МАТИ – РГТУ им. К. Э. Циолковского

Методическое пособие для проведения практических занятий и курсового проекта по теме «Теория поля»

Авторы: Заварзина И.Ф.
Кулакова Р.Д.

Москва 2003г

ВВЕДЕНИЕ.

Данные методические указания предназначены для выполнения практических занятий по теме «Теория поля» и для выполнения курсовой работы по теме «Векторный анализ» для студентов второго курса всех специальностей.

В данной разработке рассматриваются задачи, имеющие прикладной характер. Как показывает опыт, студенты справляются с формальными вычислениями, возникающими при решении задач теории поля. Однако они оказываются в затруднении, если задачи формулируются в терминах прикладных наук: гидродинамики, электродинамики, механики и т.д. Поэтому целесообразно рассматривать при изучении в курсе «Высшая математика» разделы «Теория поля и векторный анализ» физические и механические примеры тесно связанные с прикладными вопросами.

Кроме того, данное пособие способствует успешному выполнению курсовой работы по теме «Векторный анализ» при использовании вариантов из сборника заданий по высшей математике Л.А. Кузнецова.

1. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент.

Определение скалярного поля. Говорят, что задано скалярное поле, если указан закон, в силу которого каждой точке M некоторой области Ω пространства R^3 или R^2 поставлено в соответствие определенное число $(u)M$.

Задание скалярного поля эквивалентно заданию функции трех переменных $u(M)=u(x,y,z)$ при $\Omega\subset R^3$ или функции двух переменных $u(M)=u(x,y)$ при $\Omega\subset R^2$; в последнем случае поле называется плоским.

Множество всех точек $M\in\Omega$, в которых выполняется равенство $u(M)=C$, где C - некоторая постоянная, называется поверхностью уровня, соответствующей числу C. Семейство поверхностей уровня, скалярного поля $u(M)$ определяется уравнением

$u(x,y,z)=C, M(x,y,z)\in\Omega\subset R^3.$

В случае плоского скалярного поля уравнение

$u(x,y)=C, M(x,y)\in\Omega\subset R^2$

определяет семейство линий уровня.

Задача 1. Найти поверхности уровня скалярного поля

$(u)M=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Поверхности уровня данного скалярного поля представляют собой сферические поверхности, определяемые уравнением

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C$.

Или

$x^2+y^2+z^2=C^2$

(см. рис. 1.1).

Задача 2. Найти линии уровня плоского скалярного поля

$u(M)=xy$.

Решение. Линиями уровня данного скалярного поля являются гиперболы, определяемые уравнением

$xy=C$, или.

На рис. 1.2 изображены гипербола (1), определяемая уравнением

$y=\dfrac{C_1}{x}$,

гипербола (2) – уравнением

$y=\dfrac{C_2}{x}$,

и гиперболы (3) и (4) – уравнениями

$y=\dfrac{C_3}{x}$, $y=\dfrac{C_4}{x}$

соответственно.

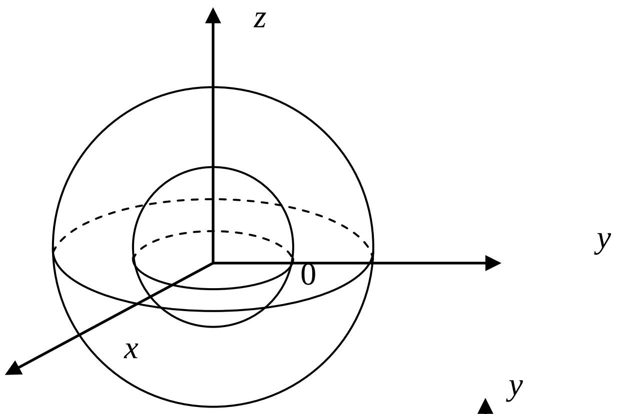
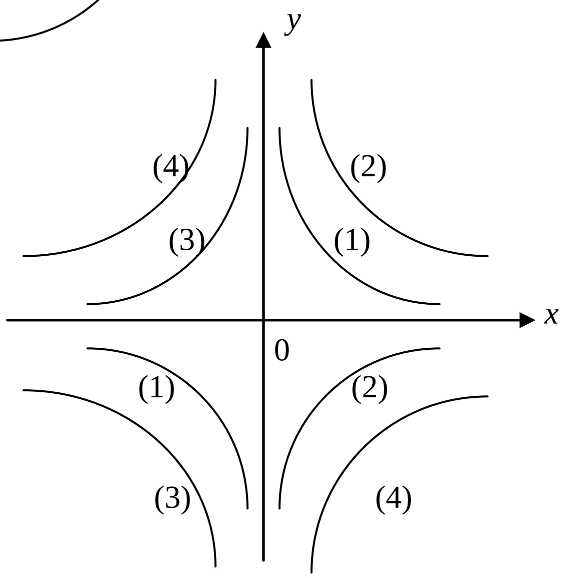


Рис. 1.1



<u>Производная скалярного поля</u>. Производная скалярного поля по направлению, заданному вектором $\bar{l}$, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \text{ , (1.1)}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

$$\bar{l}^{\,0} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

<u>Задача 3</u>. Найти производную поля

$u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$

в точке $M_0(0,0,0)$ по направлению вектора $\bar{l} = \{3,4,0\}$.

<u>Решение</u>

1) Найдем единичный вектор $\bar{l}^{\,0}$:

$$\bar{l}^{\,0} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \frac{3\bar{i} + 4\bar{j} + 0\bar{k}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}.$$

$grad u(M_0) = -3\bar{i} + 2\bar{j}.$

2) Вычисляем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.(2x-3)\right|_{M_0} = -3 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 0,$$

и по формуле (1.1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\cos\gamma=(-3)\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}.$$

Определение градиента скалярного поля. Градиент скалярного поля $u(M)$ есть векторное поле $\operatorname{grad} u$, которое вычисляется по формуле

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Из этого ясно, что формулу (1.1) можно переписать иначе:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\operatorname{grad} u,\bar{l}^{\,0}\right).$$

Следует отметить, что вектор градиента в точке M направлен по нормали к поверхности уровня, на которой находится данная точка.

Задача 4. Найти градиент скалярного поля

$$u(M)=3x^2y-3xy-3xy^3+y^4$$

в точке $M_0(1,2,0)$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{grad} u(M)=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\bar{k}=(\overset{12-6-24}{6xy}-3y-3y^3)\bar{i}+(3x^2-3x-3xy^2)\bar{j},$$

$$\operatorname{grad} u(M)-18\bar{i}-36\bar{j}.$$

$$V_{\max}=\sqrt{18^2+36^2}\approx 18^2$$

Задача5. Найти угол между градиентами скалярных полей

$$u(M)=x^2+y^2-z^2 \text{ и } V(M)=\arcsin\frac{x}{x+y}$$

в точке $M_0\left(1{,}1\sqrt{7}\right)$.

Решение. Для определения $gradu$ и $gradv$ вычисляем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\frac{\partial u}{\partial z}=-2z.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{y}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}},\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{x}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}},\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}=2,\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}=2,\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}=-2\sqrt{7},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{M_0}=\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{M_0}=-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{M_0}=0.$$

По формуле (1.2) находим

$$\operatorname{grad} u(M_0)=2\bar{i}+2\bar{j}-2\sqrt{7}\bar{k},\operatorname{grad} u(M_0)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{i}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{j},$$

затем вычисляем

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{4+4+28} = 6, \left|\operatorname{grad} V(M_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u(M_0)\operatorname{grad} V(M_0))}{\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| \cdot \left|\operatorname{grad} V(M_0)\right|} = \frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} - 2\sqrt{7}\cdot 0}{6\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}} = 0,$$

отсюда $\varphi = \frac{\pi}{2}.$

Дифференциальные свойства градиента

1. $\operatorname{grad}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \operatorname{grad} u + C_2 \operatorname{grad} v, C_1, C_2$ - произвольные постоянные;
2. $\operatorname{grad}(u\cdot v) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v;$
3. $\operatorname{grad}\frac{u}{v} = \frac{1}{v^2}(v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v);$
4. $\operatorname{grad} F(u) = F'(u)\operatorname{grad} u.$

Задача 6. Найти градиент скалярного поля

$u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Используем для нахождения градиента свойство 4. Предварительно найдем $\operatorname{grad} r$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{x}{r}\bar{i} + \frac{y}{r}\bar{j} + \frac{z}{r}\bar{k} = \frac{1}{r}\cdot\bar{r} = \bar{r}^0,$$

$\bar{r}$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$; градиент скалярного поля $f(r)$ равен

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r = f'(r)\frac{\bar{r}}{r} = f'(r)\bar{r}^0.$$

Задача 7. Найти наибольшую скорость возрастания поля

$u(M) = \ln(x^2+4y^2)$

в точке $M_0(6,4,0)$.

Решение. Найдем градиент данного скалярного поля

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \frac{2x}{x^2+4y^2}\bar{j} + \frac{8y}{x^2+4y^2}\bar{j},$$

в точке M_0:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{3}{25}\bar{i} + \frac{8}{25}\bar{j} = \frac{1}{25}(3\bar{i}+8\bar{j}).$$

Наибольшая скорость возрастания поля в точке M_0 равна

$$V_н = \left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \frac{1}{25}\sqrt{9+64} = \frac{\sqrt{73}}{25}.$$

2. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля.

Определение векторного поля. Если каждой точке $M(x,y,z)$ некоторой области $\Omega \in R^3$ поставлен в соответствие определенный вектор

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k},$$

то говорят, что в области задано векторное поле.

В дальнейшем будем считать функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемыми в области Ω.

Векторной линией поля $\bar{a}(M)$ называется линия L, касательная к которой в каждой ее точке совпадает с направлением вектора поля $\bar{a}$ в этой точке.

Пример 1. В поле скоростей движущейся жидкости векторными линиями (линиями тока) являются траектории, описываемые частицами жидкости.

Пример 2. В поле напряженности электростатического поля векторными линиями будут лучи, исходящие из точки, в которой находится заряд.

Уравнения векторных линий имеют вид

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (2.1)$$

Уравнения (2.1) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}.$$

Решение этой системы приводит нас к двум семействам поверхностей:

$\varphi_1(x,y,z) = C_1$ и $\varphi_2(x,y,z) = C_2$.

Попарно пересекаясь, поверхности этих семейств будут определять искомые векторные линии.

Задача 1. Найти векторные линии векторного поля

$\bar{a}(M) = y\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Решение. Система (2.1) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

или $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z},$

откуда $y = C_1 x, z = C_2 x.$

Общее решение рассматриваемой системы представляет собой два семейства пересекающихся плоскостей $y = C_1 x$ и $z = C_2 x$. Векторными линиями являются прямые, проходящие через начало координат.

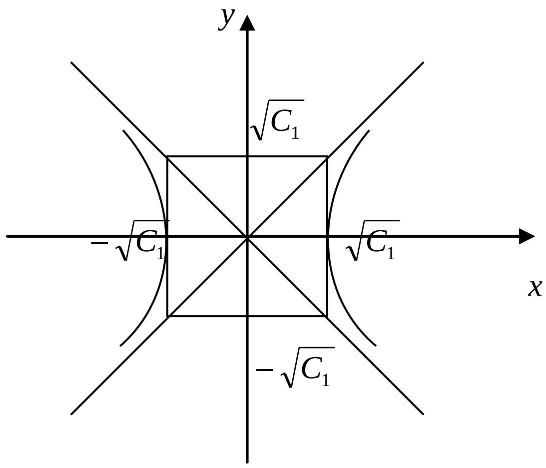
Задача 2. Найти векторные линии векторного поля

$\bar{a}(M) = y\bar{i} + x\bar{j}.$

Решение. Составим систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z},$$

или $\begin{cases} xdx = ydy, \\ dz = 0. \end{cases}$



В результате интегрирования получим

$x^2 - y^2 = C_1, z = C_2,$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Векторными линиями в рассматриваемом поле являются гиперболы, расположенные в плоскостях $z = C_2$.

Поток векторного поля. Одной из важнейших характеристик векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ является скалярная величина, называемая потоком векторного поля через выбранную сторону некоторой двусторонней поверхности, помещенной в этом поле.

Выбор стороны поверхности S определяется единичным вектором нормали $\bar{n}^0$ к данной поверхности

$$\bar{n}^0 = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}.$$

Если поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2.2)$$

то

$$\bar{n}^0 = \pm\frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\bar{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \qquad (2.3)$$

причем знак в правой части выбирается так, чтобы получить нормальный вектор $\bar{n}^0$ именно для рассматриваемой стороны поверхности.

Если поверхность S состоит из нескольких частей, заданных уравнениями вида (2. 2), то вектор нормали вычисляем для каждой части отдельно по той же формуле (2. 3) с учетом выбранной стороны поверхности. В случае замкнутой поверхности условимся всегда выбирать ее внешнюю сторону.

Потоком векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ через двустороннюю поверхность называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{a}(M), \bar{n}^0(M)\right) ds \qquad (2.4)$$

где $\bar{n}^0(M)$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности в ее произвольной точке.

Если заданная поверхность S взаимно однозначно проецируется на координатную плоскость OXY в область σ_{xy}, то вычисление потока через эту поверхность сводится к вычислению двойного интеграла по области σ_{xy}:

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\left(\bar{a}, \bar{n}^0\right)}{|\cos\gamma|}\Big|_{z=z(x,y)} dxdy,$$

где $z = z(x,y)$ - уравнение поверхности $S, \cos\gamma$ – направляющий косинус единичной нормали $\bar{n}^0$.

Если поверхность S взаимно однозначно проецируется на координатную плоскость в область OXY или OXZ ,то поток векторного поля через эту поверхность может быть вычислен соответственно по формулам

$$\Pi = \iint_{\sigma_{yz}} \frac{\left(\bar{a}, \bar{n}^0\right)}{|\cos\alpha|}\Big|_{x=x(y,z)} dydz,$$

$$\Pi = \iint_{\sigma_{xz}} \frac{\left(\bar{a}, \bar{n}^0\right)}{|\cos\beta|}\Big|_{y=y(x,z)} dxdz. \qquad (2.5)$$

В случае, когда поверхность S состоит из нескольких частей, например $S = S_1 + S_2 + ... + S_k$, имеем

$$\Pi = \iint_{S_1} \left(\bar{a}_1, \bar{n}_1^0\right) ds + \iint_{S_2} \left(\bar{a}_1, \bar{n}_2^0\right) ds + ... + \iint_{S_k} \left(\bar{a}_1, \bar{n}_k^0\right) ds, \qquad (2.6)$$

где $n_1^0, n_2^0, ..., n_k^0$ – нормали к поверхностям $S_1, S_2, ..., S_k$, соответственно.

Задача 3. Вычислить поток векторного поля

$\bar{a} = (x + y)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + (x - z)\bar{k}$

через часть плоскости

$x + y + 2z - 1 = 0,$

вырезанную координатными плоскостями; сторон поверхности выбрать так, чтобы нормаль к ней образовывала с осью OZ острый угол.

Решение. Заданную поверхность – треугольник ABC (рис. 2.1) спроецируем на плоскость OXY. Она проектируется в область σ_{xy}, которой является треугольник AOC. Найдем вектор $\bar{n}^0$, учитывая, что по условию задачи он должен составлять с осью OZ острый угол:

$F(x,y,z) = x + y + 2z - 1;$

$\text{grad } F = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k};$

$$\bar{n}^0 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{6}}.$$

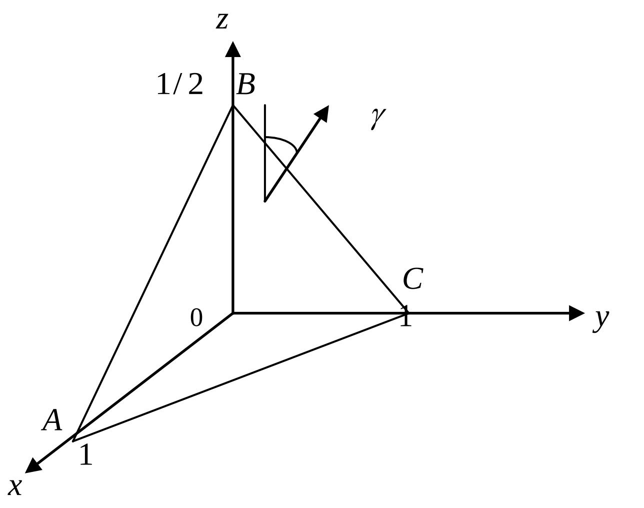


Рис. 2.1.

Здесь $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}} > 0$, следовательно, угол γ - острый.

Далее найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{n}_1^0$:

$$\left(\bar{a}, \bar{n}^0\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y) + \frac{1}{\sqrt{6}}(x-y) + \frac{2}{\sqrt{6}}(y-z) = \frac{2}{\sqrt{6}}(x+y-z)$$

Используем формулу (2.4):

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{a}_1, \bar{n}^0\right) ds = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{(x+y-z)}{2/\sqrt{6}} \Bigg|_{z=\frac{1}{2}(1-x-y)} dxdy == \iint_{\sigma_{xy}} [x+y-\frac{1}{2}(1-x-y)]dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_v (3x+3y-1)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3x+3y-1)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(3xy + \frac{3}{2}y^2 - y\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{(x-1)^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

В некоторых случаях полезно для вычисления потока использовать криволинейные координаты.

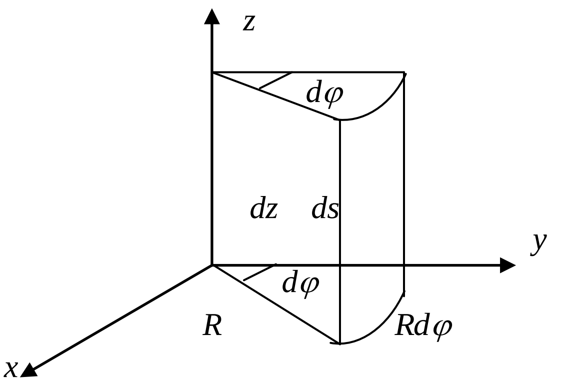


Рис. 2.2

Для кругового цилиндра имеем в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \qquad (2.7)$$

элемент площади поверхности цилиндра выражается формулой

$$ds = Rd\varphi dz \qquad (2.8)$$

(см. рис.)

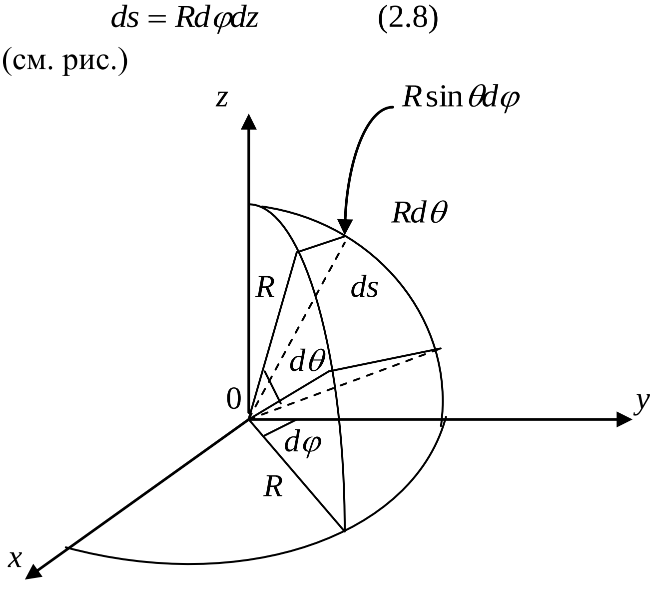


Рис. 2.3.

Для сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

имеем в сферических координатах

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases} \qquad (2.9)$$

элемент площади поверхности сферы выражается формулой

$$ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (2.10)$$

(см. рис.)

Задача 4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{j} + z\bar{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

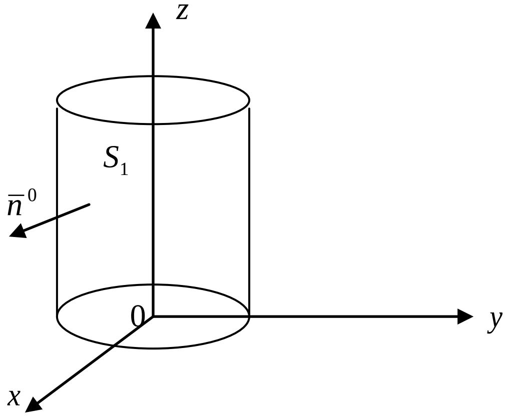


Рис. 2.4.

Решение. 1-й способ. Данный цилиндр проектируется на плоскость XOY в линию, поэтому спроектируем его, например, на плоскость YOZ. При этом придется рассматривать переднюю часть цилиндра $S_1(x \geq 0)$ и заднюю $S_2(x \leq 0)$ (рис. 2.4). На S_1 имеем $F = x^2 + y^2 - 9$,

$$\bar{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{3}, \cos\alpha = \frac{x}{3}.$$

и по формуле (2.5) получаем

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} \left(\bar{a}, \bar{n}_1^0\right) ds = \iint\limits_{S_1} \frac{xy + xy}{3} ds = \frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_{zz}} \frac{xy}{|\cos\alpha|} \Big|_{x = x(y,z)} dydz = \frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_{yz}} \frac{3xy}{x} \Big|_{x = x(x,z)} dydz$$

$$= 2\iint\limits_{\sigma_{yz}} ydydz = 2\int\limits_{-3}^{3} ydy \int\limits_{0}^{1} dz = 18.$$

На S_2 имеем $\bar{n}^0 = \dfrac{x\bar{i} + y\bar{j}}{3}, \cos\alpha = \dfrac{x}{3}$ и по формуле (2.5) получаем

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_1} \left(\bar{a}, \bar{n}_2^0\right) ds = \frac{2}{3} \iint\limits_{\sigma_{yz}} \frac{3xy}{|x|} \Big|_{x = x(y,z)} dydz = -2\iint\limits_{\sigma_{yz}} ydydz = -18.$$

Искомый поток равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 18 - 18 = 0.$

2-й способ. Имеем на цилиндре

$$\bar{n}^0 = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{3},$$

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds = \iint_S \frac{2xy}{3} ds,$$

далее вводим цилиндрические координаты и используем формулы (2.7), (2.8):

$$\Pi = \frac{2}{3} \iint_S 3\cos\varphi \cdot 3\sin\varphi \cdot 3dzd\varphi = 18 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi \int_0^1 dz = 0$$

Задача5. Найти поток векторного поля

$$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{y} + z\bar{k}$$

через внешнюю сторону верхней половины сферы $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. 1-й способ.

На S имеем

$$F = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$\bar{n}^0 = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{i} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \cos\gamma = z > 0$$

(Рис.2.5)

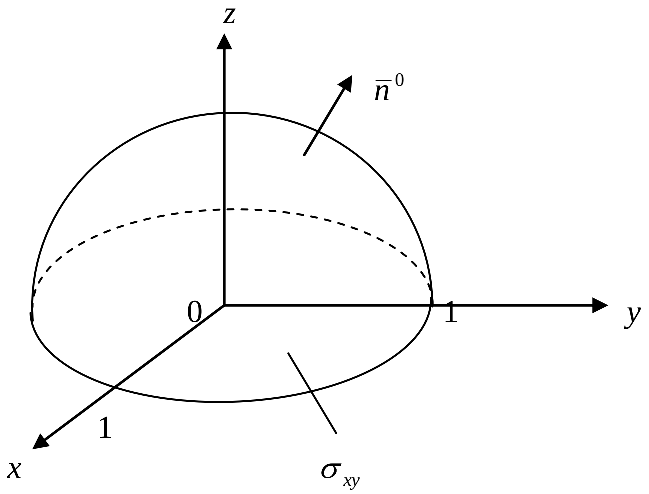


Рис 2.5.

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds = \iint_S \left(xy - xy + z^2\right) ds = \iint_S z^2 ds = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{z^2}{|\cos\gamma|}\bigg|_{z=z(x,y)} dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{z^2}{|z|}\bigg|_{z=z(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{3}\right) \left(1 - \rho^2\right)^{3/2} \bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

2-й способ. Как и в предыдущем случае, получаем $\Pi = \iint_S z^2 ds$, но далее вводим сферические координаты и используем формулы:

$$\Pi = \iint_S z^2 ds = \iint_S \cos^2\theta \sin\theta d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\varphi d\theta = 2\pi \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса.b

Величина потока векторного поля зависит от поверхности, через которую проходит данный поток, и характеризует свойства рассматриваемого векторного поля на этой поверхности. Другая характеристика – дивергенция векторного поля – описывает его в точке.

Дивергенцией векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ в точке называется число, равное пределу отношении потока вектора $\bar{a}(M)$ через замкнутую поверхность S, содержащую внутри себя точку M_0, к величине объема V тела, ограниченного этой поверхностью, когда S произвольным образом стягивается в точку, т.е.

$$\operatorname{div}\bar{a}(M_0) = \lim_{S \to M_0} \frac{\iint\limits_S \left(\bar{a}(M), \bar{n}^0\right) ds}{V}.$$

Данное определение инвариантно относительно выбора системы координат.

Пусть

$$\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k},$$

тогда формула для вычисления $div\bar{a}$ принимает вид

$$\operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \qquad (3.1)$$

Задача 1. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\bar{a}(M) = 2xy\bar{i} + (x-y)\bar{j} + xz^3\bar{k}$$

в точке $M_0(1,1,1)$.

Решение. Найдем частные производные от функций

$$P = 2xy, Q = (x-y), R = -xz^3$$

По соответствующим переменным в произвольной точке:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2y, \frac{\partial Q}{\partial y} = -1, \frac{\partial R}{\partial z} = -3xz^2.$$

Тогда $\operatorname{div}(M_0) = 2 - 1 - 3 = -2$.

Теорема Остроградского – Гаусса. Если вектор-функция $\bar{a}(M)$ непрерывна вместе со своими частными производными в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, то поток векторного поля $\bar{a}(M)$ через эту поверхность в направлении ее внешней нормали равен тройному интегралу по области V от дивергенции этого векторного поля, т.е.

$$П = \iint\limits_S \left(\bar{a} \cdot \bar{n}^0\right) ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}dv \qquad (3.2)$$

Задача 2. Вычислить поток векторного поля

$$\bar{a}(M) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

через замкнутую поверхность, образованную конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$. Поверхность ориентирована по внешней нормали.

Решение.

а) Вычисление потока при помощи теоремы Остроградского – Гаусса. Имеем по формуле (3.2)

$$П = \iint\limits_S \left(\bar{a} \cdot \bar{n}^0\right) ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}dv,$$

где $S = S_1 + S_2$ (рис. 3.1),

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 0 + 1 = 2,$$

$$\Pi = \iiint\limits_V 2dv = 2\iiint\limits_V dv = 2 \cdot \frac{1}{3} h \cdot S_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

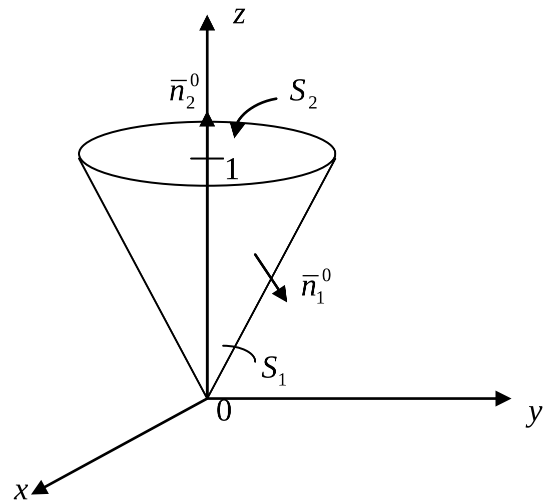


Рис. 3.1.

б) Непосредственное вычисление потока. Имеем по формуле (2.6)

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{S_1} \left(\bar{a} \cdot \bar{n}_1^0\right) ds + \iint\limits_{S_2} \left(\bar{a} \cdot \bar{n}_2^0\right) ds.$$

Найдем вектор $\bar{n}_1^0$ для поверхности. Уравнение этой поверхности имеет вид $x^2 + y^2 = z^2$, или $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Имеем $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$$\bar{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Нормаль $\bar{n}_1^0$ образует тупой угол с положительным направлением оси OZ, так как $\cos\gamma = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} < 0$ и, следовательно, является внешней нормалью к S_1. Далее получаем по формуле (2.2)

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} \left(\bar{a} \cdot \bar{n}_1^0\right) ds = \iint\limits_{S_1} \frac{x^2 + y - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{x^2 + y - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Bigg|_{z^2 = x^2 + y^2} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\left(y - y^2\right)}{z} \Bigg|_{z = \sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{y - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho \sin\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi}{\rho} \rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho \sin\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \sin\varphi - \frac{\rho^3}{3} \sin^2\varphi\right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin\varphi - \frac{1}{3} \sin^2\varphi\right) d\varphi = -\frac{1}{2} \cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \varphi\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{3}.$$

Теперь выбираем нормальный вектор $\bar{n}_2^0 = k$ к плоскости $z = 1$ и вычисляем

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} \left(\bar{a} \cdot \bar{n}_2^0\right) ds = \iint_{S_2} z ds = \iint_{\sigma_{xy}} dxdy = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$

В результате поток векторного поля через замкнутую поверхность равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

<u>Задача 3</u>. Вычислить поток векторного поля

$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

через внешнюю сторону замкнутой поверхности

$S : \left\{x^2 + y^2 = 4 - z, z \geq 0\right\}$

а) непосредственно, б) по теореме Остроградского – Гаусса.

<u>Решение</u>. а) На параболоиде S_1 имеем (рис. 3.2)

$$F = x^2 + y^2 + z + 4$$

$$\bar{n}_1^0 = \frac{\operatorname{grad} F}{\left|\operatorname{grad} F\right|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} > 0,$$

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} \left(\bar{a} \cdot \bar{n}_1^0\right) ds = \iint_{S_1} \frac{2x^2 + 2y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} ds = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{2x^2 + 2^2 y + z}{\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}} \Bigg|_{z = z(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} \left(2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_{\sigma_{xy}} \left(x^2 + y^2 + 4\right) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\rho^2 + 4\right) \rho d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + 2\rho^2\right)\Bigg|_0^2 = 24\pi$$

(здесь σ_{xy} - круг $x^2 + y^2 \leq 4$)

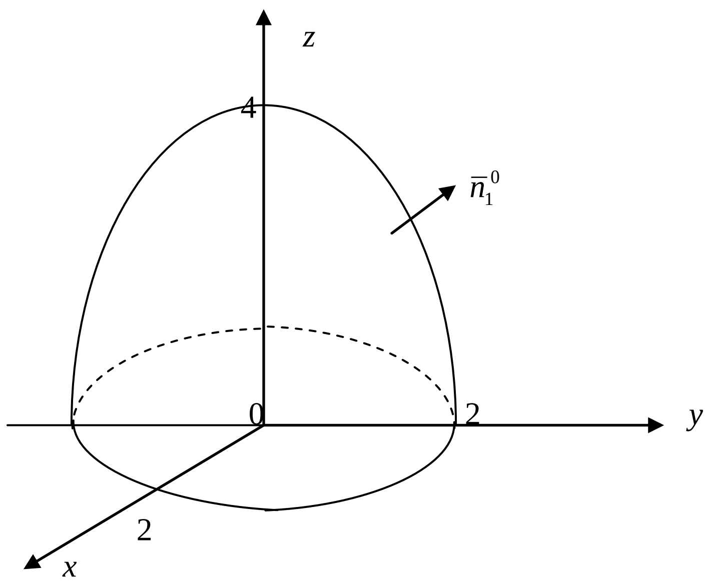


Рис. 3.2

На плоскости $z=0$ имеем $\bar{n}_2^0=-\bar{k}, S_2: x^2+y^2\le 4,$

$$\Pi_1=\iint\limits_{S_2}\left(\bar{a}\cdot\bar{n}_2^0\right)ds=\iint\limits_{S_2}(-z)ds=\iint\limits_{S_2}0\cdot ds=0.$$

Искомый поток равен $\Pi=\Pi_1+\Pi_2=24\pi.$

б) Имеем $\operatorname{div}\bar{a}=1+1+1=3,$

$$\Pi=\iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}dv=3\iiint\limits_V dv=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_0^{4-\rho^2}dz=6\pi\int\limits_0^2\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho=24\pi.$$

4. Линейный интеграл в векторном поле. Циркуляция векторного поля.

Одно из основных понятий теории поля – это понятие циркуляции векторного поля. Циркуляция, будучи одной из характеристик поля, предназначается для исследования вихревых векторных полей, т.е. полей, обладающих замкнутыми векторными линиями.

Пусть задано векторное поле $\bar{a}(M)$ и в нем выбрана ориентированная кривая L, т.е. кривая с указанным направлением движения по ней.

<u>Линейным интегралом вектора $\bar{a}(M)$ по дуге</u> называется число, равное криволинейному интегралу

$$\int\limits_L\left(\bar{a}\cdot\bar{\tau}^0\right)dl=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz, \qquad (4.1)$$

где $\bar{\tau}^0$ - единичный касательный вектор к кривой L, dl - дифференциал.

Линейный интеграл вектора $\bar{a}(M)$ вдоль замкнутой кривой называется <u>циркуляцией векторного поля $\bar{a}$ вдоль кривой L</u> и обозначается

$$Ц=\oint\limits_L\left(\bar{a}\cdot\bar{\tau}^0\right)dl=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz \qquad (4.2)$$

Простейший физический смысл интегралов (4.1) и (4.2) – работа силового поля $\bar{a}(M)$ при перемещении в нем материальной точки по кривой L.

<u>Задача1</u>. Вычислить работу силового поля

$$\bar{F}=\left(3x^2+y^2\right)\bar{i}+2\bar{j}$$

вдоль дуги L эллипса

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad (4.3)$$

от точки $M_0(2,0)$ до точки $N(0,3)$ (рис. 4.1)

<u>Решение</u>. Параметрические уравнения эллипса (4.3) имеют вид

$$\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=3\sin t.\end{cases}$$

В точке M имеем $t=0$, в точке N имеем $t=\dfrac{\pi}{2}$.

Так как

$$dx=-2\sin tdt.dy=3\cos tdt,$$

То работа равна

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L \left(3x^2 + y^2\right)dx + 2dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(12\cos^2 t + 9\sin^2 t\right)\left(-2\sin t\right) + 6\cos t\right]dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(12\cos^2 t + 9 - 9\cos^2 t\right)\left(-2\sin t\right) + 6\cos t\right]dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 td\cos t - 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin tdt + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos tdt =$$

$$= 6 - 2 - 18 = -14.$$

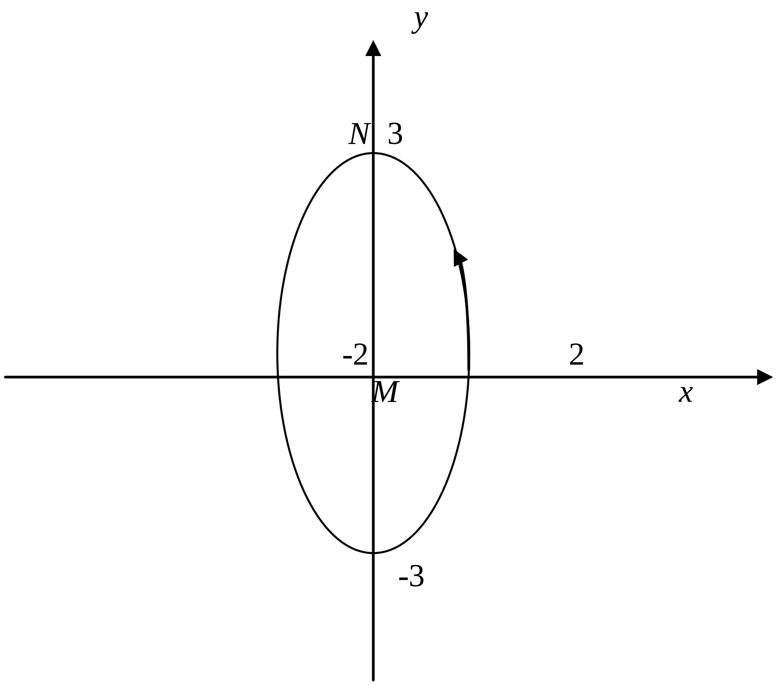


Рис. 4.1.

Задача 2. Вычислить циркуляцию плоского поля, имеем

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy = \oint_L ydx$$

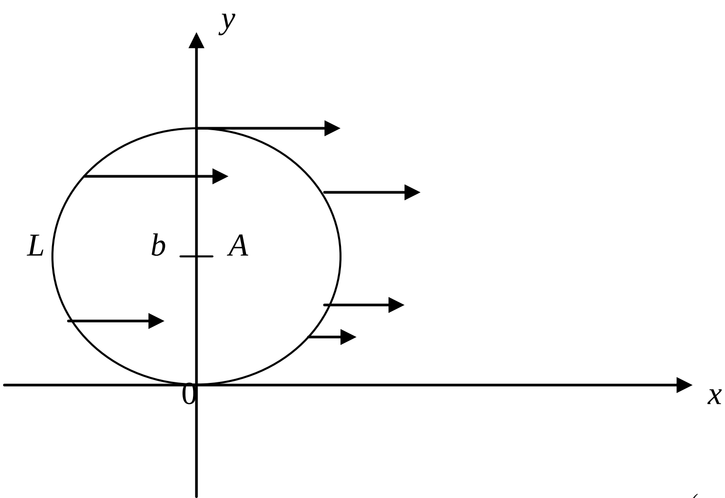
Кривая L здесь - это окружность радиуса b с центром в точке $A(0,b)$. Вычисления удобно вести, когда окружность L задана параметрическими уравнениями:

$$x = b\cos t \qquad 0 \le t < 2\pi$$
$$y = b\sin t$$

Тогда получим

$$Ö = \oint_L \left(\bar{a} \cdot \bar{\tau}^0\right) dl = \oint_L ydx = -\int_0^{2\pi} b^2 \sin^2 tdt = -b^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= -b^2 \left[\frac{1}{2} t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -b^2 \pi.$$



<u>Задача 3</u>. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}\left(M\right)=2y\overline{i}-3x\overline{j}+3x\overline{k}$ вдоль контура $L:\left\{x^2+y^2=1, x+y+z=3\right\}$.

<u>Решение</u>. Линия представляет собой линию пересечения цилиндра с плоскостью. Ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=3-x-y=3\cos t-\sin t \end{cases}$$

$0\le t<2\pi$

Имеем

$$\ddot{O}=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_L 2ydx-3xdy+Rdz=\oint\limits_L 2ydx-3xdy+xdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[-2\sin^2 t-3\cos^2 t+\cos t\left(\sin t-\cos t\right)\right]dt=\int\limits_0^{2\pi}\left[-2-2\cos^2 t+\cos t\cdot\sin t\right]dt=$$

$$=-2t\Big|_0^{2\pi}-t\Big|_0^{2\pi}-\frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{\sin^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\pi-2\pi=-6\pi.$$

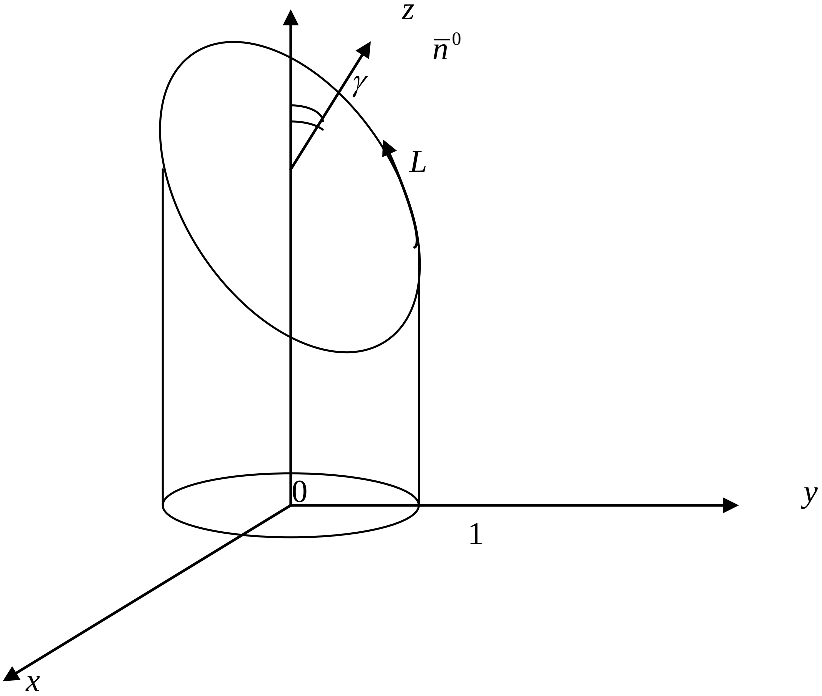


Рис .4.3.

5. Ротор векторного поля. Теорема Стокса.

Пусть в векторном поле $\overline{a}(M)$ выбрана некоторая точка M и некоторое направление, заданное вектором $\overline{n}^0$. Проведем через точку M плоскость перпендикулярно вектору $\overline{n}^0$ и рассмотрим в этой плоскости замкнутый контур L, содержащий точку M. (рис. 5.1) Ориентируем контур таким образом, чтобы из конца вектора $\overline{n}^0$ обход контура был виден происходящим против часовой стрелки. Вычислим циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)$ вдоль контура L.

$$Ц = \oint_L \left(\overline{a} \cdot \overline{\tau}^0\right) dl.$$

Если теперь взять отношение циркуляции к площади S плоской фигуры, ограниченной контуром L, и перейти к пределу при $S \to 0$ (при стягивании контура L в точку M), получим плотность циркуляции векторного поля $\rho_Ц$ в точке M по направлению $\overline{n}^0$.

$$\lim_{l \to M} \frac{\oint_L \left(\overline{a} \cdot \overline{\tau}^0\right) dl}{S} = \rho_Ц.$$

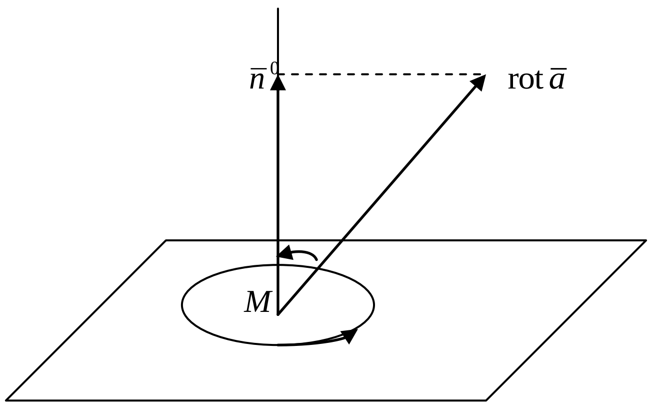


Рис. 5.1.

Ротором (вихрем) векторного поля $\overline{a}(M)$ в точке M называется вектор $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$, проекция которого на любое направление $\overline{n}^0$ равна плотности циркуляции поля $\overline{a}(M)$ по этому направлению, т.е.

$$Пр_{\overline{n}^0} \operatorname{rot}\overline{a}(M) = \rho_Ц,$$

а, следовательно, наибольшее значение плотности циркуляции в точке M равняется $|rot\overline{a}(M)|$.

Данное определение ротора является инвариантным относительно выбора системы координат.

Формула для вычисления ротора векторного поля

$$\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$$

имеем вид

$$\operatorname{rot}\overline{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

$$rot\overline{a}(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad (5.1)$$

Теорема Стокса. Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными на гладкой поверхности S и на ее границе L, то справедлива формула Стокса

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds, \qquad (5.2)$$

здесь выбрана та сторона поверхности S, из конца нормали к которой обход контура L наблюдается происходящим против часовой стрелки (контур L обходится против часовой стрелки) (рис. 5.2).

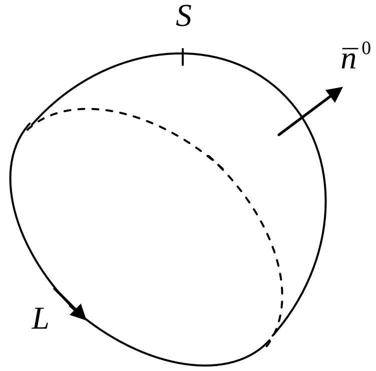


Рис. 5.2.

Задача 1. Решить задачу 3 и з п. 4 при помощи теоремы Стокса.

Решение. Находим $rot\bar{a}(M)$

$$rot\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -3x & x \end{vmatrix} = \bar{i}(0-0) - \bar{j}(1-0) + \bar{k}(-3-2) = -\bar{j} - \bar{k}.$$

В качестве поверхности S рассматриваем плоскость

$x + y + z = 3$ или $x + y + z - 3 = 0$

В соответствии с направлением обхода контура выбираем ту сторону плоскости, нормаль к которой образует с положительным направлением оси OZ острый угол (рис. 4.3):

$$F(x,y,z) = x + y + z - 3; \bar{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Далее по теореме Стокса получаем

$$Ц = \iint_Ц \left(\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds = \iint_S \frac{-1-5}{\sqrt{3}} = -\frac{6}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = -\frac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma_{xy}} dxdy = -6\pi \cdot 1^2 = -6\pi.$$

Задача 2. Найти, используя формулу Стокса, циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$

по контуру $ABCA$ (рис .5.3), полученному при пересечении параболоида $\bar{a}(M) = x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями.

Решение. Воспользуемся формулой (5.2):

$$Ц=\oint_L\left(\bar a,\bar\tau^0\right)dl=\iint_S\left(rot\bar a,\bar n^0\right)ds;$$

$$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & -x^2 & z^2\end{vmatrix}=-2\left(x+y\right)\bar k,$$

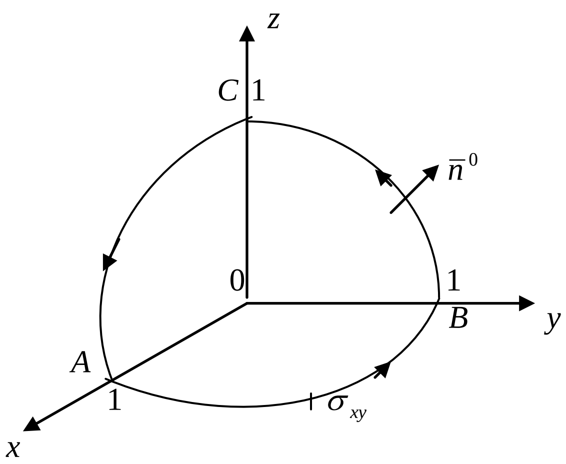
$$\bar n^0=\frac{\operatorname{grad}F}{\left|\operatorname{grad}F\right|},F\left(x,y,z\right)=x^2+z^2-1+y;$$

$$\bar n^0=\frac{2x\bar i+\bar j+2z\bar k}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}};$$

$$Ц=\iint_S-2\left(x+y\right)\frac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}ds=-2\iint_{\sigma_{xy}}\left(x+y\right)dxdy=-2\int_0^1dx\int_0^{1-x^2}\left(x+y\right)dy=$$

$$=-2\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x^2}dx=-2\int_0^1\left[x\left(1-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2\right]dx=-\frac{7}{10};$$

$$ds=\frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|};\cos\gamma=\frac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}.$$



Задача 3. Вычислить циркуляцию векторного поля

$\bar a\left(M\right)=x\bar j-z\bar k$

вдоль контура, полученного при пересечении конуса

$x^2+y^2=\left(z-3\right)^2$

с координатными плоскостями (см. рис. 5.4)

а) непосредственно, б) по теореме Стокса..

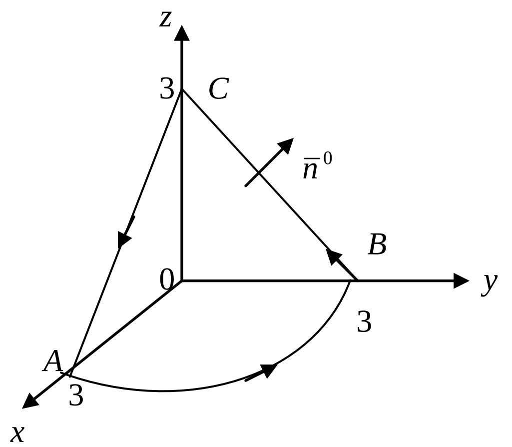


Рис. 5.4.

<u>Решение</u>. а) Линия L состоит из двух отрезков BC и CA дуги $\overset{\cup}{AB}$ окружности.

1) На отрезке BC имеем

$$x=0, dx=0;$$

$$y=3-z; dy=-dz\left(0\le z\le 3\right)$$

$$\int\limits_{BC} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{BC} -zdz=-\int\limits_{0}^{3} zdz=-\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^3=-\frac{9}{2}.$$

2) На отрезке CA имеем

$$y=0, dy=0;$$

$$x=3-z; dx=-dz,$$

$$\int\limits_{CA} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{CA} xdy-zdz=-\int\limits_{CA} zdz=-\int\limits_{3}^{0} zdz=-\left.\frac{z^2}{2}\right|_3^0=\frac{9}{2}.$$

3) На дуге $\overset{\cup}{AB}$ имеем

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=0 \end{cases}$$

параметрические уравнения дуги $\overset{\cup}{AB}$ имеют вид

$$\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}, \\ z=0, \end{cases}$$

поэтому

$$dx=-3\sin tdt,$$

$$dy=3\cos tdt,$$

$$dz=0,$$

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} xdy-zdz=\int\limits_{0}^{1/2}\left(3\cos t\cdot 3\cos t\right)dt=\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{1/2}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{9}{2}\left.\left(1-\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\pi/2}=\frac{9}{4}\pi.$$

в итоге получаем

$$Ц=\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}+\int\limits_{AB}=-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi.$$

б) Вычисляем циркуляцию по теореме Стокса. Находим

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & -z \end{vmatrix} = 0\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + \bar{k} = \bar{k}.$$

В качестве поверхности S выбираем конус

$x^2 + y^2 = (z-3)^2$,

Тогда (см. рис. 5.4)

$$\bar{n}^0 = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - (z-3)\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^3}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - (z-3)\bar{k}}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}},$$

$$Ц = \iint\limits_S \left(\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n}^0\right) ds = 9\iint\limits_S \frac{-(z-3)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}} ds = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{3-z}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\cdot\dfrac{(3-z)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{xy}} dxdy = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 9 = \frac{9}{4}\pi.$$

6. Соленоидальное поле. Потенциальное поле. Гармоническое поле.

Векторное поле $\bar{a}(M)$, заданное в области Ω, называется соленоидальным, если в каждой точке $M \in \Omega$ справедливо:

$\operatorname{div}\bar{a}(M) = 0.$

Задача 1. Установить, что плоское векторное поле

$\bar{a}(M) = (-y+2)\bar{i} + (x-3)\bar{j}$

соленоидально, и найти векторные линии этого поля.

Решение. Вычислим $\operatorname{div}\bar{a}(M)$:

$$\operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\partial(-y+2)}{\partial x} + \frac{\partial(x-3)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, данное поле соленоидально. Найдем векторные линии этого поля. Составим дифференциальное уравнение векторных линий.

$$\frac{dx}{-y+2} = \frac{dy}{x-3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $(x-3)dx = (-y-2)dy$,

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = C^2.$

Итак, семейство векторных линий представляет собой семейство концентрических окружностей с центром в точке (3.2). Векторные линии замкнуты.

Векторное поле $\bar{a}(M)$, заданное в области Ω, называется потенциальным, если оно может быть представлено в виде

$\bar{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$,

где $u(M)$ - скалярная функция, называемая потенциалом векторного поля $\bar{a}(M)$.

Необходимое и достаточное условие существования в выпуклой области (например, в шаре) потенциального векторного поля $\bar{a}(M)$:

$\operatorname{rot}\bar{a}(M) \equiv 0.$

Правило нахождения потенциала векторного поля. Для нахождения потенциала $u(M) = u(x,y,z)$ векторного поля

$$\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$$

применяется формула

$$\iint\limits_{MM_0} P(M)\,dx + Q(M)\,dy + R(M)\,dz = \int du(x,y,z) = u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0).$$

Эта формула дает возможность найти потенциал $u(x,y,z)$ векторного поля $\bar{a}(M)$ с точностью до постоянного слагаемого $u(x_0,y_0,z_0)$. Так как линейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования, то на практике чаще всего в качестве такого пути в формуле (5.1) берут ломаную M_0ABM (рис. 6.1) , звенья которой параллельны соответствующим координатным осям. Тогда формула (6.1) пишется так

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz.$$

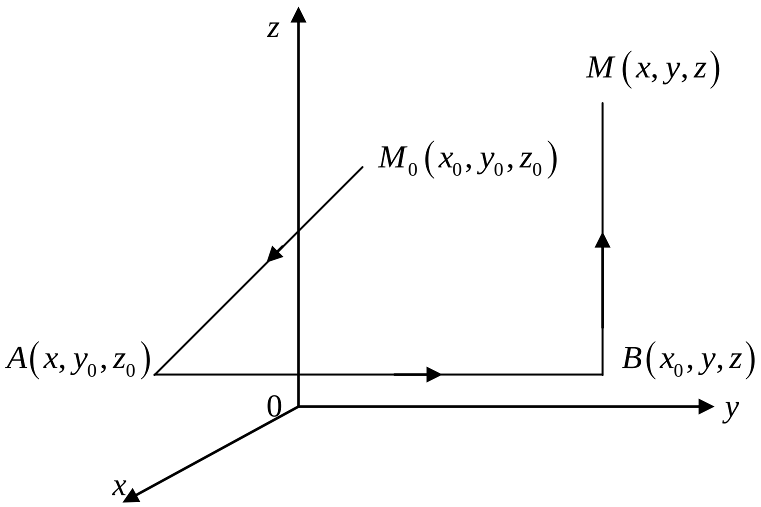


Рис. 6.1.

Задача 2. Доказать, что векторное поле

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

в выпуклой области является потенциальным и найти его потенциал.

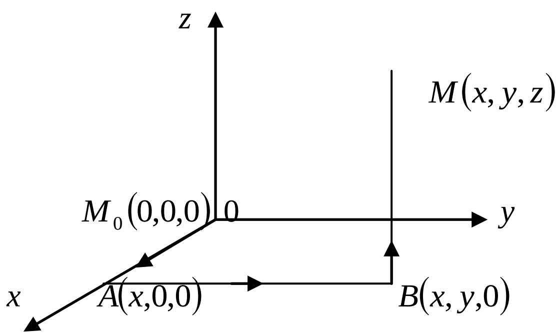
Решение. Поле будет потенциальным, если $\operatorname{rot}\bar{a} \equiv 0$. Найдем ротор векторного заданного поля:

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Итак, поле является потенциальным. Для нахождения потенциала данного поля воспользуемся формулой (6.2), где выберем точку $M_0(0,0,0)$, совпадающей с началом координат:

(см. рис. 6.2). Тогда получим

$$u(x,y,z) = \int_0^x x\,dx + \int_0^y y\,dy + \int_0^z z\,dz + C = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C.$$



Интерес представляет изучение векторных полей, одновременно являющихся потенциальными и соленоидальными.

Пусть векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$ задано в некоторой пространственной области D. Оно называется гармоническим (или лапласовым), если

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = 0 \text{ и } \operatorname{div} \bar{a}(M) = 0 \quad \forall M \subset D.$$

Итак, гармоническое поле обладает свойствами как потенциального, так и соленоидального поля. Для гармонического поля справедливо:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x, y, z) = \Delta u = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (6.3)$$

Уравнение (5.3) называется уравнением Лапласа, а оператор Δ - оператором Лапласа и лапласианом.

Гармоническое поле полностью определяется скалярным потенциалом $u(x, y, z)$, который является решением уравнения (6.3).

Задача 3. Показать, что поле вектора

$$\bar{a} = \frac{\bar{r}}{r^3}$$

является гармоническим (т.е. соленоидальным и потенциальным). Найти потенциал этого поля ($\bar{r}$ - радиус-вектор точки M).

Решение. Имеем

$$\bar{a} = \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Находим

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} - \frac{3}{2} x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2x + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} -$$

$$- \frac{3}{2} y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2y + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} - \frac{3}{2} z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2z = 0$$

Значит, поле вектора $\bar{a}(M)$ - соленоидальное.

Далее вычисляем

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} & y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} & z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2yz + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2zy \right] \bar{i} +$$

$$+ \left[-\frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2zx + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2xz \right] \bar{j} +$$

$$+ \left[-\frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2xy + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2} \cdot 2yx \right] \bar{k} = 0$$

Следовательно, поле $\bar{a}(M)$ - потенциальное.

Находим потенциал поля $\bar{a}(M)$

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz=$$
$$=\int_{x_0}^{x}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+\int_{y_0}^{y}\frac{ydy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}+\int_{z_0}^{z}\frac{zdz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}.$$

7. Оператор Гамильтона.

Оператор Гамильтона или так называемый набла-вектор ∇ - это символический вектор, определяемый в декартовой системе координат выражением

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}. \qquad (7.1)$$

При помощи ∇-вектора основные операции векторного анализа (нахождение скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля) записываются следующим образом:

$$\operatorname{grad} u=\nabla u \qquad (7.2)$$
$$\operatorname{div}\bar{a}=\left(\nabla\cdot\bar{a}\right) \qquad (7.3)$$
$$\operatorname{rot}\bar{a}=\nabla\times\bar{a} \qquad (7.4)$$

Ниже приведен ряд формул, полученных при помощи оператора ∇.

$$\operatorname{grad}\{u_1\cdot u_2\}=\nabla u_1u_2=u_1\nabla u_2+u_2\nabla u_1=u_1\operatorname{grad}u_2+u_2\operatorname{grad}u_1,$$
$$\operatorname{div}u\bar{a}=\nabla\cdot u\bar{a}=u\nabla\bar{a}+\bar{a}\nabla u=u\operatorname{div}\bar{a}+\bar{a}\operatorname{grad}u,$$
$$\operatorname{rot}u\bar{a}=\nabla\times u\bar{a}=(\nabla u)\times\bar{a}+u(\nabla\times\bar{a})=(\operatorname{grad}u)\times\bar{a}+u\operatorname{rot}\bar{a}=u\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\times\operatorname{grad}u.$$

Задача 1. Записать при помощи оператора Гамильтона

$$\operatorname{divgrad}u=u(x,y,z).$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{divgrad}u=\nabla\cdot\operatorname{grad}u=\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u=\Delta u,$$

где $\nabla^2=\Delta$ - оператор Лапласа $\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

$$\frac{dx}{-\frac{Jy}{2\pi\rho^2}}=\frac{dy}{\frac{Jx}{2\pi\rho^2}}=\frac{dz}{0}$$

или

$$\begin{cases}\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}\\ dz=0\end{cases}$$

После интегрирования получим

$$x^2+y^2=C_1^2,$$
$$z=C_2$$

Векторными линиями рассматриваемого поля будут концентрические окружности радиуса C_1 с центром на оси OZ, расположенные в плоскости $Z=C_2$.

Задача 2. Имеется плазменный шнур кругового сечения радиуса a, по которому течет электрический ток плотности

$$J=J_0\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{3/2}$$

Определить полный ток, проходящий через сечение плазменного шнура.

Решение. Вдоль оси плазменного шнура направим ось OZ (рис. 8.1). Вектор плотности тока имеет вид

$$J = 0\cdot \bar{i} + 0\cdot \bar{j} + J_0\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{3/2}\bar{k},$$

нормаль

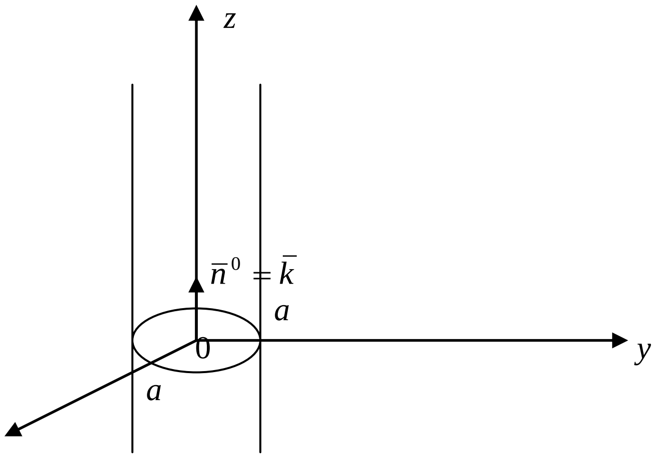
$\bar{n}^0 = 0\cdot \bar{i} + 0\cdot \bar{j} + 1\cdot \bar{k}.$

Полный ток

$$I = \iint_{\Sigma}\left(\bar{J},\bar{n}^0\right)ds = J_0\iint_{\Sigma}\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{3/2}ds,$$

где круг радиуса a. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = J_0\iint_{\Sigma}\rho^3\cdot d\rho d\varphi = J_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho^4 d\rho = 2\pi\left.\frac{\rho^4}{5}\right|_0^a = \frac{2\pi a^5}{5}J_0.$$



Задача 3. Определить ротор вектора $\bar{H}(M)$ напряженности магнитного поля, образованного электрическим током силой I, текущим по бесконечно длинному проводу, в точке M, лежащей вне провода (рис. 8.2).

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось OZ совпадала с проводником. Тогда $\bar{H}(M)$ определяется формулой

$$\bar{H}(M) = \frac{-I}{2\pi\rho^2}y\bar{i} + \frac{I}{2\pi\rho^2}x\bar{j},$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $-$расстояние от точки $M(x,y,z)$ до оси OZ. По формуле найдем $\operatorname{rot}\bar{H}(M)$:

$$\operatorname{rot}\bar{H}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-Iy}{2\pi\rho^2} & \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot 0 + \bar{j}\cdot 0 + \bar{k}\left[\frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{I}{2\pi}\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\bar{k} = 0$$

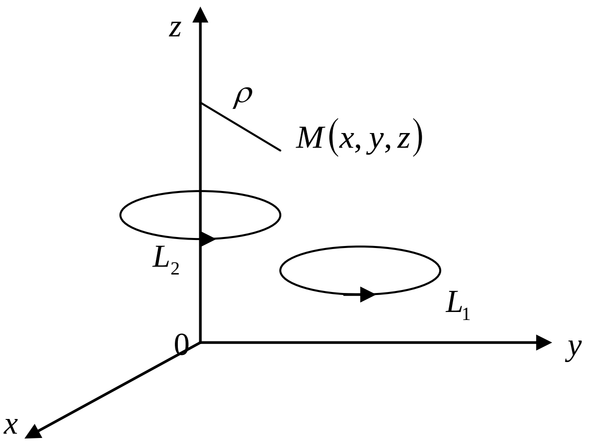


Рис. 8.2.

Итак, в любой точке поля кроме точек, лежащих на оси OZ, по которой протекает ток, $\operatorname{rot}\overline{H}(M)=0$.

На оси OZ вектор $\overline{H}(M)$, а, следовательно, и $\operatorname{rot}\overline{H}(M)$, теряют смысл.

Задача 4. Найти циркуляцию вектора $\overline{H}(M)$ напряженности магнитного поля в условиях предыдущей задачи: 1) по кривой L_1, не окружающей проводник; 2) по окружности L_2, окружающей проводник, находящийся в плоскости, перпендикулярной оси OZ, с центром на этой оси и радиусом равным R. (рис. 8.2)

Решение. 1) Пусть L_1 – произвольный замкнутый контур, ограничивающий область, через которую не проходит ось OZ. Так как во всех точках этой части поля $\operatorname{rot}\overline{H}(M)=0$, то получим

$$\oint_{L_1}\overline{H}\cdot d\overline{r}=\iint_S \operatorname{rot}\overline{H}\cdot\overline{n}^0 ds=0, d\overline{r}=\overline{\tau}^0\cdot dl$$

2) Пусть L_2 – окружность радиуса R, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси OZ с центром на этой оси. Тогда получим

$$\oint_{L_2}\overline{H}\cdot d\overline{r}=\oint_{L_2}-\frac{Iy}{2\pi R^2}dx+\frac{Ix}{2\pi R^2}dy=\frac{I}{2\pi R^2}\oint_{L_2}xdy-ydx=\frac{I}{2\pi R^2}\cdot 2S=\frac{I}{2\pi R^2}\cdot 2\pi R^2=I.$$

Итак, $\oint_{L_2}\overline{H}\cdot d\overline{r}=I$.

Отличие от нуля циркуляции во втором случае можно объяснить тем, что не во всех точках области поля, ограниченной контуром L_2, ротор вектора $\overline{H}$ равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981 – 448 с.
2. Специальные разделы математического анализа: Сборник задач по математике для втузов. Ч. П. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М. Наука, 1986 – 366 с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. – М.: Наука, 1978. – 159 с.
4. Глатенок И. В., Заварзина И.Ф. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Высшая математика», «Теория поля». М. – 1989 г. – 39 с.