Федеральное агентство по образованию

—

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"МАТИ" – Российский государственный технологический университет имени К.Э.Циолковского

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методические указания и варианты курсовых заданий

Составители: Титаренко В.И.,
Выск Н.Д.

МОСКВА 2007

Оглавление

I. Кратные интегралы……………………………………………………..3

1. Двойной интеграл…………………………………………………………3

2. Тройной интеграл……………………………………………………....4

3. Кратные интегралы в криволинейных координатах……………………4

4. Геометрические и физические приложения кратных интегралов……..7

II. Криволинейные и поверхностные интегралы…………………………13

1. Криволинейные интегралы……………………………………………...13

2. Поверхностные интегралы…………………………………………...…15

3. Геометрические и физические приложения…………………...……17

III. Теория поля……………………………………………………………..21

Варианты курсовых заданий………………………………………………25

Литература…………………………………………………………………54

Методические указания предназначены для студентов 1-2 курсов МАТИ-РГТУ, изучающих в рамках курса высшей математики темы «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы» и «Теория поля». В них рассматриваются основные приемы вычисления соответствующих интегралов, их геометрические и физические приложения, определение характеристик скалярных и векторных полей. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

I. **Кратные интегралы**

1. Двойной интеграл

Рассмотрим в плоскости Оxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, а соответствующие наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим d_1, d_2, ..., d_n. Выберем в каждой части ΔS_i точку P_i.

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$,…, $f(P_n)$ значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ , \qquad (1)$$

называемую **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ в области D. Если существует один и тот же предел интегральных сумм (1) при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек P_i в них, то он называется **двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D** и обозначается

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ . \qquad (2)$$

Вычисление двойного интеграла по области D, ограниченной линиями $y = j_1(x), y = j_2(x)$ $(j_1(x) \le j_2(x))$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ (рис. 1) сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов, или так называемого двукратного интеграла:

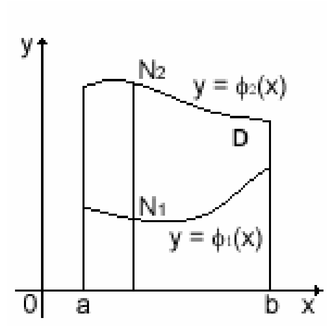


Рис. 1

$$\int_a^b\left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3)$$

2. Тройной интеграл

Понятие тройного интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область *V*, ограниченная замкнутой поверхностью *S*. Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию *f(x, y, z)*. Затем разобьем область *V* на произвольные части Δv_i , считая объем каждой части равным Δv_i , и составим интегральную сумму вида

$$\sum_V f(P_i)\Delta v_i\ , \qquad (4)$$

Предел при $r \to 0$ интегральных сумм (11), не зависящий от способа разбиения области *V* и выбора точек P_i в каждой подобласти этой области, называется **тройным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V*:**

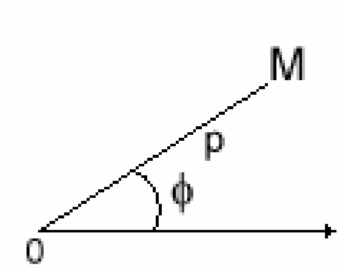
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{r\to 0}\sum_V f(P_i)\Delta v_i\ . \qquad (5)$$

Тройной интеграл от функции *f(x,y,z)* по области *V* равен трехкратному интегралу по той же области:

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \int_a^b\left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)}\left(\int_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \qquad (6)$$

3. Кратные интегралы в криволинейных координатах

Введем на плоскости криволинейные координаты, называемые **полярными**. Выберем точку *O* (полюс) и выходящий из нее луч (полярную ось).



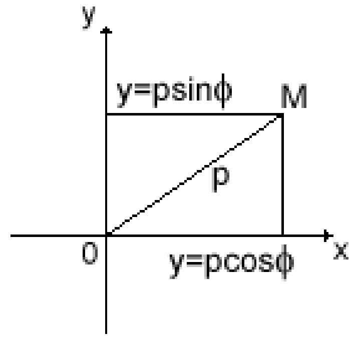


Рис. 2 Рис. 3

Координатами точки M (рис. 2) будут длина отрезка MO – полярный радиус ρ и угол φ между MO и полярной осью: $M(\rho,\varphi)$. Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, $\rho > 0$, а полярный угол φ будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

Связь между полярными и декартовыми координатами точки M можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью (рис. 3).

Тогда $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Отсюда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Зададим в области D, ограниченной кривыми $\rho=\Phi_1(\varphi)$ и $\rho=\Phi_2(\varphi)$, где $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, непрерывную функцию $z = f(\varphi, \rho)$ (рис. 4).

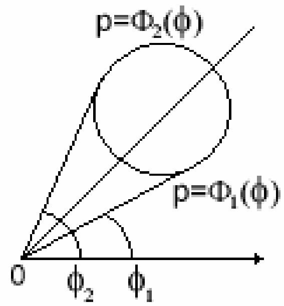


Рис. 4

Тогда

$$\iint\limits_D f(\rho,\varphi)\,d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int\limits_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\, d\rho\right)d\varphi . \qquad (7)$$

В трехмерном пространстве вводятся цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты точки $P(\rho,\varphi,z)$ – это полярные координаты ρ, φ проекции этой точки на плоскость Оxy и аппликата данной точки z (рис.5).

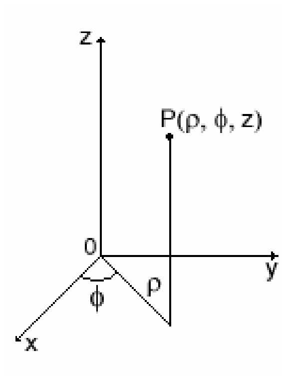


Рис.5

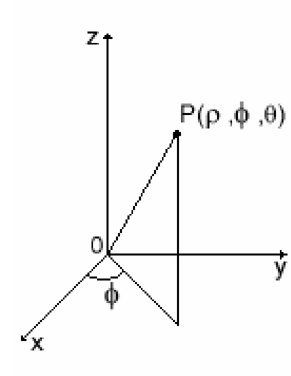


Рис.6

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,\ z = z. \qquad (8)$$

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой r – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), φ – полярным углом между положительной полуосью Оx и проекцией точки на плоскость Оxy, и θ – углом между положительной полуосью оси Оz и отрезком OP (рис.6). При этом

$$\boldsymbol{r} \geq 0,\ \ 0 \leq j < 2p,\ \ 0 \leq q \leq p.$$

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta. \qquad (9)$$

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{f(x,y,z)dxdydz} = \int\limits_{j_1}^{j_2} \boldsymbol{d}j \int\limits_{r_1(j)}^{r_2(j)} r\,\boldsymbol{d}r \int\limits_{\boldsymbol{z}_1(r,j)}^{\boldsymbol{z}_2(r,j)} \boldsymbol{F}_1(r,j,\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz} =$$
$$= \int\limits_{q_1}^{q_2} \sin q\,\boldsymbol{d}q \int\limits_{j_1(q)}^{j_2(q)} \boldsymbol{d}j \int\limits_{\boldsymbol{r}_1(j,q)}^{\boldsymbol{r}_2(j,q)} \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r},j,q)\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{dr}, \qquad (10)$$

где F_1 и F_2 – функции, полученные при подстановке в функцию f вместо x, y, z их выражений через цилиндрические (8) или сферические (9) координаты.

4. Геометрические и физические приложения кратных интегралов

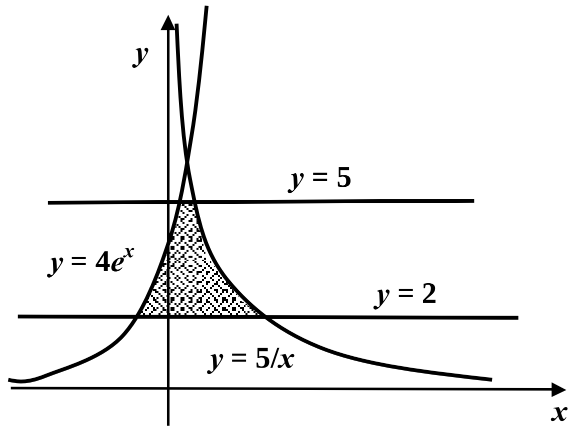
1) Площадь плоской области S:

$$\boldsymbol{S} = \iint_{S} \boldsymbol{dxdy}. \tag{11}$$

Пример 1.

Найти площадь фигуры D, ограниченной линиями $\boldsymbol{y} = \frac{5}{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y} = 4\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$, $y = 2$, $y = 5$.

Решение.



Эту площадь удобно вычислять, считая y внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями $\boldsymbol{x} = \frac{5}{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{x} = \ln\frac{\boldsymbol{y}}{4}$, и

$$\boldsymbol{S} = \int_2^5 \boldsymbol{dy} \int_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} \boldsymbol{dx} = \int_2^5 \left(\boldsymbol{x} \Big|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} \right) \boldsymbol{dy} = \int_2^5 \left(\frac{5}{\boldsymbol{y}} - \ln\frac{\boldsymbol{y}}{4} \right) \boldsymbol{dy} = 5\ln\boldsymbol{y}\Big|_2^5 - \boldsymbol{I}_2,$$

где $\boldsymbol{I}_2 = \int_2^5 \ln\frac{\boldsymbol{y}}{4}\boldsymbol{dy}$ вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$\boldsymbol{u} = \ln\frac{\boldsymbol{y}}{4}, \quad \boldsymbol{du} = \frac{1}{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{dy}, \quad \boldsymbol{dv} = \boldsymbol{dy}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{y}\ln\frac{\boldsymbol{y}}{4}\Big|_2^5 - \int_2^5 \boldsymbol{dy} = 5\ln\frac{5}{4} - 2\ln\frac{1}{2} - 3 = 5\ln 5 - 8\ln 2 - 3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{S} = 5\ln 5 - 5\ln 2 - 5\ln 5 + 8\ln 2 + 3 = 5\ln 2 + 3.$$

2) Объем цилиндроида, то есть тела, ограниченного частью поверхности S: $z = f(x,y)$, ограниченной контуром L, проекцией D этой поверхности на плоскость Oxy и отрезками, параллельными

оси Oz и соединяющими каждую точку контура L с соответствующей точкой плоскости Oxy:

$$V_{цил} = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (12)$$

3) Площадь части криволинейной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, ограниченной контуром L:

$$\boldsymbol{S} = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy, \qquad (13)$$

где D – проекция S на плоскость Oxy.

4) Момент инерции относительно начала координат O материальной плоской фигуры D:

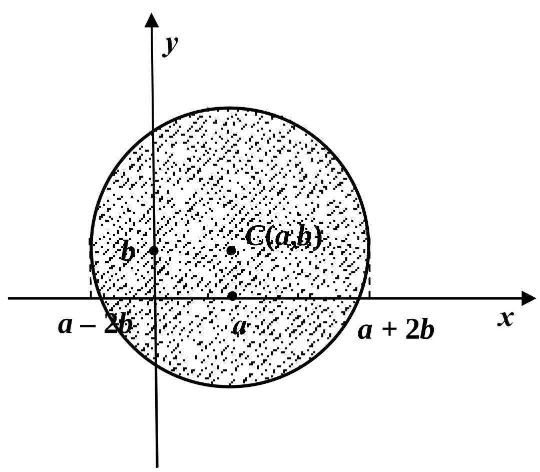
$$I_0 = \iint_D g(x^2 + y^2)dxdy. \qquad (14)$$

Пример 2.

Найти момент инерции однородной круглой пластинки $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 4b^2$ относительно начала координат.

Решение.

В силу однородности пластинки положим ее плотность $\gamma(x,y) = 1$.



Центр круга расположен в точке $C(a, b)$, а его радиус равен $2b$.

Уравнения границ пластинки имеют вид

$$y = b \pm \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}.$$

$$I_0 = \iint_D g(x^2+y^2)dxdy = \int_{a-2b}^{a+2b} dx \int_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_{a-2b}^{a+2b} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} = \int_{a-2b}^{a+2b} x^2 \left(b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} - b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{a-2b}^{a+2b} \left(\left(b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right)^3 - \left(b - \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right)^3 \right) dx = I_1 + I_2.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов отдельно.
Для вычисления интеграла I_1 сделаем замену: $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}\sin\boldsymbol{t}$,

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\cos\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{dx}=2\boldsymbol{b}\cos\boldsymbol{tdt}$, при $x = a - 2b$ $\boldsymbol{t}=-\frac{p}{2}$, при $x = a + 2b$

$\boldsymbol{t}=\frac{p}{2}$.

$$\boldsymbol{I}_1=2\int\limits_{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}^2\sqrt{4\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}\,\boldsymbol{dx}=2\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\sin\boldsymbol{t})^2\,4\boldsymbol{b}^2\cos^2\boldsymbol{tdt}=$$

$$=8\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^2\boldsymbol{tdt}+32\boldsymbol{ab}^3\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^2\boldsymbol{t}\sin\boldsymbol{tdt}+32\boldsymbol{b}^4\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sin^2\boldsymbol{t}\cos^2\boldsymbol{tdt}=$$

$$=4\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(1+\cos 2\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}-32\boldsymbol{ab}^3\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^2\boldsymbol{td}\cos\boldsymbol{t}+8\boldsymbol{b}^4\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sin^2 2\boldsymbol{tdt}=$$

$$=4p\,\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-0+4\boldsymbol{b}^4\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(1-\cos 4\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}=4p\,\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2+4p\,\boldsymbol{b}^4;$$

Для вычисления интеграла I_2 преобразуем подынтегральную функцию по формуле разности кубов:

$$\left(\boldsymbol{b}+\sqrt{4\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}\right)^3-\left(\boldsymbol{b}-\sqrt{4\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}\right)^3=$$
$$=2\sqrt{4\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}\,(7\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2).$$

Тогда

$$\boldsymbol{I}_2=\frac{2}{3}\int\limits_{\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}\sqrt{4\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2}\,\left(7\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2\right)\boldsymbol{dx}=\frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}4\boldsymbol{b}^2\cos^2\boldsymbol{t}\left(7\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{b}^2\sin^2\boldsymbol{t}\right)\boldsymbol{dt}=$$

$$=\frac{56}{3}\boldsymbol{b}^4\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos^2\boldsymbol{tdt}-\frac{32}{3}\boldsymbol{b}^4\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sin^2\boldsymbol{t}\cos^2\boldsymbol{tdt}=\frac{28}{3}p\,\boldsymbol{b}^4-\frac{4}{3}p\,\boldsymbol{b}^4=8p\,\boldsymbol{b}^4.$$

Следовательно, $\boldsymbol{I}_0=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2=4p\,\boldsymbol{b}^2\left(\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{b}^2\right)$.

Моменты инерции фигуры *D* относительно осей *Ox* и *Oy*:

$$I_{xx}=\iint\limits_D y^2dxdy,\quad I_{yy}=\iint\limits_D x^2dxdy \qquad (15)$$

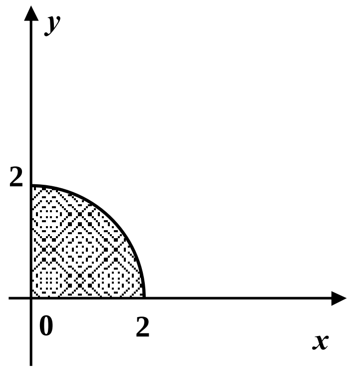
5) Масса плоской фигуры *D* переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma\,(x, y)$:

$$\boldsymbol{M} = \iint\limits_{D} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}. \qquad (16)$$

Пример 3.

Найти массу пластинки D плотности $\gamma = yx^3$, если $\boldsymbol{D}:\begin{cases} \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2 \le 4 \\ \boldsymbol{x} \ge 0,\ \boldsymbol{y} \ge 0. \end{cases}$

Решение.



$$\boldsymbol{M} = \iint\limits_{D} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} = \int_0^2 \boldsymbol{dx} \int_0^{\sqrt{4-\boldsymbol{x}^2}} \boldsymbol{yx}^3\boldsymbol{dy} = \int_0^2 \boldsymbol{x}^3\boldsymbol{dx}\cdot\frac{\boldsymbol{y}^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{4-\boldsymbol{x}^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \boldsymbol{x}^3(4-\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{dx} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^4 - \frac{\boldsymbol{x}^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Координаты центра масс плоской фигуры переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma\,(x, y)$:

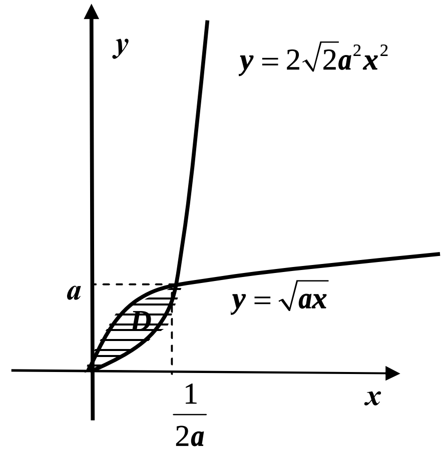
$$x_c = \frac{\iint\limits_{D} g(x,y)xdxdy}{\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy} = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_{D} g(x,y)ydxdy}{\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy} = \frac{M_x}{M} \qquad (17)$$

Пример 4.

Найти центр тяжести однородной пластины D, ограниченной кривыми $y^2 = ax$ и $\boldsymbol{y} = 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{x}^2$.

Решение.

Так как пластина однородна, т.е. ее плотность постоянна, то можно принять ее за единицу.



Тогда $x_c=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$, $\quad y_c=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$.

Найдем массу пластины, а для этого определим абсциссу точки пересечения ограничивающих ее линий:

$$\sqrt{ax}=2\sqrt{2}a^2x^2,\quad ax=8a^4x^4,\quad ax\left(8a^3x^3-1\right)=0,\quad x=0,\, x=\frac{1}{2a}.$$

$$M=\int_0^{\frac{1}{2a}}dx\int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}}dy=\int_0^{\frac{1}{2a}}\left(\sqrt{ax}-2\sqrt{2}a^2x^2\right)dx=\left(\frac{2\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}}=\frac{\sqrt{2}}{12a};$$

$$M_y=\int_0^{\frac{1}{2a}}xdx\int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}}dy=\int_0^{\frac{1}{2a}}\left(\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}a^2x^3\right)dx=\left(\frac{2\sqrt{a}}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}a^2x^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}}=\frac{3\sqrt{2}}{160a^2};$$

$$x_c=\frac{3\sqrt{2}}{160a^2}:\frac{\sqrt{2}}{12a}=\frac{9}{40a}.$$

Соответственно

$$M_x=\int_0^{\frac{1}{2a}}dx\int_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}}ydy=\int_0^{\frac{1}{2a}}\left(\frac{ax}{2}-4a^4x^4\right)dx=\left(\frac{a}{4}x^2-\frac{4a^4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}}=\frac{3}{80a},$$

$$y_c=\frac{3}{80a}:\frac{\sqrt{2}}{12a}=\frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

6) Объем тела V:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz. \qquad (18)$$

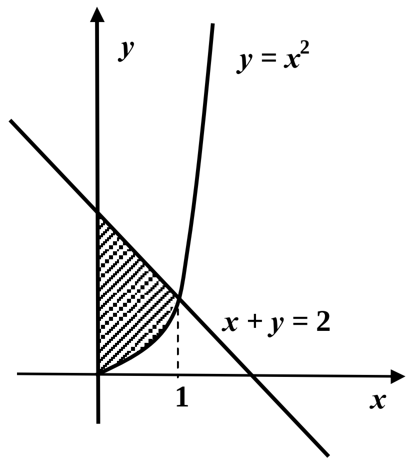
Пример 5.

Найти объем тела V, ограниченного поверхностями $x+y=2,\, x=\sqrt{y}$,

$z = \frac{9x}{5}, z = 0.$

Решение.

Найдем проекцию тела на плоскость Oxy (при этом заметим, что плоскость $z = \frac{9x}{5}$ проектируется на эту плоскость в виде прямой $x = 0$):



Определим абсциссу точки пересечения кривых $y = x^2$ и $x + y = 2$: $x^2 = 2 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = -2 < 0 -$ посторонний корень. Тогда, используя формулу (18), получаем:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy \int_0^{\frac{9x}{5}} dz = \frac{9}{5}\int_0^1 xdx \int_{x^2}^{2-x} dy =$$

$$= \frac{9}{5}\int_0^1 x(2 - x - x^2)dx = \frac{9}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{12} = \frac{3}{4}.$$

7) Масса тела V плотности $\gamma = \gamma\,(x, y, z)$:

$$M = \iiint\limits_V g\,(x, y, z)dxdydz. \qquad (19)$$

8) Моменты инерции тела V относительно координатных осей и начала координат:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)g\,(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{yy} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)g\,(x, y, z)dxdydz, \qquad (20)$$

$$I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)g\,(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)g\,(x, y, z)dxdydz, \qquad (21)$$

где $\gamma\,(x, y, z)$ – плотность вещества.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей *Oyz, Oxz, Oxy*:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint\limits_V x g(x,y,z)\,dxdydz, \\ M_{xz} &= \iiint\limits_V y g(x,y,z)\,dxdydz, \\ M_{xy} &= \iiint\limits_V z g(x,y,z)\,dxdydz. \end{aligned} \qquad (22)$$

9) Координаты центра масс тела:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\iiint\limits_V x g(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{yz}}{M}, \\ y_c &= \frac{\iiint\limits_V y g(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xz}}{M}, \\ z_c &= \frac{\iiint\limits_V z g(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{M}. \end{aligned} \qquad (23)$$

II. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Криволинейные интегралы

Рассмотрим на плоскости или в пространстве кривую L и функцию f, определенную в каждой точке этой кривой. Разобьем кривую на части Δs_i длиной Δs_i и выберем на каждой из частей точку M_i. Назовем d длину наибольшего отрезка кривой: $d = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta s_i$.

Криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой L называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек M_i:

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_L f(x,y,z)ds = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \qquad (24)$$

Если кривую L можно задать параметрически:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad t_0 \le t \le T,$$

то способ вычисления криволинейного интеграла первого рода задается формулой

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \quad (25)$$

В частности, если кривая L задана на плоскости явным образом: $y=\varphi(x)$, где $x_1 \le x \le x_2$, формула (40) преобразуется к виду:

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx. \qquad (26)$$

Теперь умножим значение функции в точке M_i не на длину i-го отрезка, а на проекцию этого отрезка, скажем, на ось Оx, то есть на разность $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

Если существует конечный предел при $\delta \to 0$ интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$, не зависящий от способа разбиения кривой на отрезки и выбора точек M_i, то он называется **криволинейным интегралом второго рода** от функции *f(M)* по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(M)dx = \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i. \qquad (27)$$

Подобным образом можно определить и криволинейные интегралы 2-го рода вида

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dy, \quad \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

Если вдоль кривой L определены функции

$$P(M)=P(x,y,z),\ Q(M)=Q(x,y,z),\ R(M)=R(x,y,z),$$

которые можно считать компонентами некоторого вектора $\vec{F}=\{P,Q,R\}$, и существуют интегралы

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx, \quad \int\limits_{(AB)} Q(x,y,z)dy, \quad \int\limits_{(AB)} R(x,y,z)dz,$$

тогда их сумму называют **криволинейным интегралом второго рода (общего вида)** и полагают

$$\int\limits_{(AB)} \boldsymbol{Pdx+Qdy+Rdz} = \int\limits_{(AB)} \boldsymbol{P(x,y,z)dx} + \int\limits_{(AB)} \boldsymbol{Q(x,y,z)dy} + \int\limits_{(AB)} \boldsymbol{R(x,y,z)dz}.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

где φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (28)$$

Связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-го рода задается **формулой Грина:**

$$\iint_D \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) \boldsymbol{dxdy} = \oint_L \boldsymbol{Pdx} + \boldsymbol{Qdy}, \qquad (29)$$

где L – замкнутый контур, а D – область, ограниченная этим контуром.

Необходимыми и достаточными условиями независимости криволинейного интеграла

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz$$

от пути интегрирования являются:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (30)$$

При выполнении условий (30) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции u. Это позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к определению разности значений u в конечной и начальной точках контура интегрирования, так как

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(MN)} du = u(N) - u(M).$$

При этом функцию u можно найти по формуле

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz + C, \qquad (31)$$

где (x_0, y_0, z_0) – точка из области D, а C – произвольная постоянная.

2. Поверхностные интегралы

Рассмотрим некоторую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее на части $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (при этом площадь каждой части тоже обозначим S_n). Пусть в каждой точке этой поверхности задано значение функции $f(x, y, z)$. Выберем в каждой части S_i точку M_i (x_i, y_i, z_i) и составим интегральную сумму

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

Если существует конечный предел при $r \to 0$ этой интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения поверхности на части и выбора точек M_i, то он называется **поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S** и обозначается

$$\iint_S f(M)dS = \iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{r \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i. \qquad (32)$$

Если поверхность S задается явным образом, то есть уравнением вида $z = \varphi(x, y)$, вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\Omega f(x,y,j(x,y))\sqrt{1+(j'_x(x,y))^2+(j'_y(x,y))^2}\,dxdy, \quad (33)$$

где Ω – проекция поверхности S на плоскость Oxy.

Разобьем поверхность S на части $S_1, S_2, \ldots, S_n$, выберем в каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и умножим $f(M_i)$ на площадь D_i проекции части S_i на плоскость Оxy. Если существует конечный предел суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)D_i\,,$$

не зависящий от способа разбиения поверхности и выбора точек на ней, то он называется **поверхностным интегралом второго рода от функции *f(M)* по выбранной стороне поверхности *S*** и обозначается

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x,y,z)dxdy. \quad (34)$$

Подобным образом можно проектировать части поверхности на координатные плоскости Оxz и Оyz. Получим два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdz \quad \text{и} \quad \iint_S f(x,y,z)dydz.$$

Рассмотрев сумму таких интегралов по одной и той же поверхности соответственно от функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, получим **поверхностный интеграл второго рода общего вида**:

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz. \quad (35)$$

Если D, D' и D'' - проекции поверхности S на координатные плоскости Оxy, Oxz и Oyz, то

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz = \\ &= \pm\iint_D P(x,y,z(x,y))dxdy \pm \iint_{D'} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \\ &\pm\iint_{D'} R(x(y,z),y,z)dydz.\end{aligned} \quad (36)$$

Связь между тройным интегралом по трехмерной области V и поверхностным интегралом 2-го рода по замкнутой поверхности S, ограничивающей тело V, задается **формулой Гаусса-Остроградского:**

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \quad (37)$$

где запись «S^+» означает, что интеграл, стоящий справа, вычисляется по внешней стороне поверхности S.

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности σ и криволинейным интегралом 2-го рода по ограничивающему ее контуру λ с учетом ориентации поверхности:

$$\oint_l \boldsymbol{P}d\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Q}d\boldsymbol{y}+\boldsymbol{R}d\boldsymbol{z}=\iint_s\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{y}}-\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)\cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{x})+\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{z}}-\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{y})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{z})\right]\boldsymbol{d}s=\iint_s\begin{vmatrix}\cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{x}) & \cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{y}) & \cos(\vec{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{z})\\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R}\end{vmatrix}\boldsymbol{d}s\,. \qquad (38)$$

3. Геометрические и физические приложения

1) Длина кривой.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то из определения криволинейного интеграла 1-го рода получаем, что в этом случае он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l=\int_l ds. \qquad (39)$$

2) Масса кривой.

Считая, что подынтегральная функция $\gamma\ (x,\ y,\ z)$ определяет плотность каждой точки кривой, найдем массу кривой по формуле

$$M=\int_l \gamma\,(x,y,z)ds. \qquad (40)$$

Пример 6.

Найти массу кривой с линейной плотностью $\gamma=\dfrac{\rho}{2}$, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 4\varphi$, где $-\dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

Используем формулу (40) с учетом того, что кривая задана в полярных координатах:

$$\boldsymbol{M}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\gamma\,(\rho(\varphi),\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,\boldsymbol{d}\varphi=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{4\varphi}{2}\cdot 4\sqrt{\varphi^2+1}\,\boldsymbol{d}\varphi=$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\varphi^2+1}\,\boldsymbol{d}(\varphi^2+1)=\frac{8}{3}\left(\varphi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{8}{81}\left(\left(4\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

3) Моменты кривой l:

$$M_x=\int_l y\gamma\,(x,y)ds,\ M_y=\int_l x\gamma\,(x,y,z)ds\ . \qquad (41)$$

- статические моменты плоской кривой l относительно осей Оx и Оy;

$$I_0=\int_l (x^2+y^2+z^2)ds \text{ -} \qquad (42)$$

- момент инерции пространственной кривой относительно начала координат;

$$I_x=\int_l (y^2+z^2)ds, I_y=\int_l (x^2+z^2)ds, I_z=\int_l (x^2+y^2)ds \quad \text{-} \qquad (43)$$

- моменты инерции кривой относительно координатных осей.
-

4) Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c=\frac{\int_l xg(x,y,z)ds}{M}, y_c=\frac{\int_l yg(x,y,z)ds}{M}, z_c=\frac{\int_l zg(x,y,z)ds}{M}. \qquad (44)$$

5) Работа силы $\vec{F}=\{P,Q,R\}$, действующей на точку, движущуюся по кривой (AB):

$$\int_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(AB)} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad (45)$$

Пример 7.

Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{x^2y^3, y^2z^3, xyz\}$ вдоль отрезка прямой от точки A(-2;-3;1) до точки B(1;4;2).

Решение.

Найдем канонические и параметрические уравнения прямой AB:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t \Rightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{1}=t,$$

$$\begin{cases} x=3t-2, & dx=3dt; \\ y=7t-3, & dy=7dt; \qquad (t(A)=0, \quad t(B)=1) \\ z=t+1, & dz=dt. \end{cases}$$

$$A=\int_{(AB)} F_x dx+F_y dy+F_z dz=\int_{(AB)} x^2y^3dx+y^2z^3dy+xyzdz=$$

$$=\int_0^1 \left(3(3t-2)^2(7t-3)^3+7(7t-3)^2(t+1)^3+(3t-2)(7t-3)(t+1)\right)dt=$$

$$\int_0^1 \left(9604t^5-6056t^4+25305t^3-8177t^2+993t-261\right)dt=$$

$$=\left(\frac{9604t^6}{6}-\frac{6056t^5}{5}+\frac{25305t^4}{4}-\frac{8177t^3}{3}+\frac{993t^2}{2}-261t\right)\Bigg|_0^1=4225,55.$$

6) Площадь криволинейной поверхности, уравнение которой $z = f(x, y)$, можно найти в виде:

$$S=\iint\limits_{S} dS=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy \qquad (46)$$

(Ω – проекция S на плоскость Оxy).

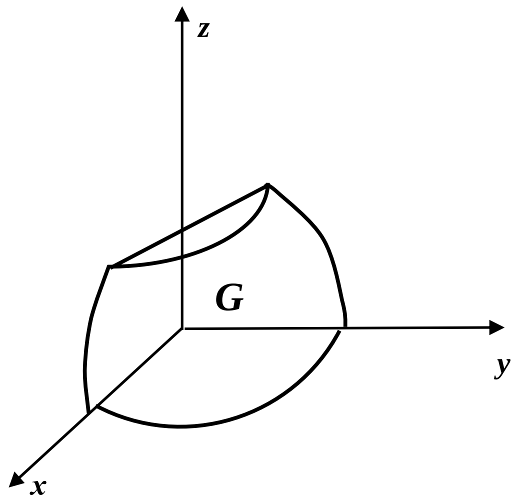
7) Масса поверхности

$$M=\iint\limits_{S} g\,(x,y,z)dS. \qquad (47)$$

Пример 8.

Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}:\begin{cases}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=16\\ \boldsymbol{y}\ge 0\\ 0\le\boldsymbol{z}\le 3\end{cases}$ с поверхностной плотностью $\gamma = 2z^2 + 3$.

Решение.

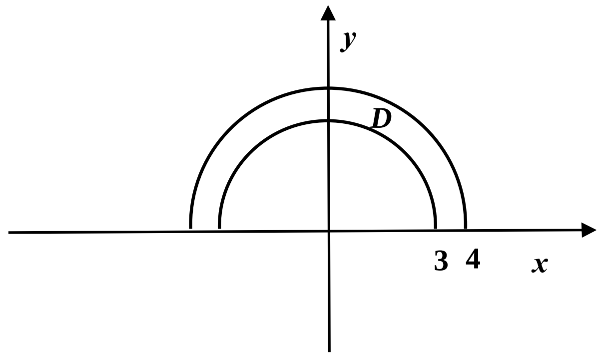


На рассматриваемой поверхности $\boldsymbol{z}=\sqrt{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$,

$\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{x}}=-\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}, \frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{y}}=-\frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}$. Тогда

$$\boldsymbol{dS}=\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{x}^2}{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}+\frac{\boldsymbol{x}^2}{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}\boldsymbol{dxdy}=\frac{4}{\sqrt{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}\boldsymbol{dxdy}.$$

Проекцией D этой поверхности на координатную плоскость Oxy является полукольцо с границами в виде дуг концентрических окружностей радиусов 3 и 4.



Применяя формулу (47) и переходя к полярным координатам, получим:

$$\boldsymbol{M} = 4\iint\limits_{\boldsymbol{D}} \frac{2(16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2)+3}{\sqrt{16-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}\boldsymbol{dxdy} = 4\int\limits_0^p \boldsymbol{d}j \int\limits_3^4 \frac{2(16-r^2)+3}{\sqrt{16-r^2}} r\,\boldsymbol{d}r =$$

$$= 4p\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_7^0 \frac{2\boldsymbol{t}+3}{\sqrt{\boldsymbol{t}}}\boldsymbol{dt} = 2p\int\limits_0^7\left(2\boldsymbol{t}^{\frac{1}{2}}+3\boldsymbol{t}^{-\frac{1}{2}}\right)\boldsymbol{dt} = 2p\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{t}^{\frac{3}{2}}+6\boldsymbol{t}^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^7 =$$

$$= 2p\left(\frac{28}{3}\sqrt{7}+6\sqrt{7}\right) = \frac{92\sqrt{7}}{3}p.$$

8) Моменты поверхности:

$$\boldsymbol{M}_{xy} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{z}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{dS},\ \boldsymbol{M}_{xz} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{y}g\,\boldsymbol{dS},\ \boldsymbol{M}_{yz} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}g\,\boldsymbol{dS} \quad - \qquad (48)$$

статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;

$$I_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)g(x,y,z)dS,\ I_y = \iint\limits_S (x^2+z^2)gdS,\ I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2)gdS \qquad (49)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных осей;

$$I_{xy} = \iint\limits_S z^2 g(x,y,z)dS,\ I_{xz} = \iint\limits_S y^2 gdS,\ I_{yz} = \iint\limits_S x^2 gdS \quad - \qquad (50)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей;

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)g(x,y,z)dS \quad - \qquad (51)$$

- момент инерции поверхности относительно начала координат.

9) Координаты центра масс поверхности:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, y_c = \frac{M_{xz}}{M}, z_c = \frac{M_{xy}}{M}. \qquad (52)$$

III. Теория поля

Если в каждой точке M определенной пространственной области задано значение некоторой скалярной или векторной величины, то говорят, что задано **поле** этой величины (соответственно **скалярное** или **векторное**).

Если в некоторой области задано скалярное поле $U(x,y,z)$, то вектор

$$\vec{g} = gradU = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \qquad (53)$$

называется **градиентом** величины U в соответствующей точке.

Пусть дано векторное поле $\vec{A} = \{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\}$.

Интеграл

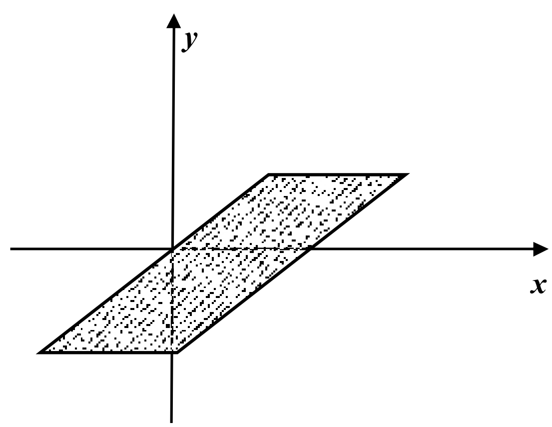
$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{r} \qquad (54)$$

называется **линейным интегралом от вектора** $\vec{A}$ **вдоль кривой** L. Если кривая L замкнута, то этот интеграл называют **циркуляцией вектора** $\vec{A}$ **вдоль кривой** L.

Пример 9.

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{2x + 3y; 2x - x^2 + y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей линий $y = x, y = x - 1, y = \pm 1$ (направление обхода положительно).

Решение.



Воспользуемся формулой Грина:

$$\int_{\Gamma}(2x+3y)\,dx+(2x-x^2+y)\,dy=\iint_{D}(2-2x-3)\,dxdy=$$

$$=-\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{y+1}(2x+1)\,dx=-\int_{-1}^{1}dy\left(x^2+x\right)\Big|_{y}^{y+1}=-\int_{-1}^{1}(2y+2)\,dy=$$

$$=-y^2-2y\Big|_{-1}^{1}=-4.$$

Ротором или вектором вихря векторного поля $\boldsymbol{A}=\{A_x, A_y, A_z\}$, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется вектор, определяемый следующим образом:

$$rot\vec{A}=\left\{\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z};\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x};\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right\}. \qquad (55)$$

Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{A(M)}$, определенное в пространственной области G, ориентированную гладкую поверхность $S\subset G$ и поле единичных нормалей $\boldsymbol{n}(M)$ на выбранной стороне поверхности S.

Поверхностный интеграл 1-го рода

$$\iint_{S}\vec{A}\vec{n}\,dS=\iint_{S}A_n\,dS, \qquad (56)$$

где $\boldsymbol{An}$ – скалярное произведение соответствующих векторов, а A_n – проекция вектора $\boldsymbol{A}$ на направление нормали, называется **потоком векторного поля $A(M)$ через выбранную сторону поверхности S**.

Пример 10.

Найти поток векторного поля $\vec{F}=\{x^2;y^2;2z^2\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}$: $2x+y+2z=1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости образует острый угол с осью Oz).

Решение.

Проекцией данной поверхности на координатную плоскость Oxy является треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(½;\ 0)$.

Найдем координаты единичной нормали к плоскости:

$$\vec{N}=\{2;1;2\},\quad |\vec{N}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3,\quad \vec{n}=\vec{e}_N=\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}.$$

Вычислим соответствующий поверхностный интеграл (формула (56)):

$$\iint\limits_{P}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}\cdot 2z^2\right)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{D}\left(2x^2+y^2+4\left(\frac{1-2x-y}{2}\right)^2\right)\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{1-2x}\left(2x^2+y^2+1-4x+4x^2-2y+4xy+y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{1-2x}\left(6x^2+2y^2+1-4x-2y+4xy\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dx\left(6x^2y+\frac{2}{3}y^3+y-4xy-y^2+2xy^2\right)\Bigg|_0^{1-2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(6x^2-12x^3+\frac{2}{3}(1-2x)^3+1-2x-4x+8x^2-(1-2x)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x^3-3x^4+x-3x^2+\frac{1}{24}(1-2x)^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{96}.$$

$$=$$

Дивергенцией векторного поля $A=\{A_x, A_y, A_z\}$, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется

$$div\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (57)$$

Пример 11.

Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, grad\, u]$, где $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\quad u=x^2y+y^2+xz$.

Решение.

Найдем координаты вектора a:

$$grad\, u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\{2xy+z; x+2y; x\},$$

$$[\vec{c}, grad\, u]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 2xy+z & x+2y & x\end{vmatrix}=$$

$$=\{-8x-10y; -2x+10xy+5z; 2x+4y+6xy+3z\}.$$

Тогда

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-8+10x+3=10x-5;$$

$$rot\,\vec{a}=\left\{\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z};\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x};\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}=$$

$$=\{4+6x-5;-6y;10y-2+10\}=\{6x-1;-6y;10y+8\}.$$

Векторное поле $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ называется **потенциальным**, если вектор A является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(x, y, z)$:

$$A = \text{grad}\, u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (58)$$

При этом функция u называется **потенциалом** данного векторного поля.

Пример 12.

Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}=\{yz(1-\sin xy);xz(1-\sin xy);\cos xy+xy+1\}$$

потенциальным, и в случае положительного ответа найти потенциал u, считая, что в начале координат он равен нулю.

Решение.

Поле является потенциальным, если выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y},\quad \frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial x},\quad \frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z}.$$

В нашем случае

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}=z(1-\sin xy)-xyz\cos xy,$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial a_z}{\partial x}=y(1-\sin xy),\quad \frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z}=x(1-\sin xy).$$

Следовательно, поле $\vec{a}$ – потенциальное. Найдем его потенциал u, считая, что $u(0;0;0) = 0$:

$$u=\int_0^x a_x(x,y,z)dx+\int_0^y a_y(0,y,z)dy+\int_0^z a_z(0,0,z)dz=$$

$$=yz\int_0^x(1-\sin xy)dx+\int_0^y 0dy+\int_0^z 2dz=xyz+z\cos xy-z+2z=z(xy+\cos xy+1).$$

Векторное поле $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ называется **соленоидальным** в области D, если в каждой точке этой области

$$\text{div}\, A = 0. \qquad (59)$$

ВАРИАНТЫ КУРСОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант №1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x},\quad y=4e^{x},\quad y=3,\quad y=4.$$

2. Найти массу тела плотности $g=\dfrac{5(x^2+y^2)}{4}$, ограниченного поверхностями $64(x^2+y^2)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad y=0,\quad z=0.$

3. Найти центр тяжести сегмента параболы $y^2=ax, y=a,$ если плотность $\gamma=1$.

4. Найти массу кривой $r=2\sin j$, $0\le j\le\dfrac{p}{2}$ с линейной плотностью $g=\cos j$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec F=\{x^2,3yz,-xy^2\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(1,2,3)$ до точки $B(0,0,0)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec F=\{x^2y+x-y,\,2x+y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=x^2+1$ и $y=2$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G:x^2+y^2+2z=1,\quad x\le 0, y\ge 0, z\ge 0$ с поверхностной плотностью $\gamma = z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec F=\{x,y,z\}$ через часть плоскости $P:x+y+z=1,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec a=\{-x+y^2,2x^2-y,z\}$ вдоль контура $\Gamma:x^2+y^2=1,$ лежащего в плоскости $z=0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec a=\{xz^2,x^2y,y^2z\}$ через замкнутую поверхность $\Omega:x^2+y^2+z^2=1, z=0\,(z\ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec a=[\vec c,\mathbf{grad}\,u],$ если

$$\vec c=\vec i+\vec j+\vec k,\quad u=xy-yz+2y.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec a=y(z\cos xy+1)\vec i+x(z\cos xy+1)\vec j+\sin xy\vec k$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u=0$.

Вариант №2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$$x^2+y^2=72,\quad 6y=-x^2\ (y\le 0).$$
2. Найти объем тела, заданного неравенствами
$$1\le x^2+y^2+z^2\le 49,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$$
3. Найти центр тяжести верхней половины окружности $x^2+y^2=1$, отсеченной осью Ox, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\rho=3\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ с линейной плотностью $\gamma=\mathbf{tg}\,\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{x+y+z, 10y+x^2, x-yz^2\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(-5,4,2)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{3xy-y, 2x-y^3\}$ по контуру $Г$, состоящему из частей кривых $y = x^2$ и $y = 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2+y^2=z^2,\quad 0\le z\le 1$ с поверхностной плотностью $\gamma = z^2$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F}=\{1,1,-z\}$ через часть плоскости $P: x+y-z=2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{x^2+y, x-y^2, z\}$ вдоль контура $Г: x^2+y^2=2$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\mathbf{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\{x^2, y^2, z^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2=1, z=0, z=2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, \mathbf{grad}\,u]$, если
$$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\quad u=xy+yz+xz.$$
12. Проверить, является ли векторное поле
$$\vec{a}=\frac{2(x\vec{i}+y\vec{j})}{x^2+y^2+1}+2z\vec{k}$$
потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №3

1. Найти массу пластинки с плотностью $\gamma = y^2$, занимающую область

$$\boldsymbol{D}: \quad \boldsymbol{x}^2 + \frac{\boldsymbol{y}^2}{4} \le 1.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{z} = \sqrt{9 - \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2}, \quad \frac{9}{2}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2.$$

3. Найти момент инерции треугольника ABC: $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(3,3)$ относительно оси Ox, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r} = 5\varphi$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ с линейной плотностью $\gamma = \frac{\boldsymbol{r}}{2}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{yz}, 4\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^3, -\boldsymbol{x}\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(2,1,0)$ до точки $B(-5,3,1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x^2$ и $y = x$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 1, \quad \boldsymbol{x} \le 0, \boldsymbol{z} \ge 0$ с поверхностной плотностью $\gamma = 2z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{1, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^2\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}^2, 3\boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{z}\}$ вдоль контура $\Gamma: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 3$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{3\boldsymbol{x}^2, 2\boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{z}^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 6, \boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = [\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad\ u}]$, если

$$\vec{\boldsymbol{c}} = -\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}^2 - 3\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{z}.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{arctg\ yz}\,\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\boldsymbol{xz}\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{xy}\vec{\boldsymbol{k}}}{1 + \boldsymbol{y}^2\boldsymbol{z}^2}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №4

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\boldsymbol{y}^2 - 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^2 = 0, \quad \boldsymbol{y}^2 - 4\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^2 = 0, \quad \boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y} = \sqrt{3}\boldsymbol{x}.$$

2. Найти массу тела плотности $g = 4|\boldsymbol{z}|$, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=4, \quad \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1, \quad \boldsymbol{x}=0\,(\boldsymbol{x}\ge 0, \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\le 1).$$

3. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}=1, \quad \boldsymbol{x}=0, \quad \boldsymbol{y}=0,$ относительно начала координат.

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r}=8j$, $-\dfrac{p}{4}\le j \le \dfrac{p}{4}$ с линейной плотностью

$$g=\frac{1}{\sqrt{1+j^2}}.$$

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}=\{5\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}^3\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(4,2,-3)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}=\{2\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{y}^3+\boldsymbol{x}^2\}$ по контуру $Г$, состоящему из частей кривых $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^3\,(\boldsymbol{x}\ge 0)$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}:\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+1=\boldsymbol{z}^2, \quad 1\le \boldsymbol{z}\le\sqrt{2}$ с поверхностной плотностью $\gamma = 8z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}=\{\boldsymbol{x}, 1, -\boldsymbol{z}^2\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}:-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=4,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}}=\{2\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}^2\}$ вдоль контура $Г:\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=4,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}}=\{\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{yz}, \boldsymbol{xz}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega:\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=\dfrac{25}{4}, \boldsymbol{x}=0, \boldsymbol{z}=0\,(\boldsymbol{x}\ge 0, \boldsymbol{z}\ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}}=[\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad\ u}],$ если

$$\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{i}}-\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{z}^2-2\boldsymbol{yz}+\boldsymbol{x}.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{a}}=(2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{yz})\vec{\boldsymbol{i}}+(2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{xz})\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{3\boldsymbol{xyz}+3\boldsymbol{xy}+1}{1+\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №5

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2=0, \quad \boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2=0, \quad \boldsymbol{y}=0, \quad \boldsymbol{y}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}.$$

2. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}.$$

3. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, \quad y = 0,$ относительно начала координат.

4. Найти массу кривой $r = e^{3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi$ с линейной плотностью $\gamma = \varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{3xy^2z, 5x^2 + y^2, -3xyz^2\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(3,2,-1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x + y^2, 3x^2y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x, \; y = x^3 \; (x \le 0)$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 + 2z = 2, \quad x = 0, y \ge 0, \frac{1}{2} \le z \le 1$ с поверхностной плотностью $\gamma = z^3$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{-x, y, 1\}$ через часть плоскости $P: -x + y - z = 1,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{3x - y^2, x + y^2, z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, x = 0 \; (x \ge 0),$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{xz + y^2, xz - xy, yz\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = 1, z = 2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u],$ если

$$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}, \quad u = x^2 - 2yz.$$

12. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a} = \dfrac{yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №6

1. Найти массу пластинки с плотностью $\gamma = 7x^2 + y$, занимающую область $D: \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y^2 = 4x \; (y \ge 0)$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = \frac{5}{4} - x^2, \quad z = 0.$$

3. Найти центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму $y = x^2$,

$x = 4$, $y = 0$.

4. Найти массу кривой $\rho = 2(1-\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$ с линейной плотностью $\gamma = \sqrt{\varphi}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{3x^2 + 2y^2 + z, -5x^2y, x - y^2\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(1,1,-2)$ до точки $B(3,-2,4)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^3y + x - y, -2xy^2 + y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = -x^2$ и $y = -3$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: 2z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\dfrac{1}{2} \le z \le 1$ с поверхностной плотностью $\gamma = 6z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x^2, z, -y\}$ через часть плоскости $P: -x - y + z = 2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x^2 - 2y, x^2 - y^3, z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, y = 0\,(y \ge 0)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{2x + e^{y+z}, 4y^2, e^{x+y}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x + y + 2z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}, \quad u = xy + yz + z.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (2xz + z^2)\vec{i} + \frac{2yz}{1+y^2}\vec{j} + \left(2xz + x^2 + \ln(1+y^2)\right)\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №7

1. Найти массу пластинки D с плотностью $\gamma = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0\,(x \ge 0, y \ge 0)$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$$

3. Найти центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму $y^2 = ax$, $y = x$.

4. Найти массу кривой $\rho = 7(1+\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma = \sin\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{4x^2y, x^2+z^2, x+yz\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(2,1,0)$ до точки $B(-3,2,-1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x+y, x-y\}$ по контуру $Г$, состоящему из частей кривых $y = -x^2$ и $y = -1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\Gamma: x^2+y^2+z^2 = 4, \quad \sqrt{3} \le z \le 2$ с поверхностной плотностью $\gamma = \sqrt{z}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, 1, z\}$ через часть плоскости $P: x-y-z = 3$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{3x+y^3, 2x^2-y, -z\}$ вдоль контура $Г: x^2+y^2 = 1, \quad y \ge 0,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{x^2, y^2, z^2+1\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2+z^2 = 9, z = 0\,(z \ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{k}, \quad u = xy + xz + y.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №8

1. Найти массу пластинки $D: \quad x^2+y^2 \le 1$ с плотностью $\gamma = y^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = 16\sqrt{2x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad z + x = 2.$$

3. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями

$$x^2+y^2 = a^2, \quad y = 0\,(y \ge 0).$$

4. Найти массу кривой $\rho = 2e^{-\varphi}, -\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le -\pi$ с линейной плотностью $\gamma = \varphi^2$.

5.Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x+y^2+z^3, x^3+y+z, x^2+y^3+z\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(2,4,7)$ до точки $B(0,0,-1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2 + xy + y^2, x^2 - xy + y^2\}$ по контуру *Г*, состоящему из частей кривых $y = x^2$ и $y = -x$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: z^2 - 4 = x^2 + y^2,\ \ x \geq 0, 2 \leq z \leq \sqrt{5}$ с поверхностной плотностью $g = 3\sqrt{z^3}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{1, xy, z\}$ через часть плоскости $P: x + y + z = -4$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости *P* образует острый угол с осью *Oz*).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{-2x^2 + 3y, x + y^2, -z\}$ вдоль контура $Г: x^2 + y^2 =, y = 0\,(y \leq 0)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{x + \sin y, y + \cos x, 1 + tgx\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 = 2{,}25, x = 0, z = 0, z = 1\,(x \geq 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{j} - 2\vec{k}, \quad u = x^2 - y^2 + z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = 2x\, arctg y\, \vec{i} + \left(\frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} + z\right)\vec{j} + y\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал *u*, предполагая, что в начале координат *u* = 0.

Вариант №9

1. Найти массу пластинки с плотностью $\gamma = y$, занимающую область

$$D: \quad y \leq \frac{2}{3}x, \quad y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad \frac{9}{2}z = 10 - y^2, \quad z = 0.$$

3. Найти момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $y = \frac{x}{2}, \quad x = a, \quad y = a,$ относительно оси *Ox*.

4. Найти массу кривой $r = \cos j$, $\frac{p}{6} \leq j \leq \frac{p}{3}$ с линейной плотностью $g = \frac{1}{r^2}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{xy + z, x + yz, x + y^2 - z\}$ вдоль отрезка *AB* от точки *A*(2,4,7) до точки *B*(0,-1,-2).

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2 - y^2, x^2 + y^2\}$ по контуру $Г$, состоящему из частей кривых $y = -x^2$ и $y = -x$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 = 4z + 4, \quad x \le 0, z \le 0$ с поверхностной плотностью $\gamma = 7|z|$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{y, -xy, -z\}$ через часть плоскости $P: x + y + 2z = 1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x - y^3, x^2 - 2y, -z\}$ вдоль контура $Г: x^2 + y^2 = 3, x \ge 0, y \ge 0,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{3xy, -3xy, 4\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x + 2y + 3z = 6, x = 0, y = 0, z = 0, x = 2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j}, \quad u = y^2 + z^2 - x^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \frac{z}{1+y^2}\vec{i} + \frac{2y(1+y^2-xz)}{(1+y^2)^2}\vec{j} + \frac{x}{1+y^2}\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №10

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = 1$, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma = 90y$, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 6z, \quad x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0\, (x \ge 0, y \ge 0).$$

3. Вычислить момент инерции относительно начала координат для однородной прямоугольной пластинки, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

4. Найти массу кривой $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ с линейной плотностью

$$\gamma = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x^3y^3, y^2z^2, xyz\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(-2,-3,-1)$ до точки $B(1,4,2)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy^2, -x^2y\}$ по контуру Γ, состоящему из отрезков прямых $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$, $x \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ с поверхностной плотностью $g = \sqrt{z}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, -xy, z\}$ через часть плоскости $P: x + 2y + z = 2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{-x^2 + y, 2x + y^2, -z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \leq 0$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{x^2, y^2, z^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, z = 0\, (x \geq 0, z \geq 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \textbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}, \quad u = x^2 + y^2 + z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (3x^2 + y^3 + 3x^2z)\vec{i} + 3xy^2\vec{j} + \left(x^3 + \frac{2z}{1+z^2}\right)\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №11

1. Найти массу пластинки плотности $g = \dfrac{2(x+y)}{x^2+y^2}$, заданной неравенствами $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 3y, \quad x^2 + y^2 = 6z, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$$

3. Найти центр тяжести кругового сектора радиуса a с углом раствора □, принимая биссектрису его угла за ось Ox, а вершину – за начало координат, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $r = 1 - \cos j$, $-\dfrac{p}{2} \leq j \leq 0$ с линейной плотностью $g = |\sin j\,|$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x^2y, \sin x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B(\pi, 2\pi)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{2x + y,\, 2x - x^2 - y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x,\, y = x - 1,\, y = \pm 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 + z^2 = 25,\quad 0 \le x \le 3,\, y \ge 0$ с поверхностной плотностью $\gamma = 2z^2 + 1$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x^2, y^2, z^2\}$ через часть плоскости $P: 2x + y + z = -1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x + y^3, 3x^2 + y, -z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 4,\, x \ge 0,\, y \le 0$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{xy,\, yz,\, xz\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 = 4,\, z = -1$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},\quad u = xy + y + z.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = y(1 - z\sin xy)\vec{i} + x(1 - z\sin xy)\vec{j} + \cos xy\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №12

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,\quad x^2 - 8x + y^2 = 0,\quad y = 0,\quad y = x.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8,\quad x = \sqrt{2y},\quad x = 0,\quad z = \frac{30}{11}y,\quad z = 0.$$

3. Найти центр тяжести правой половины круга $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $r = 5e^{2j}$, $\frac{p}{2} \le j \le p$ с линейной плотностью $g = \sin j$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{\cos y, \sin x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A\left(-\frac{p}{2}, p\right)$ до точки $B(0,0)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy + y^3,\, 2x^2y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x$, $x = 1$ и $y = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{z}^2 = 9 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, \quad \boldsymbol{x} \le 0, 3 \le \boldsymbol{z} \le 5$ с поверхностной плотностью $\gamma = 4z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2, -\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} = 2,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{2\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{z}^2\}$ вдоль контура $\Gamma: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 2, \boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0\,(\boldsymbol{x} \le 0, \boldsymbol{y} \le 0),$ лежащего в плоскости z = 0, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{z}^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 2, \boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = [\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad\, u}],$ если

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{yz} - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\left(1 + \boldsymbol{z}(1 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right)\vec{\boldsymbol{i}} + \left(1 + 2\boldsymbol{y}(1 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right)\vec{\boldsymbol{j}}}{1 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}} + \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{k}}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №13

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{36 - \boldsymbol{y}^2}, \quad \boldsymbol{x} = 6 - \sqrt{36 - \boldsymbol{y}^2}.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma = |\boldsymbol{z}|,$ ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 9, \quad \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 4, \quad \boldsymbol{y} = 0\,(\boldsymbol{y} \ge 0).$$

3. Найти координаты центра тяжести пластинки, ограниченной петлей кривой $\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{a}^2 \cos 2\varphi \;\; (\boldsymbol{x} \ge 0)$ если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r} = 4(1 + \sin\varphi), \;\; \pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma = \sqrt{\varphi^3}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{-\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{x}\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B(\pi, 2\pi)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}, 3\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x$, $x = -1$ и $y = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{z} = 1, \quad \boldsymbol{x} \ge 0, \boldsymbol{y} \ge 0, \boldsymbol{z} \ge 0$ с поверхностной плотностью $\gamma = |1 - 2z|$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F}=\{x, y^2, -z^2\}$ через часть плоскости $P: x-2y+z=3$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{-2x^3+3y, 2x^2-y^3, 2z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=1, x=y\,(x\ge y)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\{z^2, z^2, y^2 z\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2+z^2=9, x=0, z=0\,(x\ge 0, z\ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \quad u=xyz.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}=\frac{y(z+1)\vec{i}+x(z+1)\vec{j}}{1+x^2y^2}+\operatorname{arctg} xy\,\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №14

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2-2x+y^2=0, \quad x^2-8x+y^2=0, \quad y=\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=x\sqrt{3}.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=18, \quad x=\sqrt{3y}, \quad x=0, \quad z=0, \quad z=\frac{10y}{11}.$$

3. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$.

4. Найти массу кривой $r=8\sin\varphi$, $1\le\varphi\le e$ с линейной плотностью $\gamma=\dfrac{\ln\varphi}{\varphi}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{\cos y, \sin x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{xy+x-y, -xy+x-y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = -x$, $x = 1$ и $y = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: 4x^2+4y^2=z^2, \quad y\le 0, 0\le z\le 2$ с поверхностной плотностью $\gamma = z^2 + z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{1, xy^2, z^2\}$ через часть плоскости $P: -2x + y + z = 4$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x^2 - y, 3x^3 - y^2, 2z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 2, x = y \, (x \le y)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{x^2, x^2 y, 10xz\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad u = 3x^2 - 2y^2 - z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \left(3yz + \frac{1}{1+x}\right)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (2z + 3xy)\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №15

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{18 - x^2}, \quad y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$$

2. Найти массу тела плотности $g = 90y$, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 6z, \quad x = 0, y = 0, z = 0 \, (x \ge 0, y \ge 0).$$

3. Вычислить момент инерции относительно начала координат для однородной прямоугольной пластинки, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

4. Найти массу кривой $r = 4\cos j$, $0 \le j \le 1$ с линейной плотностью $g = \sqrt{1 + j}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x + y, \cos x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(\pi, 2\pi)$ до точки $B\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy + x + y, -xy + x - y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = -x$, $x = 1$ и $y = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x \le 0, 0 \le z \le 3$ с поверхностной плотностью $g = \sqrt{z}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{xz, yz, -z\}$ через часть плоскости $P: -2x + y - z = 1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{4x^2 + y, x^2 - 2y, 2z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 3,\ x = y\ (x \geq y)$, лежащего в плоскости z = 0, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{xz, xy, xz\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x + y + z = 1,\ x = o,\ y = 0,\ z = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad u = 2x^2 + yz - 4z.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (3x^2 y + x)\vec{i} + (x^3 + \ln(1 + z^2))\vec{j} + \frac{2yz}{1 + z^2}\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат u = 0.

Вариант №16

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = \frac{7}{2}x^2 + y,$, ограниченной линиями $x = 2,\quad y = 0,\quad y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geq 0)$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = \sqrt{15x},\quad y = x\sqrt{15},\quad z = 0,\quad z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$$

3. Вычислить момент инерции однородного эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ относительно оси Ox.

4. Найти массу кривой $r = 10\varphi,\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$ с линейной плотностью $\gamma = \sqrt{1 + \varphi^2}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{\sin y, x - y\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B(-\pi,\pi)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy + 1, xy - 3x^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых y = -x, x = 1 и y = 0 (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2 + y^2 + 16 = z^2,\quad 4 \leq z \leq 5$ с поверхностной плотностью $\gamma = 3z + \sqrt{z^3}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{xy, yz, xz\}$ через часть плоскости $P: -2x - y + z = 2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{y^2 - 2x^3, 2x + y^3, z^3\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 4, x = -y\,(x \le -y),$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{2xy + 1, 4yz + 1, xz\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9, z = 0\,(z \le 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u],$ если

$$\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad u = 3y^2 + xz - y.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \left(\ln(1+z^2) + \frac{2xy}{1+x^2}\right)\vec{i} + \ln(1+x^2)\vec{j} + \frac{2xz}{1+z^2}\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №17

1. Найти массу пластинки плотности $g = \dfrac{2x - 3y}{x^2 + y^2}$, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 25, \quad x = 0, \quad y = 0\,(x \ge 0, y \le 0).$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{17}{4} - y^2.$$

3. Вычислить момент инерции однородного эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ относительно начала координат.

4. Найти массу кривой $r = 6j$, $0 \le j \le \dfrac{p}{2}$ с линейной плотностью $g = 5j$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{xy^2, \cos x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(-\pi,\pi)$ до точки $B(0,0)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^3 + y, 3x^3 + y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x$, $x = 0$ и $y = 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad y \le 0, z \le 2$ с поверхностной плотностью $\gamma = 3z^2$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x^2, -y^2, yz\}$ через часть плоскости $P: 2x + y + z = -3,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{2y - x^3, x^2 + 4y, z^3\}$ вдоль контура $\Gamma : x^2 + y^2 = 1, x = |y| \, (x \geq |y|)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{y^2, x^2, 3x - z\}$ через замкнутую поверхность $\Omega : x^2 + y^2 = 25, z = 1, z = 2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad u = 2xy - 4yz.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 + \frac{y^2}{2} \right)\vec{j} + (xy + y^2 z)\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №18

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = x + y$, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \, (x \geq 0, y \geq 0).$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2, \quad z = \frac{9}{4} - x^2, \quad z = 0.$$

3. Вычислить момент инерции относительно полюса для однородной круглой пластинки с границей $r = 2a\cos\varphi$.

4. Найти массу кривой $r = 3(1 + \cos\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x \sin y, \sin x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy, x + y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x^2$ и $y = x$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\Gamma : x^2 + y^2 = 2z^2, \quad y \leq 0, 0 \leq z \leq \dfrac{1}{2}$ с поверхностной плотностью $\gamma = z^2 + 1$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, -xy^2, xz\}$ через часть плоскости $P : x + 2y + 2z = 4$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x^2 + y, 2x + y^3, -z^3\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 2, x = |y| (x \le |y|)$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{2x + \sin y, 3y + tgx, z^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x - y - z = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{k}, \quad u = x^2 + y^2 - 3z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \frac{(1 + y + z)\vec{i} + (1 + x + z)\vec{j}}{1 + z} + \frac{2xz}{(1 + z)^2}\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №19

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = 16x + \frac{9}{2}y^2$, ограниченной линиями $x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x\,(y \ge 0)$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = 5x^2 + 2, \quad y = 7, \quad x = 0, \quad z = 3y^2 - 2, \quad z = 3y - 7x - 5.$$

3. Вычислить момент инерции относительно полюса для однородной пластинки, ограниченной кардиоидой $r = a(1 - \cos\varphi)$.

4. Найти массу кривой $r = 1 + \sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma = \frac{1}{\sqrt{r}}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x + y, \cos x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ до точки $B(\pi, 2\pi)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy + x^2, x^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x, y = x - 1, x = \pm 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ с поверхностной плотностью $\gamma = z + 5$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, yz, -z\}$ через часть плоскости $P: 2x + y + 2z = -1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x - y^3, 3y^2 - 2x^2, -z^3\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, x \geq -|y|$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{y^2 + 1, y + yz^2, z + x^2 z\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = 0\,(y \geq 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad u = x^2 - 3y^2 + xz.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \frac{2x(1 + x^2 - yz)\vec{i} + (1 + x^2)z\vec{j} + (1 + x^2)y\vec{k}}{(1 + x^2)^2}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №20

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x = 0.$$

2. Найти массу тела плотности $g = 2|z|$, заданного неравенствами

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

3. Вычислить момент инерции круглой пластинки $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2a^2$ относительно оси Oy, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $r = 4e^{\frac{j}{2}}$, $-p \leq j \leq 0$ с линейной плотностью $g = 1 + \cos j$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{\cos y, \cos x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B(-\pi,\pi)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2 y, -xy^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = -x, y = 0, x = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: 4(x^2 + y^2) = z^2 - 4$, $y \leq 0, 2 \leq z \leq \sqrt{8}$ с поверхностной плотностью $g = 4\sqrt{z^3}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, yz, -z\}$ через часть плоскости $P: 2x - 2y + z = 2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{x^2-2y, 4x^3+y^3, -z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=2, x\le|y|$, лежащего в плоскости z = 0, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\{z, xz, z^2\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2+z^2=16, x=0, z=0, z=3\,(x\ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, \mathbf{grad}\,u]$, если

$$\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\quad u=x^2+z^2-4y.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}=2x\ln(1+z)\vec{i}+\ln(1+z)\vec{j}+\frac{x^2+y}{1+z}\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат u = 0.

Вариант №21

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{25}{4}-x^2,\quad y=x-\frac{5}{2}.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma=5x$, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8z,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0, y=0, z=0\,(x\ge 0, y\ge 0).$$

3. Вычислить момент инерции относительно полюса для круглой пластинки с границей $r=2a\sin\varphi$, если плотность γ = 1.

4. Найти массу кривой $r=e^{\frac{5\varphi}{2}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma=1+\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{x^2+y^2, 3xy^3\}$ вдоль линии $\Gamma: y=x^3+5x$ от точки A(1,6) до точки B(2,18).

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{2x+3y^2, xy^3\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=x, y=2, x=0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: 6z-9=x^2+y^2,\quad y\le 0, \frac{3}{2}\le z\le\frac{25}{6}$ с поверхностной плотностью $\gamma=\sqrt{z}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F}=\{yz, y, z^2\}$ через часть плоскости $P: 3x+2y+z=1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{3x^2 + y, -x^3 + y, z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, |x| \geq y,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{\sqrt{yz}, 2y + \sqrt{xz}, 3z\sqrt{xy}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x + 2y + 4z = 8, x = 0, y = 0, z = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad u = x^2 + y^2 - 3z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (x + y\sin^2 y)\vec{i} + (1 + x\sin^2 y + xy\sin 2y)\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №22

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{x}, \quad y = 7e^x, \quad y = 2, \quad y = 7.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma = \mathbf{const}$, заданного неравенствами

$$36 \leq x^2 + y^2 \leq 144, \quad -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0, \quad y \geq x\sqrt{3}, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

3. Вычислить момент инерции пластинки, ограниченной кривыми $y = ax, x = a,$ относительно прямой $y = -a$, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\rho = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ с линейной плотностью $\gamma = \dfrac{2\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x^2 + 3xy^2, -x + 4y^2\}$ вдоль линии $\Gamma: y = x^3$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,8)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{3x + xy + x^2, x + x^2 - y + y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = x^3, y = 1, y = 2, x = 0$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$ с поверхностной плотностью $\gamma = z^3$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, -y, -z\}$ через часть плоскости $P: -3x + 2y - z = -3,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{2\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^3, -\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^2\}$ вдоль контура $\Gamma : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 2, |\boldsymbol{x}| \le \boldsymbol{y},$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{xz}, 3\boldsymbol{y}^2\boldsymbol{z}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 16, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0\, (\boldsymbol{y} \le 0, \boldsymbol{z} \le 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = [\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad}\, \boldsymbol{u}]$, если

$$\vec{\boldsymbol{c}} = 2\vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{e}^{xy} + \boldsymbol{xye}^{xy} + 2)\vec{\boldsymbol{i}} + (\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{e}^{xy} + 1)\vec{\boldsymbol{j}}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №23

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = 4\boldsymbol{x} + 9\boldsymbol{y}^2$, , ограниченной линиями $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = 0\, (\boldsymbol{y} \ge 0).$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}^2 + 4, \quad \boldsymbol{y} = 7, \quad \boldsymbol{z} = 5\sqrt{2\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{y}^2}, \boldsymbol{z} = 1 - \sqrt{2\boldsymbol{x}^2 - 3\boldsymbol{y}^2}.$$

3. Найти центр тяжести однородной пирамиды, ограниченной плоскостями $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}} = 1.$

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r} = 6(1 - \cos\varphi), \quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ с линейной плотностью $\gamma = \boldsymbol{tg}\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{y}, -3\boldsymbol{x}^4\boldsymbol{y}^2\}$ вдоль линии $\Gamma : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + 1$ от точки $A(2,5)$ до точки $B(3,10)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, -\boldsymbol{xy}^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = 1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 16, \quad \boldsymbol{x} \ge 0, \sqrt{7} \le \boldsymbol{z} \le 4$ с поверхностной плотностью $\gamma = \boldsymbol{z}^2 + 2\boldsymbol{z}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{xy}^2, \boldsymbol{z}\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = -3,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{4x^2+y^2,-3x-y^3,-z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=3, |x|\ge -y,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\{x^3, y^3, x^3y^3\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: 9x^2+9y^2=25, z=0, z=2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}, \quad u=xy+yz-2y.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}=\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+2x\right)\vec{i}+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+6y\right)\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №24

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma=\dfrac{x}{y}$, заданной неравенствами

$$1\le x^2+y^2\le 4, \quad x\ge 0, y\ge 2.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=2y^2+3, \quad x=5, \quad z=1+\sqrt{9x^2+4y^2}, \quad z=4+\sqrt{9x^2+4y^2}.$$

3. Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0, y=0, z=0, \quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$ относительно начала координат, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\rho=5\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le\dfrac{2\pi}{3}$ с линейной плотностью $\gamma=\dfrac{\varphi}{2+3\varphi^2}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{2xy, x^2+y\}$ вдоль линии $\Gamma: y=x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{x^2+xy+y, x-y^2-2xy\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=x, y=2x, y=-1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\Gamma: x^2+y^2+1=4z^2, \quad \dfrac{1}{2}\le z\le 1$ с поверхностной плотностью $\gamma=\sqrt{z^5}+\sqrt{z^3}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x, -yz, -z^2\}$ через часть плоскости $P: x + 2y - 3z = 4,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x + y^3, 2x^2 - 3y^2, -z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 4, |x| \le -y,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{8x + 1, y - x, z + xy\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0, x = 1$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u],$ если

$$\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}, \quad u = x^2 - 2xyz.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \left(1 + \frac{y}{x^2y^2 + 1}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{x^2y^2 + 1} - 1\right)\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №25

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 11 - x^2, \quad y = -10.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma = 1,$ заданного неравенствами

$$y \le x\sqrt{3}, \quad 0 \le z \le \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}}, \quad 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad y \le \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

3. Вычислить момент инерции прямого кругового конуса относительно его оси, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $r = e^{-4\varphi}$, $-\pi \le \varphi \le 0$ с линейной плотностью $\gamma = (\varphi^2 - 1).$

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{xy, -x + y^2\}$ вдоль линии $\Gamma: y^2 = x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x + y^2, x - y - y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y = \frac{1}{2}x, y = 2x, y = -1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: 2z = 4 + x^2 + y^2, \quad x \ge 0, y \ge 0, 2 \le z \le 3$ с поверхностной плотностью $\gamma = 4z^2$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{y^2x, z^2y, z^2\}$ через часть плоскости $P: -x+4y-3z=1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x^2-y, -3x^3-y^3, z^3\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=1, x \ge \frac{1}{2}$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \{x^3+\ln y, y^3+\ln x, z^3\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2+z^2=1, z=0\,(z \ge 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad u = x^2+y^2-z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \left(2xe^{x^2-y^2} - \sin x\right)\vec{i} + \left(-2ye^{x^2-y^2} - \sin y\right)\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №26

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = 4x+6y^2$, ограниченной линиями

$$x=2, \quad y=0, \quad y^2=\frac{x}{2}\,(y \ge 0).$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=4+9x^2+5y^2, \quad y=5x^2-2, \quad y=-4x^2+7, z=-1+9x^2+5y^2.$$

3. Вычислить момент инерции кругового конуса относительно диаметра основания, если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\rho = 10\cos\varphi$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ с линейной плотностью $\gamma = \mathrm{tg}^2\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x+y^2, x^2+y\}$ вдоль линии $\Gamma: y=2x^2+3$ от точки $A(0,3)$ до точки $B(2,11)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{xy+1, x^2+y^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=\frac{1}{2}x, y=2x, x=1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2+y^2-25z^2=0, \quad x \le 0, 0 \le z \le 1$ с поверхностной плотностью $\gamma = 5z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F}=\{y, xy, -z^2\}$ через часть плоскости $P: x-4y+z=2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{x^3-y, -x^3-y, z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=1, x\le\frac{1}{2}$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\{x^2+z^2, y^2, 7z\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2=16, y=0, z=0, z=1\,(y\le 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=[\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c}=2\vec{i}+\vec{k}, \quad u=3x^2+yx-z.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\cos x}{y-1}\right)\vec{i}+\frac{1-\sin x}{(y-1)^2}\vec{j}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №27

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2-6x+y^2=0, \quad x^2-2x+y^2=0, \quad y=0, y=x.$$

2. Найти массу тела плотности $\gamma=\frac{5}{3}(x^2+y^2)$, ограниченного поверхностями

$$9(x^2+y^2)=z^2, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, y=0, z=0\,(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0).$$

3. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $az=a^2-x^2-y^2, \quad z=0$.

4. Найти массу кривой $\rho=1+\cos\varphi, \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ с линейной плотностью $\gamma=\cos\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F}=\{xy^3, x-y^2\}$ вдоль линии $\Gamma: y^2=x$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(4,2)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\{xy+x+y, -2x^2y\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=x^2, y=1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\Gamma: x^2+y^2+z^2=25, \quad y\le 0, 3\le z\le 4$ с поверхностной плотностью $\gamma=z^3$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{z}^3\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}: -2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^3, -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2, -\boldsymbol{z}\}$ вдоль контура $\Gamma: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 1, \boldsymbol{y} \ge \frac{1}{2}$, лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 1, \boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = [\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad\, u}]$, если

$$\vec{\boldsymbol{c}} = 2\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{xy}^2 - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{yz}.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}^x \cos \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{e}^x \sin \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{j}}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №28

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = 35\boldsymbol{x}^4\boldsymbol{y}^3$, заданной неравенствами $\boldsymbol{x}^2 + \frac{1}{9}\boldsymbol{y}^2 \le 1, \quad \boldsymbol{y} \ge 0.$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{z} = \sqrt{9 - \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2}, \quad \frac{9}{2}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2.$$

3. Вычислить момент инерции относительно оси Oz для однородного тела, ограниченного поверхностями $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a},$ если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r} = 7\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ с линейной плотностью $\gamma = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2, -\boldsymbol{x}^2\}$ вдоль линии $\Gamma: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 + 3$ от точки $A(0,3)$ до точки $B(1,4)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{xy}, -\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^2 + 1, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $\boldsymbol{G}: 25\boldsymbol{z}^2 - 16 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2, \quad \boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{y} \leq 0, \frac{4}{5} \leq \boldsymbol{z} \leq 1$ с поверхностной плотностью $g = \boldsymbol{z} + 8\sqrt{\boldsymbol{z}^3}$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{-\boldsymbol{xy}, \boldsymbol{yz}, \boldsymbol{z}\}$ через часть плоскости $\boldsymbol{P}: 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} = 4,$ ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{y}, -2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^3, -\boldsymbol{z}^2\}$ вдоль контура $\Gamma: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 1, \boldsymbol{y} \leq \frac{1}{2},$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = \{5\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2, 4\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}, 8\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{z}\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = 36, \boldsymbol{z} = 0\,(\boldsymbol{z} \geq 0)$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{\boldsymbol{a}} = [\vec{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{grad\,u}],$ если

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{j}} - 3\vec{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{xyz} + \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{z}^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле $\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{j}}}{1 - 2\boldsymbol{xy}}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №29

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = 12, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\sqrt{6}\,(\boldsymbol{y} \geq 0).$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{z} = -2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2) - 1, \quad \boldsymbol{z} = 4\boldsymbol{y} - 1.$$

3. Вычислить момент инерции относительно оси Oz для однородного тела, ограниченного поверхностями $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a}\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{z} = 0,$ если плотность $\gamma = 1$.

4. Найти массу кривой $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{e}^{-\frac{j}{2}}, \quad \frac{p}{6} \leq j \leq \frac{p}{3}$ с линейной плотностью $g = \sqrt{3}j$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{-\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{xy}\}$ вдоль линии $\Gamma: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + 2$ от точки $A(1,3)$ до точки $B(3,11)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{y} = -1$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: x^2+y^2+4+8z=0, \quad x \le 0, -1 \le z \le -\frac{1}{2}$ с поверхностной плотностью $\gamma = 1+2z$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{x^2, 1, -z\}$ через часть плоскости $P: -x-y+3z=1$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{x+y^3, -3x^2+y^3, z^2\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2+y^2=1, x \ge \frac{1}{2}, y \ge 0,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \left\{8x^2+1,\ 4x^2y,\ \frac{1}{2}z^2-5\right\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x^2+y^2=36, z=0, z=2$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad u = x^2 - 2y^2 + 3z^2.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = \frac{-2xy\vec{i} + (1+x^2+y^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}}{(1+x^2+z^2)^2}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

Вариант №30

1. Найти массу пластинки плотности $\gamma = \frac{x}{y^5}$, заданной неравенствами

$$x \ge 0, \quad y \ge \frac{x}{2}, \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 3\sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 10 - x^2 - y^2.$$

3. Найти центр тяжести однородного полушара $z \ge 0, \quad x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

4. Найти массу кривой $r = 11\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 1$ с линейной плотностью $\gamma = \mathbf{arctg}\varphi$.

5. Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x-y, x+y\}$ вдоль линии $\Gamma: y^3 = x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2y+xy, -2xy\}$ по контуру Γ, состоящему из частей кривых $y=0, y=1, x=\pm 2$ (направление обхода положительное).

7. Найти массу поверхности $G: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $x \ge 0, 0 \le z \le 1$ с поверхностной плотностью $g = 4z + 3$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{F} = \{yz, xy, z\}$ через часть плоскости $P: x + 2y - 3z = 2$, ограниченную координатными плоскостями (нормаль к плоскости P образует острый угол с осью Oz).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \{2x^6 - 3y^2, -x^2 - 2y^3, z\}$ вдоль контура $\Gamma: x^2 + y^2 = 1, x \ge \frac{1}{2}, y \le 0,$ лежащего в плоскости $z = 0$, в положительном направлении относительно орта k.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = \left\{\frac{1}{2}x^2 + 5, x^2 + \frac{1}{2}z^2, \frac{1}{2}z^2 - 5\right\}$ через замкнутую поверхность $\Omega: x + y + z = 3, x = 0, y = 0, z = 0$ в направлении внешней нормали.

11. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = [\vec{c}, \mathbf{grad}\, u]$, если

$$\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad u = xz - yz + xy.$$

12. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (3x^2 + y^3 + 3x^2 z)\vec{i} + 3xy^2\vec{j} + \left(x^3 + \frac{2z}{1+z^2}\right)\vec{k}$$

потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал u, предполагая, что в начале координат $u = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.2. М.: Наука, 1965.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 1981.
7. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа (под редекцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича). – Т.2. М.: Наука, 1981.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.
9. Титаренко В.И., Выск Н.Д. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. М.: МАТИ, 2006.