Министерство образования и науки
Российской Федерации

«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

ВЕРОЯТНОСТЬ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания и варианты курсовых заданий
по теории вероятностей

Составители: Выск Н.Д.
Селиванов Ю.В.
Титаренко В.И.

Москва 2004

Методические указания предназначены для студентов «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, изучающих тему «Теория вероятностей» в рамках общего курса математики. Они ставят своей целью помочь студентам лучше усвоить теоретический и практический материал по классической теории вероятностей и теории случайных величин. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях, где ведется курс теории вероятностей.

Предлагаемые методические указания ставят своей целью помочь студентам второго курса усвоить теоретический и практический материал по теме «Теория вероятностей». В них рассматриваются основные вопросы классической теории вероятностей и теории дискретных и непрерывных случайных величин. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам. Каждому студенту группы выдаются индивидуальные задачи.

I. Классическая теория вероятностей

Основным объектом классической теории вероятности является так называемое *случайное событие*, то есть событие, которое может произойти или не произойти в результате проведенного опыта. Числовая величина, характеризующая степень возможности данного события, называется его *вероятностью*.

1. Классическое определение вероятности

Если можно пересчитать все возможные исходы проводимого опыта и если ни один из этих исходов не имеет приоритета по сравнению с другими (то есть при большом количестве опытов все исходы наблюдаются с одинаковой частотой), то говорят, что мы имеем дело со *схемой случаев*. Будем считать, что n — число возможных исходов данного опыта, а m — число его исходов, при которых происходит некоторое событие A (назовем такие исходы *благоприятными* или *благоприятствующими событию* A). Тогда вероятность события A определяется как отношение числа благоприятных исходов к числу возможных:
$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример 1. Из колоды в 32 карты вынуто последовательно без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что обе они — тузы.

Решение. Так как первую карту можно извлечь из колоды 32 способами, а вторую — 31 (поскольку в колоде осталась 31 карта), то число возможных исходов опыта $n=32\cdot 31=992$. Определим число благоприятных исходов. Первый туз можно выбрать из четырех, имеющихся в колоде, второй — из трех оставшихся. Значит, число благоприятных исходов $m=4\cdot 3=12$, и искомая вероятность равна
$$p=\frac{12}{992}=\frac{3}{248}\approx 0{,}012.$$

Во многих случаях, однако, непосредственный перебор всех возможных исходов опыта затруднителен в силу их большого количества. Для решения таких задач полезно использовать некоторые комбинаторные формулы, в частности, формулу для *числа сочетаний*. Число сочетаний из n по k, то есть число различных неупорядоченных наборов из k элементов, выбранных из n имеющихся различных объектов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В частности, если имеется группа из N объектов двух видов (M элементов первого вида и $N-M$ — второго), из которых требуется выбрать n элементов, среди которых должно быть m предметов первого типа и $n-m$ второго, вероятность того, что случайно извлеченная подгруппа имеет нужный состав, определяется так:

$$p = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Знаменатель этой дроби представляет собой число возможных исходов опыта, то есть количество различных наборов по n элементов, выбранных из N имеющихся без учета их качественного состава. В числителе — число благоприятных исходов, представляющее собой число возможных наборов из m элементов нужного вида, умноженное на количество возможных наборов из $n-m$ предметов второго типа.

Пример 2. Из коробки, в которой лежат пять пирожных «эклер» и семь — «наполеон», достали пять пирожных. Найти вероятность того, что среди них два «эклера» и три «наполеона».

Решение. Количество возможных исходов опыта представляет собой число сочетаний из 12 по 5:

$$n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792.$$

Число благоприятных исходов является произведением количества способов, которыми можно выбрать два «эклера» из пяти имеющихся, и числа наборов по три «наполеона» из семи:

$$m = C_5^2 \cdot C_7^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!} = 10\cdot 35 = 350.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $p = \dfrac{350}{792} \approx 0{,}442.$

2. Геометрические вероятности

Если множество возможных исходов опыта можно представить в виде отрезка прямой или в виде некоторой плоской или трехмерной области, а множество исходов, благоприятных событию A — как часть этой области, то вероятность рассматриваемого события определяется следующим образом:

$$P(A) = \frac{s}{S},$$

где S — длина отрезка (площадь или объем области), задающего множество возможных исходов, а s — соответствующая мера множества благоприятных исходов.

Пример 3. В круг наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что она не попадет в правильный треугольник, вписанный в этот круг.

Решение. В этом случае мерой множества возможных исходов является площадь круга: $S = \pi \cdot R^2$, а мерой множества благоприятных исходов — разность площадей круга и треугольника: $s = R^2(\pi - 3\sqrt{3}/4)$. Следовательно, вероятность заданного события равна

$$p = \frac{s}{S} = \frac{R^2(\pi - 3\sqrt{3}/4)}{\pi \cdot R^2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}586.$$

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Напомним, что *суммой* $A+B$ событий A и B называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B, а *произведением* AB этих событий — событие, состоящее в том, что произошли оба данных события.

Вероятность суммы двух событий можно найти по *теореме сложения вероятностей*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если события A и B *несовместны*, то есть не могут произойти одновременно, то вероятность их произведения равна нулю, и теорема сложения приобретает более простой вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность произведения событий определяется по *теореме умножения вероятностей*:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A),$$

где $P(B|A)$ — так называемая *условная вероятность* события B, то есть вероятность B при условии, что A произошло. Если осуществление события A не изменяет вероятности события B, то A и B называются *независимыми*, и вероятность их произведения равна произведению вероятностей сомножителей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Заметим, что при решении задач теоремы сложения и умножения обычно используются совместно.

Пример 4. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания равны соответственно 0,6 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

A — оба попали в цель;

B — в цель попал хотя бы один.

Решение. Назовем событиями C и D попадание в мишень соответственно первого и второго стрелка и отметим, что C и D являются событиями совместными, но независимыми (иными словами, в мишень могут попасть оба стрелка, а вероятность попадания каждого не зависит от результата другого). Событие A представляет собой произведение событий C и D, поэтому

$$P(A) = P(C) \cdot P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

Событие B является суммой C и D; для определения его вероятности воспользуемся общим видом теоремы сложения:

$$P(B) = P(C+D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0{,}6 + 0{,}9 - 0{,}54 = 0{,}96.$$

4. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие A может произойти одновременно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, представляющих собой так называемую *полную группу попарно несовместных событий* (то есть в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно событие из этой группы), то события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*, а вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i).$$

Здесь $P(H_i)$ — вероятность i-ой гипотезы, а $P(A|H_i)$ — условная вероятность события A при осуществлении данной гипотезы.

Пример 5. В трех одинаковых урнах лежат шары: в первой — 5 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 6 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный. Из случайно выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать гипотезами выбор одной из урн. Поскольку урны одинаковы, каждую из них можно выбрать с одинаковой вероятностью, а так как сумма вероятностей гипотез равна 1, то вероятность каждой гипотезы —

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Условная вероятность события A, то есть извлечения белого шара из урны, определяется по классическому определению вероятности (количеством благоприятных исходов при этом является число белых шаров, а числом возможных исходов — общее число шаров в урне). Поэтому

$$P(A \mid H_1) = 5/8, \quad P(A \mid H_2) = 2/8 = 1/4, \quad P(A \mid H_3) = 3/4.$$

Используя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{24} \approx 0{,}542.$$

Если известно, что в результате опыта событие A произошло, то эта информация может изменить вероятности гипотез: повышаются вероятности тех гипотез, при которых событие A происходит с большей вероятностью, и уменьшаются вероятности остальных. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется так называемая *теорема гипотез*, или *формула Байеса*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

(В знаменателе дроби в правой части равенства стоит полная вероятность события A).

Пример 6. В студенческой группе 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 — на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

Решение. Будем считать гипотезой H_1 то, что данный студент является отличником, H_2 — что он принадлежит ко второй группе, H_3 — к третьей. Тогда вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = 5/20 = 0{,}25, \quad P(H_2) = 8/20 = 0{,}4, \quad P(H_3) = 7/20 = 0{,}35.$$

Найдем условную вероятность события A — правильного ответа на первый вопрос — при осуществлении каждой гипотезы:

$$P(A|H_1)=1,\quad P(A|H_2)=0{,}7,\quad P(A|H_3)=0{,}5.$$

Следовательно, полная вероятность события A равна

$$P(A)=0{,}25\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}7+0{,}35\cdot 0{,}5=0{,}705.$$

Применяя формулу Байеса, находим:

$$P(H_1\mid A)=\frac{0{,}25\cdot 1}{0{,}705}=\frac{50}{141}\approx 0{,}355.$$

5. Формула Бернулли

Рассмотрим случай, когда требуется определить не вероятность осуществления некоторого события A в одном испытании, а вероятность того, что это событие произойдет заданное количество раз в серии из n опытов. Будем считать при этом, что вероятность A в каждом опыте одинакова и результат каждого опыта не зависит от результатов остальных. Такая постановка задачи называется *схемой независимых испытаний*. При выполнении указанных условий вероятность того, что при проведении n независимых испытаний событие A будет наблюдаться ровно k раз (неважно, в каких именно опытах), определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность появления A в каждом испытании, а $q=1-p$ — вероятность того, что в данном опыте событие A не произошло.

Пример 7. Победу в волейбольном матче одерживает команда, выигравшая 3 партии. Найти вероятность того, что матч между командами, для которых вероятность выигрыша каждой партии равна соответственно 0,8 и 0,2, будет состоять из 5 партий.

Решение. Для того, чтобы потребовалось играть пятую партию, нужно, чтобы после четырех партий счет в матче был $2:2$. Следовательно, каждая из команд должна выиграть любые две партии из четырех. Если $p=0{,}8$ есть вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, а $q=0{,}2$ — вероятность ее проигрыша, то, применяя формулу Бернулли, найдем, что

$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0{,}64\cdot 0{,}04=0{,}1536.$$

II. Случайные величины

Во многих задачах теории вероятности удобнее оперировать не понятием случайного события, для которого существуют только две возможности: оно может произойти или не произойти в результате опыта, а понятием так называемой *случайной величины*, то есть величины, которая при проведенном испытании может принимать различные значения, причем заранее не известно, какие именно. Если возможный диапазон значений такой величины представляет собой конечное или счетное множество, она называется *дискретной случайной величиной*, а если эти значения заполняют целиком некоторый интервал — *непрерывной случайной величиной.*

1. Дискретные случайные величины

Поведение дискретной случайной величины описывается *законом распределения* (или *рядом распределения*) — таблицей, в первой строке которой перечислены все возможные значения случайной величины, а во второй — вероятности, с которыми она принимает эти значения:

x_i	x_1	x_2	K	x_n	K
p_i	p_1	p_2	K	p_n	K

Сумма вероятностей должна при этом равняться числу 1.

Пример 8. Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых две бракованных, взяты наудачу три детали. Составить ряд распределения случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Так как бракованных деталей в партии только две, среди трех отобранных должна быть, по крайней мере, одна стандартная деталь. Следовательно, случайная величина X может принимать три значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Найдем соответствующие им вероятности. Число возможных наборов по три детали из 10 имеющихся, то есть число возможных исходов опыта, составляет $n = C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120.$

Найдем число исходов, благоприятствующих каждому значению случайной величины: $m_1 = C_8^1 \cdot C_2^2 = 8,\ \ m_2 = C_8^2 \cdot C_2^1 = 56,\ \ m_3 = C_8^3 = 56.$

Тогда $p_1 = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$, $p_2 = p_3 = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$. Поэтому ряд распределения имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	$1/15$	$7/15$	$7/15$

Однако в ряде задач не требуется полностью знать поведение случайной величины, для решения достаточно лишь нескольких характеристик. Одной из основных числовых характеристик является *математическое ожидание* (или *взвешенное среднее значение*), представляющее собой среднее значение рассматриваемой случайной величины с учетом вероятностей принимаемых значений и вычисляемое по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i p_i.$$

Кроме того, зная математическое ожидание случайной величины, полезно знать и диапазон ее возможного отклонения от этого значения. Другими словами, если значения случайной величины в основном ненамного отклоняются от среднего, то оно хорошо характеризует исследуемую величину; в противном случае знание математического ожидания мало что дает для описания ее поведения. Характеристикой, показывающей масштаб отклонения случайной величины от математического ожидания, является *дисперсия* — математическое ожидание квадрата отклонения от среднего: $D(X) = M[(X - M(X))^2]$.

При практических расчетах удобнее пользоваться другой формулой для расчета дисперсии: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Отклонение случайной величины от математического ожидания задается *средним квадратическим отклонением* σ: $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Пример 9. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X из примера 8.

Решение. Используя найденный ряд распределения, получим:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{15} + 2\cdot\frac{7}{15} + 3\cdot\frac{7}{15} = \frac{36}{15} = 2{,}4;$$

$$D(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{15} + 2^2 \cdot \frac{7}{15} + 3^2 \cdot \frac{7}{15} - 2{,}4^2 = \frac{92}{15} - 5{,}76 \approx 0{,}373;$$
$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}373} \approx 0{,}611.$$

2. Непрерывные случайные величины

Для непрерывной случайной величины теряет смысл понятие вероятности каждого конкретного значения, поскольку таких значений бесконечно много, и из условия, что сумма вероятностей всех значений равна 1, следует, что вероятность каждого фиксированного значения равна нулю. Поэтому основными характеристиками, описывающими поведение непрерывной случайной величины, являются *функция распределения* (интегральная функция распределения) и *плотность распределения* вероятностей (плотность вероятности, дифференциальная функция распределения).

Функция распределения $F(x)$ представляет собой вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее аргумента этой функции:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Плотность вероятности (плотность распределения) $f(x)$ является первой производной от функции распределения: $f(x) = F'(x)$. График функции $f(x)$ называют *кривой распределения*.

Понятие вероятности сохраняется для непрерывной случайной величины как вероятность ее попадания в некоторый (полу)интервал, которую можно определить так: $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$ или

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются следующим образом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 10. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ C(2x - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти:

1) C; 2) $F(x)$; 3) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) $P\{0{,}5 < X < 1{,}5\}$.

Решение. 1) Из условия нормированности плотности вероятности следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$ В нашем случае

$$\int\limits_0^2 C(2x - x^2)dx = C(x^2 - x^3/3)\Big|_0^2 = C(4 - 8/3) = 4C/3 = 1,$$

откуда $C = 3/4$.

2) Связь между $F(x)$ и $f(x)$ задается формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Поэтому при $x \le 0$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$

при $0 < x < 2$ $\quad F(x) = \dfrac{3}{4}\int\limits_0^x (2t - t^2)dt = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x^3,$

а для $x \ge 2$ $\quad F(x) = \dfrac{3}{4}\int\limits_0^2 (2t - t^2)dt + \int\limits_2^x 0 \cdot dx = 1.$

Следовательно,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x^3, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

3) $$M(X) = \frac{3}{4}\int\limits_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{4}\left(16/3 - 4\right) = 1;$$

$$D(X) = \frac{3}{4}\int\limits_0^2 x^2(2x - x^2)dx - 1 = \frac{3}{4}\left(x^4/2 - x^5/5\right)\Big|_0^2 - 1 = \frac{3}{4}\left(8 - 32/5\right) - 1 = 0{,}2;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447.$$

4) $$P\{0{,}5 < X < 1{,}5\} = \frac{3}{4}\int\limits_{0{,}5}^{1{,}5}(2x - x^2)dx = \frac{3}{4}\left(x^2 - x^3/3\right)\Big|_{0{,}5}^{1{,}5} = 0{,}6875.$$

3. Нормальный закон распределения

Особый интерес для практики представляет непрерывная случайная величина, имеющая так называемый *нормальный закон распределения,* плотность вероятности которой имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m и σ — параметры. Числовые характеристики случайной величины X, распределенной по нормальному закону, совпадают с параметрами распределения: $M(X) = m,\ \ D(X) = \sigma^2,$ а вероятность попадания X в полуинтервал (α, β) подсчитывается по формуле:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$ где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$ — функция Лапласа, значения которой можно найти в таблицах.

Пример 11. Найти вероятность попадания в интервал $(-2;\ 3)$ для нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 2,\ \ \sigma = 3.$

Решение. $$P\{-2 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-2}{3}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}33) - \Phi(-1{,}33) = 0{,}1293 + 0{,}4082 = 0{,}5375.$$

Известно («правило трех сигм»), что практически все возможные значения нормально распределенной случайной величины сосредоточены в интервале $(m - 3\sigma;\ m + 3\sigma)$. Действительно, вероятность попадания в этот интервал равна 0,9973, то есть выход за его границы можно считать событием практически невозможным ($p = 0{,}27\ \%$).

Пример 12. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины, принимающей значения от 3,5 до 10,1.

Решение. Будем считать границы интервала равными $m-3\sigma$ и $m+3\sigma$. Тогда $m-3\sigma=3{,}5$, $m+3\sigma=10{,}1$, и следовательно, $M(X)=m=6{,}8$, $\sigma=1{,}1$, $D(X)=\sigma^2=1{,}21$.

Варианты курсовых заданий

Вариант № 1

1) Из колоды, в которой содержится 36 карт, выбираются без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что будут выбраны карты одной масти.

2) На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Найти вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

3) В урне содержится 7 белых, 5 черных и 8 красных шаров. Шары выбираются наугад, причем белый или черный шар в урну не возвращается, а извлеченный из урны красный шар после проверки его цвета укладывается назад в урну. Найти вероятность того, что среди первых двух последовательно вынутых шаров будет один черный.

4) Машина-экзаменатор на каждую задачу предлагает четыре ответа, из которых только один верный. В билете пять задач. Студент, не желая их решать, нажимает на клавиши случайным образом. Какова вероятность сдать зачет машине-экзаменатору, если для получения положительной оценки надо решить не менее трех задач.

5) Стрелок дважды стреляет по мишени, состоящей из трех концентрических кругов. За попадание в центральный круг дается три очка, в окружающее его кольцо — два и за попадание во внешнее кольцо — одно очко. Вероятности попадания в эти части мишени равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,3. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

6) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,2, два мяча — с вероятностью 0,2, один мяч — с вероятностью 0,3 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Найти математическое ожидание общего числа забитых в матче мячей.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & -3<x<0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1; 1).

8) Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X<1\}=0{,}1$ и $P\{X>5\}=0{,}2$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

Вариант № 2

1) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Определить вероятность того, что обе они — дубли.

2) На отрезке AB длины l наудачу поставлены две точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

3) В тире имеется пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стрелок берет одно из ружей наудачу.

4) В волейбольном матче игра происходит до тех пор, пока одна из команд не выиграет трех партий. Вероятность победы команды А в каждой партии равна 0,4. Определить вероятность того, что в матче победит команда А, если известно, что она проиграла вторую партию.

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,8. Определить вероятность того, что все мишени будут поражены ровно семью патронами.

6) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,1, два мяча — с вероятностью 0,2, один мяч — с вероятностью 0,4 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Определить закон распределения и дисперсию общего числа забитых в матче мячей.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2,\\ ax^{-9/2}, & x>2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 4).

8) Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_8$ имеют нормальный закон распределения с параметрами $m=1$, $\sigma=\sqrt{2}$. Рассматривается случайная величина $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_8$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятности $P\{3 < Y < 13\}$, $P\{|Y-8| > 8\}$.

Вариант № 3

1) Имеется урна, в которой 3 белых и 6 черных шаров. Определить вероятность того, что при выборе из урны двух шаров они окажутся разных цветов.

2) На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросается монета радиуса r, в результате чего установлено, что в 40 % случаев монета не пересекает ни одной стороны квадрата. Оценить размер сетки.

3) В волейбольном матче игра происходит до тех пор, пока одна из команд не выиграет трех партий. Вероятность победы команды А в каждой партии равна 0,4. Определить вероятность того, что команда Б победит со счетом 3:0.

4) Для контроля продукции из 3 партий деталей взята для испытания 1 деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

5) Стрелок производит восемь выстрелов по мишени, состоящей из центральной части, за попадание в которую он получает 2 очка, и остальной части, за попадание в которую стрелок получает 1 очко. Определить вероятность того, что стрелок наберет 14 очков, если вероятность попадания в центральную часть круга равна 0,1, а в остальную часть — 0,3.

6) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Найти закон распределения и математическое ожидание количества появлений цифры «4» на выбранных костях.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x), \ 1 < x < 4, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $M(X) = -2$, $D(X) = 1$. Найти: а) плотность вероятности случайной величины X и ее значения в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$; б) вероятности $P\{-2 < X < 0\}$, $P\{X > 1\}$.

Вариант № 4

1) В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что все эти команды попадут в одну и ту же группу.

2) На окружности радиуса R наудачу поставлены три точки $A, B, C.$ Какова вероятность того, что треугольник ABC — остроугольный?

3) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Найти вероятность того, что выбранные кости можно приставить друг к другу.

4) Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность события A в каждом опыте равна 0,35 и произведено 5 независимых опытов.

5) Из колоды в 52 карты выбираются 4 карты. Для случайной величины X — количества карт червонной масти среди отобранных — найти закон распределения и математическое ожидание.

6) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,8. Найти дисперсию случайной величины X — числа пораженных мишеней.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ a/x^5, & x > 2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (5; 6).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=2$, $\sigma=2$. Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятности $P\{1<X<4\}$, $P\{X<2{,}5\}$.

Вариант № 5

1) На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число. Найти вероятность того, что оно будет четным.

2) Какова вероятность того, что из трех взятых наудачу отрезков длины не более l можно построить треугольник?

3) Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями равны соответственно 0,4, 0,3 и 0,5.

4) Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у обоих будет равное количество попаданий.

5) В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу вынимают 3 шара. Найти закон распределения случайного числа белых шаров среди отобранных.

6) Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,3.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1)^{-1/3}, & 1<x<9, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=1{,}2$ и $D(X)=2$. Найти $P\{|X-1{,}2|>2{,}5\sqrt{2}\}$ и $P\{|X-1{,}2|<1\}$.

Вариант № 6

1) Бросаются одновременно три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на всех костях не превосходит пяти.

2) Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно kr $(k = 1,2,3,4,5)$. Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки в заштрихованную область.

3) В читальном зале есть 10 учебников по теории вероятностей, из них 4 в переплете. Библиотекарь взял наудачу два учебника. Найти вероятность того, что только один учебник в переплете.

4) Характеристика материала, из которого изготовлена продукция, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

5) Стрелок производит 7 выстрелов по различным мишеням, причем выстрелы по каждой мишени производятся до первого попадания в нее, после чего выстрелы производятся по следующей мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти закон распределения случайной величины X — числа пораженных мишеней.

6) В каждом из трех периодов хоккейного матча команда забивает две шайбы с вероятностью 0,4, одну шайбу — с вероятностью 0,3 и не забивает шайб с вероятностью 0,3. Определить дисперсию количества шайб, забитых в матче.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{1/3}, \ 1 < x < 8, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (7; 9).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $P\{X > 2\} = 0{,}5$, $P\{X < 3\} = 0{,}975$. Найти: а) математическое ожидание и дисперсию; б) вероятность $P\{1 < X < 3\}$.

Вариант № 7

1) Из колоды в 52 карты выбираются случайным образом без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что будут выбраны карты разных значений.

2) Найти вероятность того, что монета радиуса r, брошенная на бесконечную шахматную доску с клетками шириной a $(a > 2r)$, пересечет не более одной стороны клетки.

3) Имеется три ящика, в первом из которых 6 стандартных и 3 бракованных детали, во втором — 5 стандартных и 4 бракованных и в третьем — 7 стандартных и 4 бракованных. Найти вероятность того, что если из каждого ящика выбрать по детали, то среди них будет одна стандартная и две бракованных.

4) Имеется 5 урн следующего состава: две урны состава A_1 — по 1 белому и 4 черных шара; одна урна состава A_2 — 2 белых и 3 черных шара; две урны состава A_3 — по 3 белых и 2 черных шара. Из одной наудачу выбранной урны взят шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар был вынут из урны третьего состава.

5) Из последовательности чисел 1, 2, 3, …, 99, 100 выбирают наугад с возвращением 10. Найти вероятность того, что среди них кратных 7 будет не более двух.

6) В каждом из трех периодов хоккейного матча команда забивает две шайбы с вероятностью 0,3, одну шайбу — с вероятностью 0,5 и не забивает шайб с вероятностью 0,2. Найти закон распределения числа шайб, забитых в матче.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax(4 - x^2), \ 0 < x < 2, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1; 1).

8) Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик проходит через отверстие диаметра d_1, но не проходит через от-

верстие диаметра d_2 $(d_2 < d_1)$, то шарик считается годным. Если какое-либо из этих условий нарушается, то шарик бракуется. Считается, что диаметр шарика — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m = (d_1 + d_2)/2$, $\sigma = \beta \cdot (d_1 - d_2)$, где $0 < \beta < 1/2$. Каким следует выбрать коэффициент β, чтобы брак составлял не более 3 % всей продукции?

Вариант № 8

1) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Найти вероятность того, что обе они — не дубли.

2) На отрезке OA длины L наудачу поставлены две точки B и C. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке.

3) Орудие осуществляет стрельбу по цели, для поражения которой необходимо попасть в нее дважды. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,5; в дальнейшем она не меняется при промахах, но после первого попадания вероятность промаха при дальнейших выстрелах уменьшается вдвое. Боекомплект составляет 5 снарядов. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если первый выстрел был точным.

4) Известно, что 96 % выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,7. Определить вероятность того, что при стрельбе на двух огневых рубежах спортсмен поразит все мишени, израсходовав при этом 12 патронов.

6) Из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, извлекаются без возвращения шары до появления белого шара. Найти закон распределения и математическое ожидание случайного числа вынутых из урны шаров.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^{-1/4}, \ 0<x<1, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1/4; 3/4).

8) Средняя температура в квартире в период отопительного сезона равна 22°С, а ее среднее квадратическое отклонение — 0,5°С. С вероятностью, не меньшей 0,96, найти границы, в которых заключена температура в квартире, считая ее нормально распределенной случайной величиной.

Вариант № 9

1) Имеется урна, в которой 4 белых, 3 красных и 7 черных шаров. Определить вероятность того, что при выборе из урны двух шаров они окажутся белыми.

2) Из отрезка [–1; 2] наудачу взяты два числа. Найти вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы.

3) В ящике содержится 6 деталей типа А, 5 — типа Б и 3 — типа В. Детали выбираются наугад, причем вынутая деталь типа А или Б откладывается в сторону, а извлеченная деталь типа В возвращается назад в ящик. Определить вероятность того, что если выбрать 2 детали, то они будут разных типов.

4) Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью, равной 1, если событие A произошло не менее двух раз; не может наступить, если событие A не имело места; и наступает с вероятностью 0,6, если событие A имело место один раз. Найти вероятность появления события B.

5) Стрелок дважды стреляет по мишени, состоящей из трех концентрических кругов. За попадание в центральный круг дается три очка, в окружающее его кольцо — два, и за попадание во внешнее кольцо — одно очко. Вероятности попадания в эти части мишени равны соответственно 0,3, 0,3 и 0,1. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

6) Из колоды в 32 карты выбирается 4 карты. Найти математическое ожидание числа карт трефовой масти среди отобранных.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 16,\\ ax^{-13/4}, & x>16.\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (15; 17).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=1$, $\sigma=2$. Найти вероятность того, что модуль этой случайной величины примет значение, большее $2{,}5$.

Вариант № 10

1) Из последовательности чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1<k<n$ — произвольное целое число?

2) На отрезке OA длины L наудачу поставлены две точки B и C. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше $L/2$.

3) Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

4) Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 65 % из первого и 35 % — со второго. При этом материал первого цеха имеет 15 % брака, а второго — 25 %. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка без дефектов.

5) В партии из 12 деталей имеется 3 бракованных. Из партии случайным образом извлечены 3 детали. Составить ряд распределения числа доброкачественных деталей среди отобранных.

6) Стрелок производит 7 выстрелов по различным мишеням, причем выстрелы по каждой мишени производятся до первого попадания в нее, после чего выстрелы производятся по следующей мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. Найти дисперсию числа пораженных мишеней.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax+ax^3, \ 0<x<2, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–0,5; 1,5).

8) Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X<0\}=0{,}2$ и $P\{X>3\}=0{,}15$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

Вариант № 11

1) Имеется пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что хотя бы два из них имеют одинаковую стоимость.

2) Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит $l,$ будет больше l?

3) Имеется 10 одинаковых по виду урн, из которых в 9 находится по два черных и два белых шара, а в одной — пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что он извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

4) В волейбольном матче игра происходит до тех пор, пока одна из команд не выиграет трех партий. Вероятность победы команды A в каждой партии равна 0,7. Определить вероятность того, что команда A победит со счетом 3:1.

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,6. Найти закон распределения и математическое ожидание числа пораженных мишеней.

6) В каждом из трех матчей хоккейного турнира команда с вероятностью 0,2 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,4 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,4 терпит поражение, не получая за это очков. Найти дисперсию общего числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^4, & -1<x<3, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 3,5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=1$, $\sigma=2$. Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятности $P\{0<X<3\}$, $P\{X<1{,}5\}$.

Вариант № 12

1) Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N при возведении в квадрат даст число, оканчивающееся единицей.

2) В круг вписано шесть равных окружностей, касающихся двух соседних и внешней окружности. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет ни в один из маленьких кругов.

3) В урне содержится 5 белых, 3 черных и 6 красных шаров. Шары выбираются наугад, причем белый или черный шар в урну не возвращается, а извлеченный из урны красный шар после проверки его цвета укладывается назад в урну. Найти вероятность того, что если выбрать два шара, среди них не будет белых.

4) Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 7 — с вероятностью 0,7, 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

5) Для поражения трех целей орудие может произвести не более 8 выстрелов. Вероятность поражения цели при любом выстреле равна 0,7. Определить вероятность того, что будет израсходовано ровно 7 снарядов.

6) В каждом из трех матчей футбольного турнира команда с вероятностью 0,2 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,5 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,3 терпит поражение, не получая за это очков. Найти закон распределения и дисперсию общего числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ ax^{-10/3}, & x > 1. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=0$, $\sigma=2$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение: а) в интервале (–1; 2); б) меньшее –0,5; в) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 1.

Вариант № 13

1) Из колоды в 52 карты выбираются 4 карты, причем каждая из них после определения масти и значения возвращается в колоду. Найти вероятность того, что будет выбрано три карты одного значения, а четвертая — другого.

2) Наудачу взяты два числа x и y $(0<x<4;\ 0<y<4)$. Найти вероятность того, что $xy<4$, а $x/y<2$.

3) Принимая вероятность рождения однополых близнецов вдвое большей, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковыми, а вероятность рождения в двойне первым мальчика равной 0,51, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

4) Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества (из высококачественных деталей собирается 30 % приборов). Вероятность безотказной работы за время t для приборов первого и второго типа равна соответственно 0,96 и 0,71. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

5) В партии изделий 90 исправных и 10 бракованных. Найти вероятность того, что среди 10 проданных изделий ровно одно бракованное.

6) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,1, два мяча — с вероятностью 0,3, один мяч — с вероятностью 0,2 и с вероятностью 0,4 не забивают мячей. Найти закон распределения и дисперсию общего числа забитых в матче мячей.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{x}}, \ 0 < x < a, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1; 1).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = -10$, $\sigma = 3$. Заданы точки –17, –13, –7, –1, 2 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина X принимает значения на этих интервалах.

Вариант № 14

1) Из колоды в 32 карты выбираются наудачу без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что будут выбраны карты одного значения.

2) Наудачу взяты два числа x и y $(0 < x < 5,\ 0 < y < 5)$. Найти вероятность того, что $x + y < 5$, а $xy > 2{,}25$.

3) Имеется три ящика, в первом из которых 6 стандартных и 4 бракованных детали, во втором — 5 стандартных и 7 бракованных, а в третьем — 8 стандартных и 8 бракованных. Определить вероятность того, что если из каждого ящика выбрать по детали, то все они будут стандартными.

4) Попадание случайной точки в любое место области S равновозможно, а область S состоит из четырех частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8 % всей области. При испытании имело место событие A, которое происходит только при попадании точки в одну из этих частей с вероятностями соответственно 0,01, 0,05, 0,2 и 0,5. В какую из частей области S вероятнее всего произошло попадание?

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при выстреле составляет 0,7. Найти вероятность того, что непораженной останется одна мишень.

6) Студент знает 15 из 25 экзаменационных вопросов. В билете 3 вопроса. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа вопросов, на которые студент готов ответить.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 1/3, & -1<x<0, \\ 1/6, & 1<x<a, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–0,4; 1,6).

8) Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна $m=40$ *см* и среднее квадратическое отклонение равно $\sigma=0{,}4$ *см*, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью $0{,}8$?

Вариант № 15

1) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Определить вероятность того, что на обеих костях нет цифр 3 и 5.

2) На отрезок OA длины L наудачу брошена точка B. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA будет иметь длину, меньшую, чем $L/3$.

3) Игрок A поочередно играет с игроками B и C по две партии. Вероятности выигрыша первой партии для B и C равны 0,1 и 0,2 соответственно, вероятность выиграть во второй партии для B равна 0,3, для C — 0,4. Определить вероятность того, что первым выиграет B.

4) Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

5) Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее 3 раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность события A в каждом опыте равна 0,3 и произведено 7 независимых опытов.

6) Из урны, содержащей 5 белых и 6 черных шаров, наудачу извлечены 4 шара. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа белых шаров среди отобранных.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<1,\\ 1/4, & 2<x<a,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,8; 3,2).

8) При измерении усилия для разрыва нити получается нормально распределенная случайная величина X; среднее усилие составляет 61,3 (н) при среднем квадратическом отклонении 0,5 (н). Найти интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью 0,95 попадет значение разрывного усилия при очередном измерении.

Вариант № 16

1) Определить вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число не делится на 2 или на 3.

2) В круг вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что из 4 точек, наудачу брошенных в круг, одна окажется внутри треугольника и по одной — в каждом сегменте.

3) Детали контролируются двумя контролерами. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,7, а ко второму — 0,3. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна — 0,93, а вторым — 0,98. Годная деталь была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

4) Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

5) Из колоды в 32 карты наудачу извлечены 3 карты. Составить закон распределения числа карт бубновой масти среди отобранных.

6) В каждом из трех матчей футбольного турнира команда с вероятностью 0,5 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,3 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,2 терпит поражение, не получая за это очков. Найти математическое ожидание и дисперсию числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}ax, & 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 1,7).

8) Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ имеют нормальный закон распределения с параметрами $m=1{,}5$, $\sigma=\sqrt{3}$. Рассматривается случайная величина $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятности $P\{8<Y<22\}$, $P\{|Y-15|>15\}$.

Вариант № 17

1) В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три — в другую.

2) Два студента условились встретиться в определенном месте между 5 и 6 часами. Пришедший первым ждет другого не более 20 минут. Чему равна вероятность встречи студентов, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу, и моменты прихода независимы.

3) Из полного набора костей домино наугад извлекается кость, затем она возвращается обратно и извлекается еще одна кость. Найти вероятность того, что на обеих костях нет цифр 4 и 3.

4) Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Найти вероятность того, что вепрь был убит первым охотником, если вероятности их попадания равны соответственно 0,2, 0,4 и 0,6.

5) Вероятность появления некоторого события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

6) В партии арбузов 10 % недозрелых. Найти закон распределения и дисперсию случайного числа недозрелых арбузов среди трех купленных.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1, \\ 1/2, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,5; 3).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $M(X) = -1$; $D(X) = 2$. Найти: а) плотность вероятности случайной величины X и ее значения в точках $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$; б) вероятности $P\{-3 < X < -1\}$, $P\{X > 0\}$.

Вариант № 18

1) Имеется пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что все три билета стоят семь рублей.

2) Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятность того, что корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны.

3) Имеется три урны, в первой из которых 3 белых и 6 черных шаров, во второй — 4 белых и 4 черных и в третьей — 7 белых и 3 черных. Определить вероятность того, что при выборе из каждой урны по одному шару все они будут белыми.

4) Произведено 3 независимых испытания, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,2. Вероятность появления другого события B зависит от числа появлений события A; именно, она равна 0,1 при однократном появлении A, 0,3 — при двукратном и 0,7 — при трехкратном; если событие A не произошло ни разу, то событие B невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события A, если событие B имело место.

5) Для поражения трех целей орудие может произвести не более 8 выстрелов. Вероятность поражения цели при любом выстреле равна 0,3. Определить вероятность того, что будут израсходованы все снаряды, и все цели будут поражены.

6) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,2, два мяча — с вероятностью 0,1, один мяч — с вероятностью 0,3 и с вероятностью 0,4 не забивают мячей. Найти закон распределения и дисперсию общего числа забитых в матче мячей.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/a, \ 3 < x < 4, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2,5; 3,5).

8) Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее размера от проектного не превышает $7\ мм$. Случайные отклонения размера детали от проектного имеют нормальный закон распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 4\ мм$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

Вариант № 19

1) Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N при возведении в четвертую степень даст число, заканчивающееся единицей.

2) На отрезке длины l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше $l/4$?

3) Орудие осуществляет стрельбу по цели, для поражения которой необходимо попасть в нее дважды. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,2; в дальнейшем она не меняется при промахах, но после первого попадания вероятность промаха при дальнейших выстрелах уменьшается вдвое. Боекомплект составляет 8 снарядов. Найти вероятность того, что цель будет повреждена, но не поражена.

4) Третья часть одной из трех партий деталей является второсортной, остальные детали во всех партиях первого сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали.

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при выстреле составляет 0,9. Найти вероятность того, что непораженной останется одна мишень.

6) В каждом из трех матчей футбольного турнира команда с вероятностью 0,6 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,3 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,1 терпит поражение, не получая за это очков. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 1/4, & -1<x<1, \\ 1/8, & 3<x<a, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,4; 5,6).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=2$, $\sigma=4$. Найти: а) вероятность $P\{-5<X<30\}$; б) интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma=0{,}9$ попадет X.

Вариант № 20

1) Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

2) Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна l, а расстояние между их осями равно d $(d > l)$?

3) Как следует распределить по двум урнам 2 белых и 2 черных шара, чтобы вероятность вынуть белый шар из наугад выбранной урны была наибольшей?

4) Вероятность хотя бы одного появления события при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления этого события в одном опыте, если она одинакова для всех опытов?

5) Вероятность появления герба при каждом из пяти бросков монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа появлений герба к числу появлений цифры.

6) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,3, два мяча — с вероятностью 0,3, один мяч — с вероятностью 0,1 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Для случайной величины X — числа забитых в матче мячей — определить дисперсию.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/9, \ 0 < x < a, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,1; 0,7).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $P\{X > 3\} = 0{,}5, \ P\{X < 4\} = 0{,}95$. Найти: а) параметры m и σ закона распределения; б) вероятность $P\{1 < X < 4\}$.

Вариант № 21

1) Из колоды в 36 карт выбираются 4 карты, причем каждая из них после определения ее масти и значения возвращается в колоду. Найти вероятность того, что будут выбраны карты одного значения.

2) Рассматриваются два числа x и y, удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 \le 1$. Найти вероятность того, что для наудачу выбранной из этого множества пары чисел выполняется условие $x + y \ge 1$.

3) В урне содержится 3 белых, 8 черных и 8 красных шаров. Шары выбираются наугад, причем белый или черный шар в урну не возвращается, а извлеченный из урны красный шар после проверки его цвета укладывается назад в урну. Найти вероятность того, что два последовательно вынутых шара будут разных цветов.

4) По каналу связи передается одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB или CCCC, вероятности которых равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,3. Буква принимается правильно с вероятностью 0,6; вероятность ее приема за другую — 0,2 и 0,2 (буквы искажаются независимо друг от друга). Найти вероятность того, что передано AAAA, если получено ABCA.

5) Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе — с вероятностью 0,95; третье — с вероятностью 0,8 и четвертое — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно ровно два испытания из четырех.

6) Устройство состоит из 4 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Найти закон распределения и дисперсию случайного числа отказавших элементов в одном опыте.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{5}, & -2 < x < a, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,1; 0,9).

8) Средняя температура T в холодильной камере равна 5°C, а ее среднее квадратическое отклонение — 0,4°C. С вероятностью, не меньшей 0,92, найти границы, в которых заключена величина T.

Вариант № 22

1) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Определить вероятность того, что на каждой из них есть ровно по одной из цифр 5 и 4.

2) В круге проведен диаметр и перпендикулярный ему радиус, разделившие круг на 3 части. Найти вероятность того, что из трех точек, наудачу брошенных в круг, в каждой части окажется ровно по одной.

3) Какова вероятность того, что участник игры в «Спортлото 6 из 49» угадает 4 номера?

4) В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй — 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложили во вторую 2 шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны после перекладывания, окажется белым.

5) Игральную кость бросают 3 раза. Найти закон распределения и математическое ожидание числа появлений четверки.

6) В каждом из трех периодов хоккейного матча команда забивает две шайбы с вероятностью 0,2, одну шайбу — с вероятностью 0,5 и не забивает шайб с вероятностью 0,3. Определить дисперсию числа шайб, забитых в матче.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{3}, & a<x<1,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2; 1,3).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=2$, $\sigma(X)=3$. Найти $P\{X>1{,}5\}$ и $P\{-1<X<3\}$.

Вариант № 23

1) Имеется урна, в которой 7 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что при выборе из урны двух шаров они окажутся белыми.

2) На плоскости построены 3 концентрические окружности с радиусами 2 см, 5 см и 8 см. Найти вероятность того, что монета радиуса 1 см, брошенная

наудачу в круг радиуса 8 см (так, что она целиком лежит внутри круга), не пересечет двух других окружностей.

3) Орудие осуществляет стрельбу по цели, для поражения которой необходимо попасть в нее дважды. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,5; в дальнейшем она не меняется при промахах, но после первого попадания вероятность промаха при дальнейших выстрелах уменьшается вдвое. Найти вероятность того, что за первые 3 выстрела будет ровно одно попадание.

4) Прибор может работать в двух режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора, аварийный — в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в аварийном — 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

5) Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неиспользованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

6) Игральную кость бросают два раза. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — суммы выпавших очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1/5, & -1 < x < 2, \\ a, & 2{,}5 < x < 4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0; 3,5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X) = 2$, $D(X) = 12{,}25$. Найти: а) вероятность $P\{-30 < X < 1\}$; б) интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma = 0{,}4$ попадет X.

Вариант № 24

1) В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза выстрелим.

2) Минное заграждение поставлено в одну линию с интервалами между минами в 90 (м). Какова вероятность того, что корабль шириной 15 (м), пересекая это заграждение под прямым углом, подорвется на мине? (Размерами мины можно пренебречь.)

3) Цель, по которой ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей. Для поражения цели достаточно одного попадания в первую часть, или двух попаданий во вторую, или трех попаданий в третью. Если снаряд попал в цель, то вероятность поражения первой, второй и третьей части равна соответственно 0,1, 0,2 и 0,7. Известно, что в цель попало ровно два снаряда. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

4) В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что он подготовлен отлично.

5) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при выстреле составляет 0,8. Найти вероятность того, что непораженной останется одна мишень.

6) Вероятность появления события A в первом опыте равна 0,8, а в каждом последующем опыте она уменьшается вдвое по сравнению с предыдущим. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x/a, & 2 < x < 5, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (4,5; 6).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = 3$, $\sigma = 2{,}5$. Найти: а) вероятность $P\{-13 < X < 5\}$; б) интервал, симметрично расположенный относительно среднего значения, в который с вероятностью $\gamma = 0{,}84$ попадет X.

Вариант № 25

1) Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «математика»?

2) В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 4 точек, наудачу брошенных в круг, ни одна не попадет в квадрат.

3) Имеется две урны, в первой из которых 7 белых и 4 черных шара, во второй — 3 белых и 5 черных. Найти вероятность того, что если выбрать из каждой урны по шару, оба они окажутся белыми.

4) Найти вероятность хотя бы одного появления события A в 10 независимых опытах, если вероятность появления A в каждом опыте равна 0,1.

5) Детали контролируются двумя контролерами. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,4, а ко второму — 0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна — 0,98, а вторым — 0,94. Годная деталь была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил второй контролер.

6) Из колоды в 36 карт выбираются наудачу 4 карты. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа тузов среди выбранных карт.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ae^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2; 1,2).

8) Средняя масса шоколадных конфет, выпускаемых в коробках кондитерской фабрикой, равна 200 г, среднее квадратическое отклонение 5 г. Считая массу m конфет нормально распределенной случайной величиной, найти вероятность того, что масса коробки конфет заключена в пределах (196, 207) г.

Вариант № 26

1) На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

2) На отрезке длины l наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

3) Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания равны соответственно 0,8 и 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Определить вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

4) Для поражения трех целей орудие может произвести не более 5 выстрелов. Вероятность поражения цели при любом выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что будут израсходованы все снаряды.

5) В студенческой группе из 20 человек 5 отличников. Случайным образом из списка группы выбираются 5 человек. Составить ряд распределения случайной величины X — числа отличников среди пятерых выбранных.

6) В каждом из трех матчей хоккейного турнира команда с вероятностью 0,7 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,2 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,1 терпит поражение, не получая за это очков. Найти математическое ожидание и дисперсию числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x}, & 1 < x < a, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения, не меньшие 2.

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m = 1$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение: а) в интервале (–1; 1); б) большее 2; г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 0,5.

Вариант № 27

1) Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

2) Наудачу выбраны два числа в пределах от 0 до 1. Найти вероятность того, что их разность не превысит 0,3.

3) Две наблюдательные станции следят за объектом, который может находиться в двух состояниях S_1 и S_2, случайным образом переходя из одного в другое. Известно, что 30 % времени объект проводит в состоянии S_1, а 70 % — в состоянии S_2. Станция № 1 передает ошибочные сообщения в 2 % случаев, а станция № 2 — в 8 %. В некоторый момент станция № 1 сообщила, что объект находится в состоянии S_1, а станция № 2 — в состоянии S_2. Какому из сообщений следует верить?

4) В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей — 3 девочки и 2 мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

5) Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе — с вероятностью 0,95; третье — с вероятностью 0,8 и четвертое — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно не менее двух испытаний из четырех.

6) В каждом из трех матчей хоккейного турнира команда с вероятностью 0,4 одерживает победу, получая за нее 2 очка, с вероятностью 0,4 играет вничью, получая 1 очко, и с вероятностью 0,2 терпит поражение, не получая за это очков. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} x/8, \ 0<x<a, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (0,2; 0,5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m=-8$, $\sigma=2$. Заданы точки –14, –10, –7, –3, 1 на числовой оси, разделяющие ее на 6 интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина X принимает значения на этих интервалах.

Вариант № 28

1) В урне 15 белых и 10 черных шаров. Один за другим из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что первый шар окажется белым, а второй — черным?

2) Найти вероятность того, что произведение двух случайно выбранных чисел из интервала (0; 1) больше 0,9.

3) Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1=0{,}6,\ \ p_2=0{,}5,\ \ p_3=0{,}8$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

4) Происходит бой между A и B. У A в запасе два выстрела, у B — один. Начинает стрельбу A: он делает по B один выстрел, причем вероятность поражения B равна 0,2. Если B не поражен, он стреляет и поражает A с вероятностью 0,3. Если B промахивается, A делает последний выстрел и поражает B с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в бою будет поражен B.

5) Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Найти вероятность отказа прибора в серии из 3 независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках равны соответственно 0,2, 0,5 и 0,8.

6) Найти закон распределения и дисперсию случайного числа попаданий при 10 выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3, \ 0 < x < 4, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 5).

8) Случайные значения веса зерна распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0,17 г и средним квадратическим отклонением 0,04 г. Доброкачественные всходы дают зерна, вес которых более 0,12 г. Найти процент семян, которые дадут доброкачественные всходы.

Вариант № 29

1) В урне содержится 3 белых, 12 красных и 6 черных шаров. Вынимаются 3 шара наугад. Какова вероятность того, что они все одного цвета?

2) Отрезок разделен на три равные части. Найти вероятность того, что из трех точек, наудачу брошенных на отрезок, на каждой части окажется ровно по одной.

3) Найти вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число не делится ни на 2, ни на 3.

4) В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 2 подготовленных отлично, 1 — хорошо, 4 — посредственно и 3 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что он подготовлен плохо.

5) Для поражения трех целей орудие может произвести не более 6 выстрелов. Вероятность поражения цели при любом выстреле равна 0,3. Определить вероятность того, что будут израсходованы все снаряды и все цели будут поражены.

6) Имеется две урны с шарами: в первой 5 белых и 7 черных шаров, во второй — 3 белых и 4 черных. Из первой урны переложен во вторую один шар, а затем из второй урны извлечено 3 шара. Найти закон распределения и дисперсию числа белых шаров среди трех извлеченных.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, \ -1<x<2, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1,5; 1,5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=2{,}7$ и $D(X)=18$. Найти $P\{|X-2{,}7|>2\}$ и $P\{|X-2{,}7|<6\sqrt{2}\}$.

Вариант № 30

1) Из колоды в 52 карты выбираются без возвращения 4 карты. Найти вероятность того, что все они — разных мастей.

2) Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в правильный треугольник, попадет внутрь вписанной в него окружности.

3) Из полного набора костей домино наугад выбирается кость, затем она возвращается обратно и извлекается еще одна кость. Найти вероятность того, что на двух костях вместе цифра 2 присутствует два раза.

4) Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

5) Проведено 10 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в четырех испытаниях появятся в точности по две шестерки.

6) Вероятность поражения цели при отдельном выстреле постоянна и равна 0,3. Стрельба ведется до первого попадания. Найти закон распределения и математическое ожидание случайного числа произведенных выстрелов.

7) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2ax, \quad 0<x<3, \\ 0, \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (2; 3,5).

8) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, причем $M(X)=3$, $\sigma(X)=2$. Найти $P\{X>2{,}5\}$ и $P\{1<X<4\}$.

Рекомендуемая литература

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М., Высшая школа, 1986.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 2004.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2003.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. М.., Высшая школа, 1986.

6. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. М., Изд. МГУ, 1967.

7. Климов Г.П., Кузьмин А.Д. Вероятность, процессы, статистика: Задачи с решениями. М., Изд. МГУ, 1985.

8. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1982.

9. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., Изд. МГУ, 1963.

10. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., Наука, 1986.

11. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Под ред. А.В. Ефимова. М., Наука, 1984.

12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А.А. Свешникова. М., Наука, 1970.

13. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1982.

14. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М., Наука, 1980.

15. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988.

Оглавление

Наталия Дмитриевна Выск
Юрий Васильевич Селиванов
Вера Ивановна Титаренко

ВЕРОЯТНОСТЬ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания и варианты курсовых заданий
по теории вероятностей

Компьютерная верстка выполнена Селивановым Ю.В.

Под редакцией авторов

Подписано в печать 05.10.04. Формат 60 х 84 $^{1}/_{16}$
Печать на ризографе. Тираж 100 экз.
Заказ № 114

Типография Издательского центра МАТИ
109240, Москва, Берниковская наб., 14