О РЕШЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕТОЧНО ЗАДАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАЮЩЕЙ НАЧАЛЬНУЮ ФОРМУ СТРУНЫ

Н. Д. ВЫСК

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения волнового уравнения по значениям коэффициентов Фурье функции, задающей начальную форму струны, заданным с погрешностью в равномерной норме. Приводится решение более общей задачи восстановления оператора, определенного на весовом пространстве векторов из l_2, по приближенным значениям координат этих векторов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение с нулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Как известно, точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \cos jt \sin jx, \tag{2}$$

где

$$a_j(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin jx \, dx$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Предположим, что $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, где

$$W_2^n([0,\pi]) = \{\, f(\cdot) \in L_2([0,\pi]) : f^{(n-1)}(\cdot) \text{ абс. непр. на } [0,\pi], \\ \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} \le 1 \,\},$$

а

$$\|g(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |g(x)|^2 \, dx}.$$

Будем считать, что нам известны приближенные значения первых N коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ $y_1, \dots, y_N$, причем

$$|a_j(f) - y_j| \le \delta_j, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, ..., N. \tag{3}$$

Поставим задачу поиска оптимального метода восстановления решения задачи (2) в момент времени T на классе $W_2^n([0,\pi])$ по информационному оператору F_δ^N $(\delta = \delta_1, ..., \delta_N)$, который каждой функции $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$ сопоставляет множество векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$, удовлетворяющих условию (3).

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])$. *Погрешностью восстановления* для данного метода φ назовем величину

$$e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n([0,\pi]),\ y=(y_1,\dots,y)\in\mathbb{R}^N \\ |a_j(f)-y_j|\le\delta_j,\ j=1,\dots,N}} \|u(\cdot,T) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2([0,\pi])}.$$

Величина

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2([0,\pi])} e(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N, \varphi)$$

называется *погрешностью оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.*

Рассмотрим более общую задачу оптимального восстановления оператора $Q\colon X \to l_\infty$, заданного равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \dots),\ j \in \mathbb{N},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, а

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\|_X = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j| < \infty \right\},$$

$\nu_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $\mu_j = \eta_j^2$ и будем предполагать, что $\mu_j/\nu_j \to 0$ при $j \to \infty$. Тогда при всех $x \in X$ $Qx \in l_2$. Нас интересует задача восстановления оператора Q по приближенным значениям первых N компонент $x_1, \dots, x_N$.

Положим

$$W = \{\, x \in X : \|x\|_X \le 1 \,\}.$$

Будем считать, что для каждого $x \in W$ нам известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$ такой, что

$$|x_j - y_j| \le \delta_j, \quad j = 1, ..., N.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon l_\infty^N \to l_2$. Погрешность восстановления для данного метода φ определяется равенством

$$e(Q,W,I_N,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W,\ y\in l_\infty^N\\ |x_j-y_j|\le\delta_j,\ j=1,\dots,N}}\|Qx-\varphi(y)\|_{l_2}$$

(здесь $\delta=(\delta_1,...,\delta_N), I_Nx=(x_1,\dots,x_N)$).

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\inf_{\varphi:\, l_\infty^N\to l_2}e(Q,W,I_N,\delta,\varphi), \tag{4}$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления оператора Q на классе W по информации I_N, заданной с погрешностью в норме l_∞^N.

Спучай, когда коэффициенты Фурье заданы с погрешностью в норме l_2^N, как для задачи (1), так и для задачи (4), исследовался в работе [1].

2. Основные результаты

Пусть ν_j монотонно возрастает,

$$\lim_{j\to+\infty}\nu_j=+\infty,\quad \lim_{j\to+\infty}\mu_j/\nu_j=0.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\mu_1}{\nu_1}\ge\frac{\mu_2}{\nu_2}\ge...\ge\frac{\mu_N}{\nu_N}$$

(этого можно добиться соответствующей перенумеровкой). Пусть $q>N$ таково, что

$$\frac{\mu_q}{\nu_q}=\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}.$$

Если $\nu_1\delta_1<1$ и $\dfrac{\mu_1}{\nu_1}>\dfrac{\mu_q}{\nu_q}$,

положим

$$p_0=p_0(\delta)=\max\left\{p:\sum_{j=1}^{p}\nu_j\delta_j^2<1,\ \frac{\mu_p}{\nu_p}>\frac{\mu_q}{\nu_q},\ 1\le p\le N\right\},$$

в противном случае считаем, что $p_0=0$.

Положим

$$q_0=\begin{cases} q, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}\ge\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}\\[2mm] p_0+1, & \dfrac{\mu_q}{\nu_q}<\dfrac{\mu_{p_0+1}}{\nu_{p_0+1}}.\end{cases}$$

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$E(Q,W,I_N,\delta)=\sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}+\sum_{j=1}^{p_0}\left(\mu_j-\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right)\delta_j^2}, \tag{5}$$

при этом метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{p_0} \eta_j \left(1 - \frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j}\right) y_j e_j, \tag{6}$$

где e_j, $j = 1, 2, \ldots,$ *— стандартный базис в* l_2

$$(e_j)_k = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

является оптимальным.

Вернемся к задаче оптимального восстановления решения волнового уравнения. Если $f(\cdot) \in W_2^n([0,\pi])$, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \sin jx,$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n} a_j^2(f) \leq 1,$$

т.е. $\nu_j = j^{2n}$. Из (2) вытекает, что $\mu_j = \cos^2 jT$. Соответственно $q > N$ таково, что

$$\frac{\cos^2 qT}{q^{2n}} = \max_{j>N} \frac{\cos^2 jT}{j^{2n}}.$$

Тогда в случае, если $\delta_1 < 1$ и $\cos^2 T > \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}}$,

$$p_0 = p_0(\delta) = \max\left\{ p : \sum_{j=1}^{p} j^{2n} \delta_j^2 < 1,\ \frac{\cos^2 pT}{p^{2n}} > \frac{\cos^2 qT}{q^{2n}},\ 1 \leq p \leq N \right\},$$

иначе $p_0 = 0$.

Соответственно

$$q_0 = \begin{cases} q, & \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}} \geq \dfrac{\cos^2 (p_0+1)T}{(p_0+1)^{2n}} \\[2ex] p_0 + 1, & \dfrac{\cos^2 qT}{q^{2n}} < \dfrac{\cos^2 (p_0+1)T}{(p_0+1)^{2n}}. \end{cases}$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$E(T, W_2^n([0,\pi]), F_\delta^N) = \sqrt{\frac{\cos^2 q_0 T}{q_0^2} + \sum_{j=1}^{p_0} \left(\cos^2 jT - \frac{\cos^2 q_0 T}{q_0^2} j^2\right) \delta_j^2},$$

при этом метод

$$u(x,T) \approx \sum_{j=1}^{p_0} \left(1 - \frac{j^2 \cos^2 q_0 T}{q_0^2 \cos^2 jT}\right) y_j \cos jT \sin jx$$

является оптимальным.

3. Доказательство

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j |x_j|^2 \to \max, \quad |x_j|^2 \le \delta_j^2, \quad j = 1, ..., N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1.$$

Положим $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{N}$, и перепишем эту задачу так:

(7)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j \to \max, \quad u_j \le \delta_j^2, \quad j = 1, ..., N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j u_j \le 1, \quad u_j \ge 0.$$

Введем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda, \lambda_1, ..., \lambda_N) = \sum_{j=1}^{N} (-\mu_j + \lambda_j + \lambda \nu_j) u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} (-\mu_j + \lambda \nu_j) u_j,$$

где $u = \{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Из работы [2] (см. также [3]) вытекает, что если найдутся такие $\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N \ge 0$, что для допустимой в задаче (7) последовательности $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_j \ge 0} \mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = \mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \left(\widehat{u}_j - \delta_j^2\right) = 0, \quad \widehat{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \widehat{u}_j - 1\right) = 0,$$

то $\widehat{u}$ — решение задачи (7), а ее значение равно

$$\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \widehat{\lambda}.$$

Если при этом для всех $y \in l_\infty^N$ существует решение x_y экстремальной задачи

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2 + \widehat{\lambda} \|x\|_X^2 \to \min, \quad x \in X,$$

то

$$(9) \qquad E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 + \widehat{\lambda}},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y) = Qx_y$$

является оптимальным.

Задача (8) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\widehat{\lambda}_j (x_j - y_j)^2 + \widehat{\lambda} \nu_j x_j^2 \right) + \widehat{\lambda} \sum_{j=N+1}^{\infty} \nu_j x_j^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Нетрудно убедиться, что ее решение есть

$$x_y = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda}\nu_j} y_j e_j.$$

Поэтому достаточно найти $\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N \geq 0$ и допустимую в (7) последовательность $\widehat{u} = \{\widehat{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которых будут выполнены условия (a) и (b). При этом метод

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j \frac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda}_j + \widehat{\lambda}\nu_j} y_j e_j \tag{10}$$

будет оптимальным.

Предположим, что $p_0 > 0$. Положим $\widehat{\lambda} = \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{\lambda}_j = \mu_j - \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j$, $j = 1, ..., p_0$, $\widehat{\lambda}_j = 0$, $p_0 < j \leq N$.

$$\widehat{u}_j = \begin{cases} \delta_j^2, & j = 1, ..., p_0, \\ \dfrac{1 - \sum_{j=1}^{p_0} \nu_j \delta_j^2}{\nu_{q_0}}, & j = q_0, \\ 0, & j > p_0, \ j \neq q_0. \end{cases}$$

Легко проверить, что последовательность $\widehat{u}_j$ — допустимая и выполнены условия (b). При этом

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = \sum_{j=p_0+1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}} \nu_j \right) u_j \geq 0,$$

так как в силу выбора q_0

$$\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}} \geq \frac{\mu_j}{\nu_j}, \quad j > p_0.$$

Поскольку $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = 0$, условие (a) выполнено.

Подставляя $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N$ в (9) и (10), получаем погрешность оптимального восстановления и оптимальность метода

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{p_0} \eta_j \left(1 - \frac{\mu_{q_0}\nu_j}{\nu_{q_0}\mu_j} \right) y_j e_j.$$

Пусть $p_0 = 0$. При этом либо $\nu_1\delta_1^2 \geq 1$, либо $\dfrac{\mu_1}{\nu_1} \geq \dfrac{\mu_q}{\nu_q}$. В обоих случаях положим $\widehat{\lambda} = \dfrac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{\lambda}_j = 0$, $j = 1, ..., N$, $\widehat{u}_{q_0} = \dfrac{1}{\nu_{q_0}}$, $\widehat{u}_j = 0$, $j \neq q_0$. Тогда последовательность $\widehat{u}_j$ — допустимая,

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\mu_j + \frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}\nu_j\right) u_j =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \left(\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}} - \frac{\mu_j}{\nu_j}\right) u_j \geq 0$$

в силу выбора q_0, а $\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_1, ..., \widehat{\lambda}_N) = 0$, то есть условие (a) выполнено. Условия (b) также очевидным образом выполнены. При этом из (9) и (10) следует, что

$$E(Q, W, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_{q_0}}{\nu_{q_0}}},$$

а метод $\widehat{\varphi}(y) = 0$ — оптимальный.

$\square$

Список литературы

[1] *Выск Н. Д., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. 2006 (в печати).

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[3] *Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева // Матем. сб. 2006. Т. 197. №3. С. 15–34.