

Задача 1

Решить уравнение

$$xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Задача 5

Решить уравнение

$$2(x + y) dy + (3x + 3y - 1) dx = 0,$$

$$y(0) = 2.$$

Задача 2

Решить уравнение

$$(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) dx + 4xy(x^2 + y^2) dy = 0,$$

$$y(1) = 0.$$

Задача 6

Решить уравнение

$$(x - y + 4) dy + (x + y - 2) dx = 0.$$

Задача 3

Решить уравнение

$$y' = e^{x+y} + e^{x-y};$$

$$y(0) = 0.$$

Задача 7

Решить уравнение

$$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x$$

$$y(0) = \frac{1}{3}.$$

Задача 4

Решить уравнение

$$\frac{x dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Задача 8

Решить уравнение

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

Задача 9

Решить уравнение

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

Задача 13

Решить уравнение

$$y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}.$$

Задача 10

Решить уравнение

$$xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right).$$

Задача 14

Решить уравнение

$$y'' - y = x \cos^2 x.$$

Задача 11

Решить уравнение

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$$

Задача 15

Решить уравнение

$$y'' + 4y = \sin 2x + 1.$$

Задача 12

Решить уравнение

$$1 + y'^2 = yy''.$$

Задача 16

Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1.$$

Задача 17

Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

Задача 21

Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = x \sin 2x.$$

Задача 18

Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x} \sin x.$$

Задача 22

Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2 \cos 3x - x \sin 3x).$$

Задача 19

Решить уравнение

$$y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}.$$

Задача 23

Решить уравнение

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$$

Задача 20

Решить уравнение

$$y'' - 4y' = 2 \cos^2 4x.$$

Задача 24

Решить уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x.$$

Задача 25

Найти координаты центра тяжести полуокружности

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Задача 29

Вычислить площадь части поверхности

$$z = \frac{1}{4}xy,$$

расположенной внутри поверхности

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Задача 26

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy.$$

Задача 30

Вычислить координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линией

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осями координат ($x \geq 0, y \geq 0$).

Задача 27

Перейти к сферической или цилиндрической системе координат в интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz;$$

V — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2(x^2 - y^2); x \geq 0$.

Задача 31

Найти массу шара

$$(z - R)^2 + x^2 + y^2 \leq R^2,$$

если плотность пропорциональна расстоянию от начала координат с коэффициентом пропорциональности k .

Задача 28

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2, \\ z &= 0, \\ y^2 &= 2x + 1, \\ x - y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Задача 32

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy.$$

Задача 33

Записать в цилиндрических или сферических координатах интеграл

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\x^2 + y^2 &= 3z, \quad z \geq 0.\end{aligned}$$

Задача 37

Вычислить

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1},$$

если D ограничена линиями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$.

Задача 34

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

Задача 38

Вычислить

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

если D ограничена линией

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Задача 35

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx.$$

Задача 39

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4.$$

Задача 36

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$$

Задача 40

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x = 2y^2, \quad x + 2y + z = 4, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Задача 41

Найти площадь части поверхности конуса

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

заключенной внутри цилиндра

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

Задача 45

Вычислить

$$\int_C x^2 y dy - y^2 x dx,$$

если C :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y = \sqrt{\sin t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Задача 42

Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 = 2z$, отсекаемой плоскостями

$$x - 2y = 0, \quad y = 2x, \quad x = 2\sqrt{2}.$$

Задача 46

Найти массу дуги кривой

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{3} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для плотности $\gamma = \sqrt{2y}$.

Задача 43

Вычислить

$$J = \iiint_V x^2 dx dy dz,$$

$$V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Задача 47

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy,$$

если путь от $A(2, 2)$ до $B(4, 5)$ — отрезок прямой.

Задача 44

Вычислить

$$J = \iiint_V z dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 2.$$

Задача 48

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_C (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

если C — ломаная OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 2)$.

Задача 49

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_C 2x dy - 3y dx,$$

если C — контур треугольника с вершинами $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Задача 50

Вычислить

$$\int_C -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

если C — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Задача 51

Вычислить

$$\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

σ — внешняя сторона поверхности цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (-h \leq z \leq h).$$

Задача 52

Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника S , вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

Задача 53

Найти поток вектора

$$\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

если $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$.

Задача 54

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$$

по контуру треугольника ABC : $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Задача 55

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

по окружности

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Задача 56

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{u} = (x + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + x\vec{k}$$

по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 57

Найти радиус сходимости и исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}.$$

Задача 58

Разложить в степенной ряд

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Задача 59

Разложить в степенной ряд

$$f(x) = \frac{x}{4 + x^2}.$$

Задача 60

Найти массу первого витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, где $a > b > 0$, если плотность в каждой точке равна квадрату длины радиус-вектора этой точки.

Задача 61

Вычислить

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy,$$

где

$$D: \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \leq x\sqrt{3}, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Задача 62

Вычислить

$$\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz,$$

где S — внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Задача 63

Вычислить

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

Задача 64

Найти координаты центра масс однородного тела ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $z = 2$.

Задача 65

Вычислить работу силы $\vec{F} = (x, y, x + y + z)$ вдоль прямой от точки $(0, 1, 1)$ до точки $(1, 2, 2)$.

Задача 69

Вычислить объем шарового сектора радиуса R с углом 2α при вершине.

Задача 66

Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D ограничена линиями $x = y^2$, $y = x^2$.

Задача 70

Вычислить
$$\iint_D x^3 y dx dy,$$
 где $D: y = x^2, y = 2x$.

Задача 67

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = xy$, $x + y = 1$.

Задача 71

Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x^2, y^2, 0)$ через часть сферы, лежащую в первом октанте.

Задача 68

Вычислить массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащей в первом октанте, если поверхностная плотность равна $2xy$.

Задача 72

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = x + 2$.

Задача 73

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(3n-1)!}$$

Задача 77

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^n$$

Задача 74

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n - \ln n}$$

Задача 78

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! (x+4)^n}{(n+1)^n}$$

Задача 75

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Задача 79

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{3}} (x-1)^n}{n!}$$

Задача 76

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+7)5^n}$$

Задача 80

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

Задача 81

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n.$$

Задача 85

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Задача 82

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Задача 86

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+5n}.$$

Задача 83

Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}.$$

Задача 87

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}.$$

Задача 84

Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}.$$

Задача 88

Разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Задача 89

Разложить в ряд Фурье по косинусам

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Задача 90

Разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$

$$f(x) = x.$$