Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ИГР

Игры с природой

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

1-я часть

Составитель: Дадашов Ч.М.

Москва 2016

Пособие предназначено для студентов и аспирантов экономических специальностей, изучающих курс «Информатика», а также для практических и научных работников, занимающихся вопросами принятия рациональных решений в экономике. Рассмотрены основные операторы языка Паскаль и их использование при решении задач теории игр.

Основные понятия:

Антагонистические (выигрыш одного игрока равен проигрышу другого) игры (ситуации), которые повторяются многократно в экономике, политике, военных учениях, арбитражных спорах и т.д. находят свое решение в методах теории игр.

Игра – это построение упрощенно формализованной модели конфликта.

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели в конфликтных ситуациях.

Определения:

1. **Стратегия игрока – это совокупность правил, определяющих последовательность действий.**
2. **Чистая стратегия: решения игроков неслучайные; Смешанная стратегия: выбор игрока случайная величина.**
3. **Если выигрыш первого игрока равен проигрышу второго, то игра называется с седловой точкой в чистых стратегиях. Это определение еще можно выразить с помощью математических символов: если функция выигрыша F(x,y) задана на декартовом произведении двух множеств X×Y и точка $(x^*,y^*) \in X \times Y$, для которой** $F(x^*,y^*) = \max_{x \in X} F(x,y^*) = \min_{y \in Y} F(x^*,y)$, **то (x^*,y^*) называется седловой точкой;**
4. **Оптимальная стратегия: максимально возможный средний выигрыш.**

Для понимания о том, что такое игра, можно привести следующий пример:

Пример 1. Два игрока одновременно и независимо друг от друга записывают на листе бумаги натуральное число. Первый (А) игрок выигрывает у второго (В) игрока, если эти числа имеют одинаковую четность (т.е. четное-четное или нечетное-нечетное), если же они имеют разную четность, то выигрывает игрок В.

Теоремы:

1. ***Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, значит, имеет решение в чистых стратегиях.***

2. ***Основная теорема теории игр: Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.***

Игры с природой – математические модели, для которых выбор решения зависит об объективной действительности. Например, покупательский спрос, состояние природы и т.д.

«Природа» – это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в данном конфликте.

Для выбора оптимальной стратегии «Игры с природой» используются несколько критериев. Ниже мы подробно рассмотрим эти критерии и составим программы решения данной матричной игры на языке PASCAL. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называется платежной матрицей игры. Каждая строка $A_{i,}$ i=1..m, называется стратегией игрока(первого), а каждый столбец $П_j$ (j=1..n) стратегия природы:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & \dots & П_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Оптимальной стратегией является та, на которую укажет большинство критериев.

Рассмотрим еще один пример, связанный с «настроением» природы.

Пример 2. Директор кафе запланировал на 8 марта расширение ассортиментного перечня напитков в меню в зависимости от погодных условий. Изучив статистику температурного режима за последние 50 лет на 8 марта, пришел к выводу, что имеются четыре состояния природы:

1) теплый женский день (температура от 5 до 15 градусов), с частотой (статистическая вероятность) 15 /50;
2) жаркий женский день (более 15 градусов), с частотой 5/50;
3) холодный женский день (от -5 до +5 градусов), с частотой 15/50;
4) морозный женский день (температура погоды ниже -5 градусов), с частотой 15/50.

Исходя из своего анализа, выбрал для себя следующие стратегии:

1) расширить ассортимент фруктовых коктейлей;
2) расширить ассортимент мороженого;
3) расширить ассортимент разных сортов чая;
4) расширить ассортимент согревающих коктейлей;

Посчитав предполагаемый дополнительный доход от продажи, директор кафе составил следующую платёжную матрицу:

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 13 & 11 \\ 20 & 50 & 15 & 5 \\ 16 & 9 & 27 & 45 \\ 18 & 8 & 33 & 66 \end{bmatrix},$$

где строки соответствуют стратегиям директора кафе (первого игрока А), а столбцы – состояниям природы (второго игрока В).

Найти решение игры, заданной матрицей, т.е. найти оптимальную стратегию из 4-х заданных стратегий первого игрока, при выборе которой кафе получит максимальный доход.

Для решения подобных задач нам помогут нижеприведенные критерия. которые будут подробно рассмотрены, и для каждого из них будет прилагаться подпрограмма на языке Паскаль.

Критерий №1. Максиминная стратегия (Критерий Вальда)

Критерий Вальда обеспечивает максимизацию минимального выигрыша:

$$\max_i(\min_j a_{ij})$$

Критерий ориентирует на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно. Критерий Вальда оправдан, если:

1) Состояние природы будет неблагоприятным;

2) Критерий Вальда (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов.

Решение задачи с выбором стратегии по критерию Вальда запрограммировано на языке Паскаль. В программе параметр ‘k’ определяет номер стратегии, который должен выбрать первый игрок (человек) для получения максимального дохода. Ниже приведен фрагмент программы в виде подпрограммы на PASCAL.

```
PROCEDURE  VALD(…; VAR …);

 for i:=1 to 4 do begin;
 min:=a[i,1]; c[i]:=min; k:=i;
 for j:=2 to 4 do
 if min>a[i,j] then begin
                               min:=a[i,j];
                               c[i]:=min;
                               k:=i;
                               end; end;


for i:=1 to 4 do    write(c[i]:4);
 max:=c[1]; k:=1;
             for j:=2 to 3 do
             if  max<c[j] then begin
max:=c[j];
             maxmin:=max; k:=j;
             end;
```

```
write('  Критерий Вальда {',k,'}');
```

Критерий № 2. Критерий максимума

Критерий является оптимистическим, предполагает, что природа всегда будет благоприятна для первого игрока. Критерий максимума выбирается из следующего условия:

$$\max_i(\max_j a_{ij})$$

В ниже приведенной подпрограмме на PASCAL параметр ‘q’ указывает на нужный номер стратегии.

```
PROCEDURE  MAXIMUM (…; VAR …);

 for i:=1 to 4 do begin
 max:=a[i,1]; t[i]:=max; q:=i;
 for j:=2 to 4 do
 if max<a[i,j] then begin
                 max:=a[i,j];
                 t[i]:=max;
                 q:=i;
                 end; end;


for i:=1 to 4 do    write(t[i]:4);
 max:=t[1]; q:=1;
          for j:=2 to 3 do
          if  max<t[j] then begin max:=t[j];
          maxmin:=max; q:=j;
          end;

write('  Критерий максимума {',q,'}');
```

Критерий № 3. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица (Hurwicz criterion) - это компромиссный способ принятия решений, так как учитывает как наихудшего, так и наилучшего состояния природы. Иными словами критерий Гурвица есть линейная комбинация минимального и максимального выигрыша – т.е. промежуточная позиция.

$$\max_i(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}),$$

где 0 < α < 1 - степень оптимизма.

В приведенной ниже подпрограмме массивы c[i] (PROCEDURE VALD)и t[i] (PROCEDURE MAXIMUM) находятся из 1-го и 2-го критериев соответственно при α =1/2. Значение α можно еще задать как случайную величину следующим образом: α:=RANDOM. Параметр ‘Gur’ указывает на нужный номер стратегии.

```
PROCEDURE  GURVITS (…; VAR …);

for i:=1 to 4 do begin w[i]:=(c[i]+t[i])/2; write(w[i]:4:1) end;

Gurvits:=w[1];
Gur:=1;
for i:=1 to 4 do
if Gurvits<=w[i] then begin
Gurvits:=w[i];
Gur:=i; end;
write('  Критерий Гурвица {',Gur,'}'); writeln;
```

Критерий № 4. Критерий Севиджа

Суть критерия заключается в нахождении минимального риска, который не допустит высоких потерь. Элементы матрицы рисков указывают на размер возможных убытков, если не выбрать наилучшую стратегию. Матрица рисков:

$$R = \left(r_{ij}\right)_{m\times n}, \text{ где } r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

$\max_i a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце матрицы A.

Оптимальная стратегия для данного критерия находится из минимаксной стратегии :

$$\min_i(\max_j r_{ij}).$$

Подпрограмма нахождения минимаксной стратегии для матрицы рисков, где параметр «w» определяет ее номер:

```
PROCEDURE  SEVIJ (…; VAR …);

 for j:=1 to 4 do begin
 max:=a[1,j]; t[j]:=max; k:=j;
 for i:=2 to 4 do
 if max<a[i,j] then begin
                max:=a[i,j];
                t[j]:=max;
                k:=j;
                end; end;   writeln;    writeln;
for i:=1 to 4 do    write(t[i]:4);    writeln;  writeln;
for i:=1 to n do
for j:=1 to m do

 R[j,i]:= t[i]-a[j,i];     writeln;


      for i:=1 to n do  begin
for j:=1 to m do  begin

   write(R[i,j]:4);    end; writeln end;   writeln;
```

```
 for i:=1 to 4 do begin
max:=R[i,1]; t[i]:=max; w:=i;
for j:=2 to 4 do
if max<R[i,j] then begin
                max:=R[i,j];
                t[i]:=max;
                w:=i;
                end; end;


for i:=1 to 4 do    write(t[i]:4);
 min:=t[1]; w:=1;
           for j:=2 to 3 do
           if  min>t[j] then begin min:=t[j];
           maxmin:=min; w:=j;
           end;


write('  Критерий Сэвиджа {',w,'}');
```

Критерий № 5.   Критерий Лапласа

В смешанных стратегиях выигрыш первого игрока равен:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j ,$$

где y(y_1, y_2, …, y_n) – вектор, координаты которого есть вероятности появления состояния природы и поэтому $\sum y_j = 1$. Если все состояния природы являются равновероятными (принцип недостаточного основания Лапласа), то $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1/n$.

Выражение

$$\max_i \sum_j p_j a_{ij}$$

называется математическим ожиданием выигрыша, которое определяет номер оптимальной стратегии, для которой универсальная программа будет выглядеть так:

```
writeln('      Принцип Лапласа');
                I:=1;   S:=0;
              REPEAT
               D:=random;
               IF D>0 THEN BEGIN VER[I]:=D; s:=s+ver[i]; INC(I) END;

               UNTIL I=5;
               writeln;
              for i:=1 to 3 do BEGIN VER[I]:=VER[I]/S;
             SS:=SS+VER[I];write(ver[i]:10:5) END;

              VER[4]:=1-SS; WRITE(VER[4]:10:5);   writeln;      writeln;


                                   SS:=0;
                FOR I:=1 TO 4 DO   SS:=SS+VER[I]; WRITE(SS:10:10);
             {проверка, что p=1}
                                 writeln;
                for i:=1 to n do   begin
                for j:=1 to m do   begin

                Mat[i]:= Mat[i]+ver[j]*a[i,j];  end;
                write(Mat[i]:10:5) end;

                 maxx:=Mat[1]; k:=1;
                 for i:=1 to n do
                 if maxx<Mat[i] then begin maxx:=Mat[i];
                                         k:=i
                                         end;  writeln;      writeln;
                writeln('Принцип Лапласа: выигрыш по математическим
             ожиданиям =',k, '  стратегию');
```

Обобщенная программа для определения оптимальной стратегии по пяти критериям:

```
Program TEORIYAIGR;
```

```
uses crt;
label 1,2;
 const
 n=_; m=_;

 A:array [1..n,1..m] of integer=((_,_,_,_),
                                  (_,_,_,_),
                                  (_,_,_,_),
                                  (_,_,_,_));
 var
 c,t:array [1..n] of integer; w,ver,Mat:array [1..n] of real;
 R:array [1..n,1..m] of integer;
 i,j,b,k,min,max,maxmin,minmax,Gur:integer;
 Gurvits,s,D,SS,maxx:real;

BEGIN
 clrscr;
 for i:=1 to m do begin
 for j:=1 to n do begin
 write(a[i,j]:4);
 end;writeln;writeln;end;writeln;

                    {1 - Критерий Вальда,maxmin}

 for i:=1 to m do begin
 min:=a[i,1]; c[i]:=min; k:=i;
 for j:=2 to n do
 if min>a[i,j] then begin
                  min:=a[i,j];
                  c[i]:=min;
                  k:=i;
                  end; end;


for i:=1 to m do    write(c[i]:4);
 max:=c[1]; k:=1;
          for j:=2 to n do
          if  max<c[j] then begin max:=c[j];
          maxmin:=max; k:=j;
          end;



write('  Критерий Вальда {',k,'}');
```

```
writeln;

                    {2 - Критерий Максимума,maxmax}

 for i:=1 to m do begin
max:=a[i,1]; t[i]:=max; k:=i;
for j:=2 to n do
if max<a[i,j] then begin
                    max:=a[i,j];
                    t[i]:=max;
                    k:=i;
                    end; end;

for i:=1 to m do    write(t[i]:4);
 max:=t[1]; k:=1;
          for j:=2 to n do
          if  max<t[j] then begin max:=t[j];
          maxmin:=max; k:=j;
          end;

write('  Критерий максимума {',k,'}');
                          writeln;

            {3 - Критерий Гурвица, max(amin + (1-a)max)}

for i:=1 to m do begin w[i]:=(c[i]+t[i])/2; write(w[i]:4:1) end;

Gurvits:=w[1];
Gur:=1;
for i:=1 to m do
if Gurvits<=w[i] then begin
Gurvits:=w[i];
Gur:=i; end;
write('  Критерий Гурвица {',Gur,'}'); writeln;

          {4 - Критерий Сэвиджа, Матрица рисков,minmax}
```

```
           for j:=1 to n do begin
 max:=a[1,j]; t[j]:=max; k:=j;
 for i:=2 to m do
 if max<a[i,j] then begin
                      max:=a[i,j];
                      t[j]:=max;
                      k:=j;
                      end; end;   writeln;    writeln;
          for i:=1 to m do    write(t[i]:4);    writeln;  writeln;
for i:=1 to n do
for j:=1 to m do

 R[j,i]:= t[i]-a[j,i];     writeln;


      for i:=1 to n do  begin
for j:=1 to m do  begin

   write(R[i,j]:4);    end; writeln end;   writeln;


   for i:=1 to m do begin
 max:=R[i,1]; t[i]:=max; k:=i;
 for j:=2 to n do
 if max<R[i,j] then begin
                      max:=R[i,j];
                      t[i]:=max;
                      k:=i;
                      end; end;


for i:=1 to m do    write(t[i]:4);
 min:=t[1]; k:=1;
           for j:=2 to n do
           if  min>t[j] then begin min:=t[j];
           maxmin:=min; k:=j;
           end;


write('  Критерий Сэвиджа {',k,'}');
                           writeln;      writeln;
```

{5 - Принцип Лапласа}

```
            writeln('      Принцип Лапласа');
  I:=1;   S:=0;
 REPEAT
  D:=random;
  IF D>0 THEN BEGIN VER[I]:=D; s:=s+ver[i]; INC(I) END;

  UNTIL I=5;
  writeln;
 for i:=1 to 3 do BEGIN VER[I]:=VER[I]/S;
SS:=SS+VER[I];write(ver[i]:10:5) END;

 VER[4]:=1-SS; WRITE(VER[4]:10:5);   writeln;      writeln;


                                   SS:=0;
  FOR I:=1 TO m DO   SS:=SS+VER[I]; WRITE(SS:10:10);
{проверка, что p=1}
                      writeln;
  for i:=1 to n do   begin
  for j:=1 to m do   begin

  Mat[i]:= Mat[i]+ver[j]*a[i,j];  end;
  write(Mat[i]:10:5) end;

   maxx:=Mat[1]; k:=1;
   for i:=1 to n do
   if maxx<Mat[i] then begin maxx:=Mat[i];
                           k:=i
                           end;  writeln;      writeln;
  writeln('Лаплас предлагает, точнее выигрыш по матожиданиям
=',k, '  стратегию');

                {6 - окончательный результат}

 writeln('окончательный результат')

 END.
```

Как говорилось выше, оптимальной стратегией будет считаться та, на которую укажет большинство критериев.

Вернемся к решению примера № 2. Обобщающая программа выдает следующий результат:

```
  11    5    9    8   Критерий Вальда {1}
  20   50   45   66   Критерий максимума {2}
15.527.527.037.0   Критерий Гурвица {4}


  20   50   33   66


   5   30   20   55
   0    0   18   61
   4   41    6   21
   2   42    0    0

  55   61   41   42   Критерий Сэвиджа {3}

          Принцип Лапласа

   0.34915   0.12221   0.21965   0.30899

1.0000000000
  13.93576  17.93302  26.52152  34.90438

Принцип Лапласа: выигрыш по математическим ожиданиям =4-я  стратегия
```

Как видно из ответа, из пяти критериев 2 указывает на 4-ю стратегию. То есть, директор кафе для получения сверхдохода должен выбрать 4-ю стратегию - расширить ассортимент согревающих коктейлей.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найти решение игры, заданной матрицей:

Apple / **Samsung**	B_1	B_2	B_3
A_1	5	6	7
A_2	3	4	5
A_3	4	7	7

Первым игроком, который будет принимать решение, является Samsung (Galaxy S5). Вторым игроком, играющим «природу», будет компания Apple (iPhone 6).

Рассматриваются три возможных варианта выхода на рынок: до конкурента (A1), вместе с ним (A2) или после (A3). Естественно, пока не выйдет новый iPhone мы не узнаем, будет он намного лучше нашего (B1), такого же качества (B2) или сильно уступающим в качестве (B3).

Главный вопрос: когда выпустить продукт?

2. Задача о договоренностях между профсоюзом рабочих и руководством предприятия. Платежная матрица, которая описывает прибыль профсоюза и затраты администрации предприятия имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 50 & 60 & 70 & 30 \\ 33 & 44 & 55 & 66 \\ 44 & 55 & 66 & 77 \\ 55 & 66 & 77 & 99 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры.

Список литературы

1. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике. М.: «Финансы и статистика», 1999. — 172 с.

2. Каплан А.В., Каплан В.Е., Мащенко М.В., Овечкина Е.В. Решение экономических задач на компьютере. М.: «ДМК-Пресс», 2004. — 594 с.

3. Чупрынов Б.П. Методы оптимизации в экономике. Часть 2. Самара: «СГЭУ», 2000. — 106 с.

4. Экономико-математические методы и модели. / Под ред. Макарова С.И. — М.: «Кнорус», 2009. — 238 с.