow l_\infty$ задан равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \dots), \quad j \in \mathbb{N},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\|_X = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j| < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0, j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$. Ставится задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент x_1, \dots, x_N , где $x \in W$,

$$W = \{ x \in X : \|x\|_X \leq 1 \}.$$

Считаем, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi: l_\infty^N \rightarrow l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q, W, I_N, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in l_\infty^N \\ |x_j - y_j| \leq \delta_j, j=1, \dots, N}} \|Qx - \varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$, $I_N x = (x_1, \dots, x_N)$). Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$(2) \quad E(Q, W, I_N, \delta) = \inf_{\varphi: l_\infty^N \rightarrow l_2} e(Q, W, I_N, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N , заданной с погрешностью в норме l_∞^N .

Найдены оптимальный метод восстановления и погрешность оптимального восстановления. Полученный результат применяется к решению задачи оптимального восстановления решения волнового уравнения.