Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МАТИ — Российский государственный технологический университет
имени К. Э. Циолковского»

Ю. В. Селиванов

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
(варианты курсовых заданий)

Учебное пособие

Москва 2013

Автор:
Селиванов Ю. В., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика» МАТИ имени К. Э. Циолковского

Селиванов, Ю. В.

Алгебра и геометрия (варианты курсовых заданий) [Текст] : учеб. пособие / Ю. В. Селиванов. — М. : МАТИ, 2013. — 118 с.

Учебное пособие предназначено для студентов МАТИ, изучающих темы «Матрицы и системы линейных уравнений», «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия» в рамках общего курса математики, а также для преподавателей. Оно ставит своей целью помочь студентам лучше усвоить теоретический и практический материал. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое (контрольное) задание по рассматриваемым темам.

Введение

Данное учебное пособие входит в серию учебно-методических разработок кафедры «Высшая математика», призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса высшей математики. Оно предназначено для студентов МАТИ и преподавателей. В пособии рассмотрены следующие вопросы: матрицы и системы линейных уравнений, векторная алгебра, прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве. Пособие предназначено главным образом для использования во время практических занятий по математике и в качестве задачника для самостоятельной работы и курсовых (контрольных) работ для студентов дневного и вечернего отделений всех факультетов.

Учебная программа дисциплины «Математика» для большинства направлений подготовки в МАТИ предусматривает выполнение студентами в первом семестре курсовой работы на тему «Алгебра и геометрия». Курсовые работы по математике являются одним из важных моментов учебного процесса, организующим самостоятельную работу студентов. Они помогают обобщать и конкретизировать сведения, полученные на занятиях, способствуют более глубокому изучению предмета.

В первом разделе учебного пособия представлены основные понятия, определения и формулы, необходимые для решения наиболее характерных и часто встречающихся типов задач, относящихся к указанным темам, приводятся подробные решения 18 примеров. Второй раздел содержит 35 вариантов индивидуальных заданий для студентов. Каждый вариант содержит 12 задач. Среди этих задач — исследование систем линейных алгебраических уравнений и их решение методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным способом; вычисление определителей; вычисление скалярных, векторных и смешанных произведений векторов; задачи по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВЕДЕНИЯ

1.1. Матрицы и системы линейных уравнений

В каждом варианте индивидуальных заданий, представленных во втором разделе данного учебного пособия, предполагается решение систем линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \text{——————————————} \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Эта система в матричной форме имеет вид

$$A\cdot X = B, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ — & — & — & — \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Система (1) называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно решение, т. е. такой вектор-столбец X, который обращает равенства (1) в тождества.

Согласно теореме Кронекера — Капелли, критерием совместности системы (1) является равенство ранга $r(A)$ матрицы A рангу $r(\overline{A})$ расширенной матрицы $\overline{A} = (A|B)$. Если это условие выполняется, то для нахождения всех решений системы (1) необходимо выбрать из этой системы какие-нибудь r уравнений, матрица коэффициентов которых имеет ранг r, где $r = r(A) = r(\overline{A})$, и решить эти уравнения.

Если $r = n$, то решение системы (1) будет единственным, а если $r < n$ — их будет бесконечно много.

При решении *однородных* систем (т. е. таких, что $b_1 = = b_2 = \ldots = b_m = 0$) необходимо помнить, что они всегда совместны. У них имеется тривиальное решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Далее, любая линейная комбинация решений однородной системы является также решением этой системы. Поэтому множество решений однородной системы является векторным пространством, любой базис которого называется *фундаментальной системой решений*.

Если ранг матрицы A равен r, то существует фундаментальная система решений однородной системы, состоящая из $n-r$ вектор-столбцов $X^{(1)}, \ldots, X^{(n-r)}$. При этом всякое решение однородной системы имеет вид

$$X = C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)} + \ldots + C_{n-r} X^{(n-r)}. \tag{3}$$

Фундаментальная система решений однородной системы может быть построена следующим образом. Сначала выбирается *базисный минор* матрицы A, т. е. минор порядка r, отличный от нуля. Столбцы матрицы A, проходящие через базисный минор, называются *базисными столбцами*. Неизвестные, номера которых совпадают с номерами базисных столбцов, называются *базисными неизвестными*, а остальные неизвестные — *свободными неизвестными*. Придавая одному из свободных неизвестных значение 1, а остальным — значение 0, находят базисные неизвестные. Совокупность полученных таким путем решений и образует фундаментальную систему решений однородной системы.

Решение неоднородной системы полезно начинать с нахождения частного решения. Его удобно искать, полагая свободные неизвестные равными 0. Произвольное решение неоднородной системы может быть представлено в виде суммы этого частного решения и некоторого решения соответствующей однородной системы.

Пример 1. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases} \tag{4}$$

с помощью ранга матрицы и найти общее решение системы.

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы (4)

$$\overline{A} = \left(A | B \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 6 & -5 & -4 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

и найдем ранг этой матрицы, а также ранг матрицы A. Для этого преобразуем матрицу $\overline{A}$ с помощью элементарных преобразований строк (метод Гаусса).

Прибавим к третьей строке вторую строку, умноженную на 2. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 2 \end{array} \right).$$

Теперь прибавим к первой строке вторую строку. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 2 \end{array}\right).$$

Прибавив ко второй строке первую строку, умноженную на 3, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 2 \end{array}\right).$$

Наконец, вычтя из третьей строки вторую строку, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{5}$$

имеющую ступенчатый вид.

В полученной матрице все миноры порядка 3 равны нулю и имеется ненулевой минор порядка 2. Следовательно, ранг матрицы $\overline{A}$ (так же, как и ранг матрицы A) равен 2. По теореме Кронекера — Капелли система совместна. Поскольку

$$r\left(A\right)=2<n=4,$$

то система имеет бесконечно много решений.

Составим систему уравнений, соответствующую последнему варианту (5) преобразованной матрицы. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 2, \end{cases} \tag{6}$$

эквивалентную системе (4).

Минор второго порядка, взятый в левом верхнем углу матрицы (5), выбираем в качестве базисного минора. Тогда x_1 и x_2 — базисные, а x_3 и x_4 — свободные неизвестные.

Переписываем систему (6) следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + 2x_4, \\ -x_2 = 2 + 2x_3 + 9x_4. \end{cases} \tag{7}$$

Полагая в (7) свободные неизвестные x_3 и x_4 равными 0, и решая полученную систему, находим частное решение системы (4)

$$X^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем рассматриваем однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + 2x_4, \\ -x_2 = 2x_3 + 9x_4, \end{cases} \tag{8}$$

соответствующую системе (7). Полагая сначала: $x_3 = 1$ и $x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$, определяем фундаментальную систему решений однородной системы (8):

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X^{(2)} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы имеет вид

$$\overline{X} = C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)}.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы находится по формуле:

$$X = X^* + C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = -1 - C_1 - 7C_2, \\ x_2 = -2 - 2C_1 - 9C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Пусть теперь $n = m$ (т. е. число уравнений в системе (1) равно числу неизвестных) и $|A| \neq 0$. Другими словами, матрица A является квадратной и невырожденной. В этом случае систему (1) можно решить матричным способом.

Матричный способ решения системы (1) состоит в отыскании обратной матрицы A^{-1} и нахождении единственного решения системы по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (9)$$

Обратная матрица A^{-1} должна вычисляться стандартным способом с помощью нахождения алгебраических дополнений элементов матрицы A.

А именно:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ -- & -- & -- & -- \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\Delta=|A|$, а A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе матрицы A, т. е. произведение минора порядка $n-1$, полученного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца в определителе матрицы A, на $(-1)^{i+j}$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y-z=8, \\ 2x-y+2z=3, \\ -x+3y-2z=8 \end{cases} \tag{10}$$

матричным способом.

Решение. Найдем сначала матрицу $A^*=(A_{ij})$, состоящую из алгебраических дополнений $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

или

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь, транспонируя матрицу A^*, найдем присоединенную матрицу A. Получаем

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A, раскрыв его по первой строке. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

Следовательно, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что столбец свободных членов равен $B=\begin{pmatrix}8\\3\\8\end{pmatrix}$, находим по формуле (9) решение системы (10):

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&1&3\\2&-3&-4\\5&-5&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\3\\8\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-32+3+24\\16-9-32\\40-15-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x=1$, $y=5$, $z=3$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y-2z=1,\\2x+3y-4z=6,\\4x-y+z=2\end{cases}\qquad(11)$$

по правилу Крамера.

Решение. Найдем сначала определитель системы, раскрыв его, например, по второй строке. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&3&-4\\4&-1&1\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}1&1\\4&-1\end{vmatrix}=9.$$

Теперь найдем определители Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&-2\\6&3&-4\\2&-1&1\end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=9,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 36,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 18.$$

Отсюда находим решение системы (11):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

1.2. Векторная алгебра

В каждом варианте индивидуальных расчетных заданий имеется задача, посвященная векторной алгебре. Напомним, что *вектор* (*геометрический вектор*) $\overline{a} = \overline{AB}$ — это направленный отрезок прямой на плоскости или в пространстве, у которого один конец (точка A) называется началом вектора, другой конец (точка B) — концом вектора.

Вектор характеризуется *длиной* (или *модулем*) и направлением: от A к B. Модуль вектора равен длине отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$. При этом вектор называется *нулевым*, если он имеет нулевую длину. Очевидно, у нулевого вектора начало и конец совпадают.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Два коллинеарных вектора называются *одинаково* (*противоположно*) *направленными*, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала. Если вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, обычно пишут: $\overline{a} \| \overline{b}$.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют равные длины и одинаково направлены. Все нулевые векторы считаются равными между собой.

Вектором, *противоположным* вектору $\overline{AB}$, называется вектор $\overline{BA}$.

Напомним, что под линейными действиями над векторами понимаются следующие операции: *сложение векторов* и *умножение вектора на число*.

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Тогда каждой точке M пространства соответствует тройка чисел (x, y, z) — координат этой точки. При этом каждому вектору $\overline{a}$ соответствует своя тройка чисел X, Y, Z — *координат вектора*; в этом случае мы пишем

$$\overline{a} = \{X, Y, Z\}.$$

Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ находятся по формулам:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Модуль вектора $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$ вычисляется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Направление вектора $\overline{a}$ определяется углами α, β и γ, образованными им с осями координат Ox, Oy и Oz. Косинусы этих углов (т. н. *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{a}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{|\overline{a}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{a}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 4. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если $A(2, 1, 1)$, $B(1, -1, 3)$.

Решение. Координатами вектора $\overline{a}$ являются числа $X = 1 - 2 = -1$, $Y = -1 - 1 = -2$ и $Z = 3 - 1 = 2$. Отсюда

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

Теперь находим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{a}|} = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{|\overline{a}|} = -\frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{a}|} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Напомним, что при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число. Таким образом, если $\overline{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\overline{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 = \{X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2\}, \quad \lambda\overline{a}_1 = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}.$$

Известно, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Заметим, что если $X_1 = 0$, то для коллинеарности векторов необходимо, чтобы $X_2 = 0$ (аналогично для Y_1 или Z_1).

Теперь напомним, что *скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a} \cdot \bar{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Как известно, скалярное произведение векторов $\bar{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Отсюда угол φ между (ненулевыми) векторами $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Как следствие, векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ ортогональны (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

Напомним теперь, что три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они, будучи приведены к общему началу, оказываются лежащими в одной плоскости.

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется *правой*, если после приведения этих векторов к общему началу кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ виден с конца вектора $\overline{c}$ совершающимся против часовой стрелки.

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, модуль которого равен произведению длин этих векторов на синус угла между ними, перпендикулярный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и составляющий вместе с ними правую тройку.

Как следствие, модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = S_{\overline{a},\overline{b}}.$$

Система координатных осей Ox, Oy и Oz (система координат) называется *правой*, если тройка единичных векторов этих осей $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ является правой.

Пусть в правой системе координат заданы векторы $\overline{a}_1 = \left\{X_1, Y_1, Z_1\right\}$ и $\overline{a}_2 = \left\{X_2, Y_2, Z_2\right\}$. Тогда векторное произведение вектора $\overline{a}_1$ на вектор $\overline{a}_2$ определяется формулой

$$\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Отсюда площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, равна:

$$S_{\overline{a},\overline{b}} = |\overline{a}\times\overline{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}\ .$$

Наконец, *смешанным произведением* $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется скалярное произведение вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$, т. е.

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right) = \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\ .$$

Напомним, что смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. При этом оно положительно тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют правую тройку.

Пусть в правой системе координат заданы векторы $\overline{a}_1 = \left\{X_1, Y_1, Z_1\right\}$, $\overline{a}_2 = \left\{X_2, Y_2, Z_2\right\}$ и $\overline{a}_3 = \left\{X_3, Y_3, Z_3\right\}$. Тогда смешанное произведение векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$ определяется формулой

$$\left(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\right) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Как следствие, векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Пример 5. Даны точки $A(2,1,3)$, $B(0,1,-2)$, $C(-1,0,2)$. Вычислить скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$, векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ и смешанное произведение $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, где $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{BC}-\overline{AC}$, $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$.

Решение. Имеем $\bar{a}=\overline{AB}=\{-2,0,-5\}$, $\overline{AC}=\{-3,-1,-1\}$, $\overline{BC}=\{-1,-1,4\}$, $\bar{b}=\{2,0,5\}$, $\bar{c}=\{1,3,2\}$. Отсюда

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-2)\cdot 2+0\cdot 0+(-5)\cdot 5=-29,$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\begin{vmatrix}0 & -5\\ 0 & 5\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 2 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right\}=\{0,0,0\}=\bar{0},$$

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}-2 & 0 & -5\\ 2 & 0 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}=-29$, $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$, $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$.

1.3. Прямая на плоскости

В каждом индивидуальном задании содержатся две задачи по аналитической геометрии на плоскости, связанные с темой «Прямая на плоскости». Для этих задач предполагается, что в плоскости задана декартова прямоугольная система координат, которая каждой точке M сопоставляет пару чисел (x,y) — координат этой точки. При этом кривые на плоскости могут задаваться уравнениями относительно неизвестных x и y.

В частности, всякое уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{12}$$

где A и B не равны нулю одновременно, определяет на плоскости некоторую прямую линию. Верно и обратное: каждая прямая линия на плоскости может быть описана уравнением первой степени относительно декартовых координат.

Необходимо помнить геометрический смысл коэффициентов A и B уравнения (12) (т. н. *общего уравнения прямой*). Они являются координатами вектора $\overline{n} = (A, B)$, перпендикулярного к прямой. Этот вектор называется *нормальным вектором* данной прямой.

Если известна какая-либо точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая на прямой, то для нахождения этой прямой обычно используют *уравнение прямой, проходящей через данную точку,* —

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Если известен угол α наклона прямой к положительному направлению оси Ox, применяют *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$, или уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В том случае, если известны две точки прямой $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, для составления ее уравнения следует воспользоваться соотношением (*уравнением прямой, проходящей через две данные точки*):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Напомним, что зная отрезки "a" и "b", отсекаемые прямой на осях координат, можно сразу написать *уравнение прямой в отрезках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

При решении задач по аналитической геометрии на плоскости часто используют *нормальное уравнение прямой* на плоскости

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

Здесь α — угол между положительным направлением оси Ox и направлением перпендикуляра OP, опущенного из начала координат на прямую, а p — длина этого перпендикуляра.

Из общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ легко получить нормальное, если его разделить на коэффициент

$$\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2}.$$

Следует правильно выбирать знак коэффициента μ; он должен быть противоположен знаку свободного члена C.

С помощью нормального уравнения прямой легко вычисляется *отклонение* δ *точки* $M_1(x_1, y_1)$ *от прямой*:

$$\delta=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p.$$

Полезно иметь в виду, что по разные стороны от прямой отклонение δ имеет разный знак.

С помощью отклонения δ легко найти расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой:

$$d=|\delta|=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|.$$

Кроме того:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Часто возникает необходимость найти угол между прямыми

$$y=k_1x+b_1 \qquad \text{и} \qquad y=k_2x+b_2,$$

или между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, заданными своими общими уравнениями. Это можно сделать по формулам:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

и

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

При этом *условия параллельности* прямых имеют вид:

$$k_1=k_2 \qquad \text{и} \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

А *условия перпендикулярности* прямых имеют вид:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \qquad \text{и} \qquad A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Пример 6. Найти расстояние от точки $M_0\left(1,8\right)$ до прямой

$$l:\ 2x-3y+7=0.$$

Решение. Имеем $d\left(M_0, l\right)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $x_0=1,\ y_0=8,$ $A=2,\ B=-3,\ C=7$. Отсюда

$$d\left(M_0, l\right)=\frac{|2\cdot 1-3\cdot 8+7|}{\sqrt{2^2+\left(-3\right)^2}}=\frac{15\sqrt{13}}{13}.$$

Пример 7. Привести уравнение прямой, заданной общим уравнением $12x-16y+95=0$, к нормальному виду и найти расстояние от начала координат до этой прямой.

Решение. Найдем коэффициент μ. Поскольку $C=95>0$, то

$$\mu=-\sqrt{12^2+\left(-16\right)^2}=-20.$$

Разделив общее уравнение прямой на μ, получим нормальное уравнение прямой:

$$-\frac{12}{20}x+\frac{16}{20}y-\frac{95}{20}=0.$$

или

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{19}{4}=0.$$

Имеем $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$. Расстояние от начала координат до прямой равно

$$p=\frac{19}{4}=4{,}75.$$

Пример 8. Стороны треугольника заданы уравнениями: $x-2y-6=0,\ 3x-y+6=0,\ 7x+4y-24=0$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, лежащего против стороны $7x+4y-24=0$ (рис. 1).

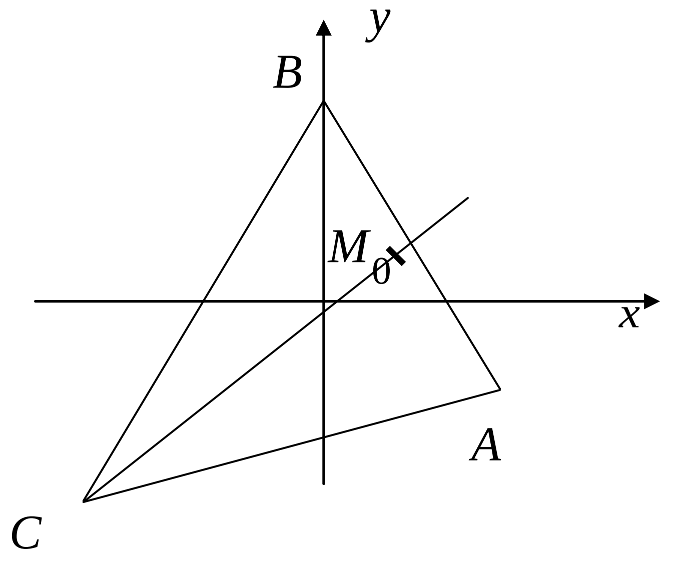

Рис. 1

Решение. Из систем уравнений

$$\begin{cases} x-2y-6=0, \\ 7x+4y-24=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-y+6=0, \\ 7x+4y-24=0 \end{cases}$$

находим координаты двух вершин $A\left(x_A=4,\ y_A=-1\right)$, $B\left(x_B=0,\ y_B=6\right)$. Подставляя координаты каждой из вершин A и B в левую часть уравнения соответствующей противоположной стороны, получим:

$$3\cdot 4-\left(-1\right)+6=19>0, \quad 0-2\cdot 6-6=-18<0.$$

Пусть $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ — произвольная точка искомой биссектрисы, расположенная внутри треугольника. Тогда эта точка лежит по ту же сторону от прямой $3x-y+6=0$, что и точка A, и поэтому $3x_0-y_0+6>0$; она лежит по ту же сторону от прямой $x-2y-6=0$, что и точка B, и поэтому $x_0-2y_0-6<0$. Следовательно, расстояния d_1 и d_2 от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до сторон треугольника задаются формулами:

$$d_1 = \frac{3x_0 - y_0 + 6}{\sqrt{10}}, \qquad d_2 = -\frac{x_0 - 2y_0 - 6}{\sqrt{5}}.$$

Так как $M_0\left(x_0, y_0\right)$ — точка биссектрисы, то $d_1 = d_2$. Отсюда находим искомое уравнение биссектрисы:

$$\left(3+\sqrt{2}\right)x - \left(1+2\sqrt{2}\right)y - 6\left(\sqrt{2}-1\right) = 0.$$

Пример 9. Даны вершины треугольника $A\left(-9, 0\right)$, $B\left(0, -3\right)$, $C\left(5, 2\right)$. Найти точку пересечения высоты BK, опущенной из вершины B, и медианы AM, проведённой из вершины A, а также острый угол, заключенный между ними (рис. 2).

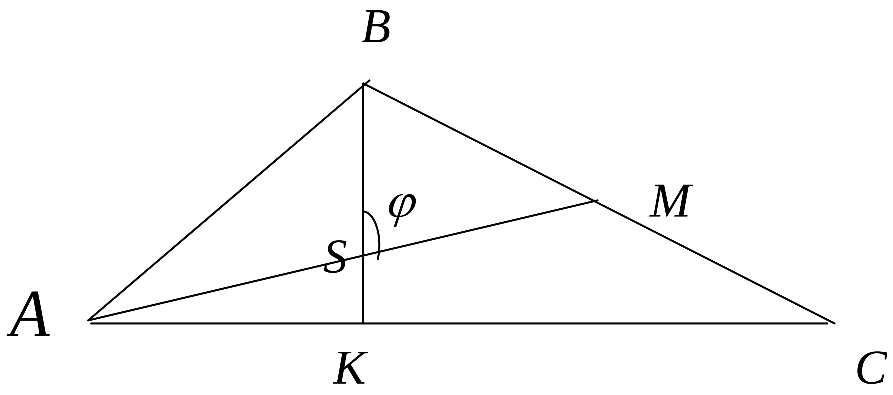

Рис. 2

Решение. Используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки, найдем сначала уравнение стороны AC треугольника ABC. Получим:

$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x+9}{5+9} \qquad \text{или} \qquad y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7}.$$

Угловой коэффициент этой прямой равен $k_{AC}=\frac{1}{7}$. Так как высота $BK\perp AC$, ее угловой коэффициент можно найти по формуле $k_{BK}=-\frac{1}{k_{AC}}=-7$. Поскольку нам известна точка $B(0,-3)$, то уравнение высоты BK находим так: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$. Получаем:

$$y+3=-7(x-0) \quad \text{или} \quad y=-7x-3.$$

Теперь будем искать уравнение медианы AM. Для этого сначала найдем координаты точки M (середины отрезка BC) по формулам: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$, $\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$.

Имеем: $x_M=\frac{5}{2}$, $y_M=-\frac{1}{2}$.

Снова используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки, получаем уравнение медианы AM:

$$\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{x+9}{\frac{5}{2}+9} \quad \text{или} \quad y=-\frac{1}{23}x-\frac{9}{23}.$$

Координаты точки $S\left(x_S,y_S\right)$ пересечения высоты BK и медианы AM находим теперь как решение системы уравнений

$$\begin{cases} y=-7x-3, \\ y=-\frac{1}{23}x-\frac{9}{23}. \end{cases}$$

Имеем: $x_S=-\frac{3}{8}$, $\qquad y_S=-\frac{3}{8}$.

Наконец, находим острый угол φ между высотой BK и медианой AM $\left(k_1 = -7,\ k_2 = -\dfrac{1}{23}\right)$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{-1/23 + 7}{1 + 7/23} = \frac{16}{13}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{16}{13}.$$

1.4. Плоскость и прямая в пространстве

При решении задач по аналитической геометрии в пространстве предполагается, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат, которая каждой точке M сопоставляет тройку чисел (x, y, z) — координат этой точки. При этом поверхности в пространстве могут задаваться уравнениями относительно неизвестных x, y и z.

В частности, всякое уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B и C не равны нулю одновременно, определяет плоскость. Верно и обратное: каждая плоскость в пространстве может быть описана уравнением первой степени относительно декартовых координат.

Напомним геометрический смысл коэффициентов A, B и C этого уравнения (*общего уравнения плоскости*). Они являются координатами вектора $\overline{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости. Этот вектор называется *нормальным вектором* плоскости.

Если известна какая-либо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на плоскости, то для нахождения этой плоскости обычно используют *уравнение плоскости, проходящей через данную точку,* —

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (13)$$

Пример 10. Даны две точки $M_1(2,1,3)$ и $M_2(-1,2,7)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Решение. За нормальный вектор плоскости можно взять вектор $\bar{n}=\overline{M_1M_2}=\{-3,1,4\}$. Подставляя координаты вектора $\bar{n}$ и точки $M_0=M_1$ в уравнение (13), получим:

$$-3\cdot(x-2)+1\cdot(y-1)+4\cdot(z-3)=0 \quad \text{или} \quad -3x+y+4z-7=0.$$

Напомним, что зная отрезки “a”, “b” и “c”, отсекаемые плоскостью на осях координат, можно сразу написать *уравнение плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

При решении задач по аналитической геометрии в пространстве часто используют *нормальное уравнение плоскости*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+y\cos\gamma-p=0.$$

Здесь α, β, γ — углы между нормальным вектором $\bar{n}$ плоскости и осями координат, а p — расстояние от начала координат до плоскости.

Из общего уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ легко получить нормальное, если его разделить на коэффициент

$$\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Следует правильно выбирать знак коэффициента μ; он должен быть противоположен знаку свободного члена D.

С помощью нормального уравнения плоскости легко вычисляется *отклонение* δ *точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *от плоскости*:

$$\delta = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p.$$

Полезно иметь в виду, что по разные стороны от прямой отклонение δ имеет разный знак.

С помощью отклонения δ легко найти расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой:

$$d = |\delta| = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p|.$$

Кроме того:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 11. Привести уравнение плоскости

$$12x - 15y - 16z + 75 = 0,$$

к нормальному виду и найти расстояние от начала координат до этой плоскости.

Решение. Поскольку $D = 75 > 0$, коэффициент μ равен

$$\mu = -\sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = -25.$$

Разделив общее уравнение плоскости на μ, получим нормальное уравнение плоскости:

$$-\frac{12}{25}x + \frac{15}{25}y + \frac{16}{25}y - \frac{75}{25} = 0$$

или

$$-\frac{12}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z - 3 = 0.$$

Имеем $\cos\alpha = -\frac{12}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. Расстояние от начала координат до плоскости равно $p = 3$.

Часто возникает необходимость найти угол между плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

заданными своими общими уравнениями. Это можно сделать по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{14}$$

При этом *условие параллельности* двух плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а *условие перпендикулярности* плоскостей имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 12. Вычислить угол между плоскостями:

$$x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0 \quad \text{и} \quad x - \sqrt{2}y + z + 4 = 0.$$

Решение. Нормальные векторы данных плоскостей имеют координаты:

$$\bar{n}_1 = \left\{1, \sqrt{2}, -1\right\} \quad \text{и} \quad \bar{n}_2 = \left\{1, -\sqrt{2}, 1\right\}.$$

По формуле (14) получаем:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot1-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1\cdot1}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между плоскостями равен $\frac{\pi}{3}$.

Пусть в пространстве заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Как известно, эти точки однозначно определяют некоторую плоскость π, проходящую через них. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Для того чтобы эта точка принадлежала плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ были компланарны. Критерием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Поэтому *уравнение плоскости, проходящей через три точки* M_1, M_2 и M_3, записывается в виде:

$$\left(\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\right)=0.$$

В координатах это уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

Пример 13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2, 4, -3)$, $M_2(4, 2, -3)$ и $M_3(5, 0, 6)$.

Решение. Уравнение (15) здесь приобретает вид:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-4 & z+3 \\ 6 & -2 & 0 \\ 7 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по первой строке, получим:

$$-18(x+2)-54(y-4)-10(z+3)=0$$

или

$$9x+27y+5z-75=0.$$

Положение прямой в пространстве может быть охарактеризовано различными способами. Например, можно указать: точку на прямой и вектор, параллельный этой прямой; две точки прямой; две плоскости, пересекающиеся по этой прямой.

Пусть l — некоторая прямая в пространстве. Любой ненулевой вектор $\overline{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, коллинеарный прямой l, называется *направляющим вектором* этой прямой. Положение прямой в пространстве полностью определяется заданием направляющего вектора $\overline{a}$ и точки M_0, принадлежащей прямой. Если точка M_0 задана своими координатами x_0, y_0 и z_0, а произвольная точка M прямой имеет координаты x, y и z, то

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве, а переменная $t \in \mathbb{R}$ — параметром. Так как направляющий вектор $\overline{a}$ ненулевой, то из параметрических уравнений можно исключить параметр t. Получающиеся при этом уравнения

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \qquad (16)$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве. (Здесь предполагается, что если знаменатель какой-либо дроби в уравнениях (16) равен нулю, то равен нулю и соответствующий числитель.)

В том случае, если известны две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, для составления ее уравнения можно воспользоваться следующими соотношениями (*уравнениями прямой, проходящей через две данные точки*):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (17)$$

Пример 14. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1,-5,2)$ и $M_2(-3,7,8)$.

Решение. Подставив координаты данных точек в уравнения (17), получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+5}{12}=\frac{z-2}{6}.$$

Отсюда находим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=1-4t, \\ y=-5+12t, \\ z=2+6t. \end{cases}$$

Пример 15. Найти расстояние от точки $M\left(-4,1,3\right)$ до прямой l, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Решение. Будем искать на прямой l такую точку $N\left(x, y, z\right)$, чтобы вектор $\overline{MN}$ был ортогонален прямой, а значит, и ее направляющему вектору $\overline{a} = \left\{-3, 2, 1\right\}$. Используя параметрические уравнения прямой, имеем

$$\overline{MN} = \left\{x+4, y-1, z-3\right\} = \left\{3-3t, 1+2t, t\right\}.$$

Критерием ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения. Поэтому вместо условия $\overline{MN} \perp \overline{a}$ можно записать

$$\overline{MN} \cdot \overline{a} = \left(3-3t\right)\cdot\left(-3\right) + \left(1+2t\right)\cdot 2 + t\cdot 1 = 0,$$

откуда $t = \frac{1}{2}$. Определив значение параметра t, отвечающее точке N, находим координаты этой точки: $x = -1 - 3\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, $y = 2 + 2\cdot\frac{1}{2} = 3,\ z = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Остается воспользоваться формулой для расстояния между двумя точками, чтобы найти искомое расстояние от точки M до прямой l:

$$d\left(M, l\right) = |MN| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}+4\right)^2 + \left(3-1\right)^2 + \left(\frac{7}{2}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}.$$

Если какие-либо две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ не параллельны, т. е. если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то они пересекаются. В этом случае уравнения

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

являются уравнениями прямой пересечения этих плоскостей. Они называются *общими уравнениями прямой*. Важно уметь по общим уравнениям прямой находить ее канонические уравнения.

Чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать координаты ее направляющего вектора $\overline{a}$ и координаты некоторой точки $M_0\in l$. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{a}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$, где $\overline{n}_1=\left\{A_1, B_1, C_1\right\}$ и $\overline{n}_2=\left\{A_2, B_2, C_2\right\}$, т. е. векторное произведение нормальных векторов заданных плоскостей. За координаты точки M_0 можно взять любое решение системы общих уравнений прямой.

Пример 16. Составить канонические уравнения прямой, являющеейся пересечением плоскостей $2x-y+3z-2=0$ и $x-2y+z+1=0$.

Решение. Поскольку $\overline{n}_1=\left\{2,-1,3\right\}$ и $\overline{n}_2=\left\{1,-2,1\right\}$ — нормальные векторы данных плоскостей, то вектор $\overline{a}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$ будет направляющим вектором искомой прямой. Находим этот вектор:

$$\overline{a}=\overline{n}_1\times\overline{n}_{\mathbf{2}}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right\}=5\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}.$$

Теперь найдем координаты какой-либо точки прямой. Для этого решим систему уравнений, положив дополнительно $z = 0$. Получим систему

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Значит, наша прямая проходит через точку $M_0\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$.

Наконец, воспользовавшись координатами точки прямой и ее направляющего вектора, мы получаем искомые канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{5} = \frac{y - \frac{4}{3}}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Пусть две прямые в пространстве имеют направляющие векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда угол φ между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}.$$

Если прямые заданы своими каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \text{ и } \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3},$$

то угол между этими прямыми определяется с помощью формулы:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{18}$$

При этом *условие параллельности* двух прямых в пространстве имеет вид

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},$$

а *условие перпендикулярности* этих прямых имеет вид

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Пример 17. Вычислить угол между прямыми

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-7}{-2}.$$

Решение. По формуле (18) вычисляем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 1-1\cdot 2+1\cdot(-2)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=0.$$

Следовательно, угол между прямыми равен $\frac{\pi}{2}$.

Угол между прямой с направляющим вектором $\bar{a}$ и плоскостью с нормальным вектором $\bar{n}$ находится с помощью формулы

$$\sin\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\bar{a}|\,|\bar{n}|}.$$

Если известны координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости: $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\bar{n}=\{A,B,C\}$, то угол φ находится по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{a_1A + a_2B + a_3C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (19)$$

При этом *условие параллельности* прямой и плоскости имеет вид

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0,$$

а *условие* их *перпендикулярности* имеет вид

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}.$$

Пример 18. Вычислить угол между прямой $\frac{x-9}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $4x + y - z - 5 = 0$.

Решение. По формуле (19) вычисляем синус искомого угла:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot4 + 2\cdot1 - 1\cdot1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3\cdot\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{4}$.

2. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = -3, \\ 2x - y - 3z = 1, \\ x + 5y + z = -8. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ -2x_1 - 37x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(-1,2,3\right)$, $\overline{b}=\left(4,-1,-1\right)$, $\overline{c}=2\overline{a}+3\overline{b}+4\overline{i}$.

Задача 5. Составить уравнения сторон и диагонали ромба, если известны уравнения двух его сторон $x+2y=4$ и $x+2y=10$ и уравнение одной из диагоналей $y=x+2$.

Задача 6. Из точек $A\left(3,1\right)$, $B\left(2,4\right)$ проведены прямые через начало координат. Найти угол между этими прямыми.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x-y+z-2=0$ и $-x+y-2z+3=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(3,1,-1\right)$ является проекцией точки $A\left(-1,2,-3\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x-y-5z-8=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(-2,1,4\right)$ относительно плоскости α: $3x+5y-z+8=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(1,-1,-2\right)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}.$$

Задача 12. Через точку $B(2,-5,3)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$$

Вариант 2

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x-8y-3z=-2, \\ 2x+4y-z=1, \\ 2x-z=1. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4=1, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4=1 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(4, 1, 0\right)$, $\overline{b} = \left(-3, 1, -2\right)$, $\overline{c} = \overline{a} - 3\overline{b} + 2\overline{i}$.

Задача 5. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$, а также уравнение его диагонали $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение двух других сторон ромба и его высоты.

Задача 6. Проверить, что точки $A\left(-4, -3\right)$, $B\left(-5, 0\right)$, $C\left(6, 6\right)$, $D\left(1, 0\right)$ служат вершинами трапеции и найти ее высоту.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(1, -4, 2\right)$ является проекцией точки $A\left(2, 1, -5\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l\colon\ \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 2x+4y-3z+7=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(0,-3,8)$ относительно плоскости $\alpha:\ 2x-7y+3z-5=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(3,2,-6)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}.$$

Задача 12. Через точку $B(-1,4,6)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} x+2y-7z+5=0, \\ 3x-5y+z-1=0. \end{cases}$$

Вариант 3

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y-4z=-5, \\ x-y+z=1, \\ 7x-y+z=9. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(3, -2, 1\right)$, $\bar{b} = \left(4, -2, -1\right)$, $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{j}$.

Задача 5. Найти угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, если известно, что отрезок прямой расположен между осями координат и точка $M\left(-\frac{8}{3}, -3\right)$ делит этот отрезок в отношении $3:2$ (считая от оси абсцисс к оси ординат).

Задача 6. Пусть известны уравнения двух сторон квадрата $5x + 12y - 10 = 0$ и $5x + 12y + 29 = 0$. Составить уравнения двух других сторон при условии, что точка $M\left(-3, 5\right)$ лежит на стороне этого квадрата.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - 3y + z + 4 = 0$ и $-x - y + 2z - 3 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(2, 3, -1)$ является проекцией точки $A(0, -4, 2)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 6x+y+13z-41=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(1, 3, -5)$ относительно плоскости $\alpha:\ 3x-2y+8z+9=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-5, 2, 0)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(-2, 3, -9)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 4x-3y-z-2=0, \\ 6x+y-7z-9=0. \end{cases}$$

Вариант 4

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1, \\ 3x - 5y + z = -5, \\ 4x - 7y + z = 7. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(3, 2, 2\right)$, $\bar{b} = \left(3, -2, 1\right)$, $\bar{c} = -\bar{a} - 2\bar{b} + 2\bar{k}$.

Задача 5. Даны две противоположные вершины ромба $A(3,4)$ и $C(1,-2)$ и уравнение одной из его сторон $x-y+1=0$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

Задача 6. На прямой l лежат точки $A(-1,0)$ и $B(1,2)$. Составить уравнение прямой l, привести его к общему и нормальному виду, указать расстояние от начала координат до прямой и построить эту прямую.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{2}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(3,-2,1)$ является проекцией точки $A(1,-3,0)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x}{6}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x+4y-3z+7=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(7,-1,2)$ относительно плоскости $\alpha:\ x+4y-9z-10=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(7,9,-2)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(0,-7,1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 7x-2y+5z-8=0, \\ x-6y-3z+1=0. \end{cases}$$

Вариант 5

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y-z=5, \\ -x+3y+2z=8, \\ 2x-y-z=3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3+5x_4=1, \\ -2x_1-3x_2+x_3+4x_4=2, \\ 6x_1-5x_2-9x_3+32x_4=10 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(-1, -2, -3\right)$, $\overline{b} = \left(-4, -2, -1\right)$, $\overline{c} = 2\overline{a} + \overline{b} + 5\overline{j}$.

Задача 5. Найти проекцию точки $P\left(-8, 12\right)$ на прямую, проходящую через точки $A\left(-5, 1\right)$ и $B\left(2, -3\right)$.

Задача 6. Дан треугольник с вершинами: $A\left(-2, 0\right)$, $B\left(2, 4\right)$, $C\left(4, 6\right)$. Написать уравнение медианы AE.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - y + 2z - 8 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 5 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(2, -3, -5\right)$ является проекцией точки $A\left(-5, 2, 1\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 2x + 2y - z - 10 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-5,4,8)$ относительно плоскости α: $4x-y+2z+3=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(0,3,-4)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}.$$

Задача 12. Через точку $B(-4,1,5)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 4x+3y-z-5=0, \\ 3x-7y+8z=0. \end{cases}$$

Вариант 6

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y-3z=-2, \\ 2x+y-z=-1, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=1, \\ x_1-5x_2+x_3-2x_4=3, \\ 4x_1+7x_2+7x_3+x_4=-3 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(1,1,1\right)$, $\overline{b}=\left(-2,-3,-1\right)$, $\overline{c}=-\overline{a}-2\overline{b}-\overline{j}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(2,1\right)$, $B\left(-1,2\right)$, $C\left(1,5\right)$. Найти угол между высотой и медианой, проведенными из вершины A.

Задача 6. Через точку $M\left(4,-3\right)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна трем квадратным единицам.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(8,-4,-2\right)$ является проекцией точки $A\left(3,-4,2\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+5}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x-6y-2z+14=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(3,-5,6)$ относительно плоскости $\alpha:\ 7x+2y-3z-7=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(2,-1,3)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(2,0,-7)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 9x+2y-7z+1=0, \\ x-3y+4z-6=0. \end{cases}$$

Вариант 7

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x+2y+4z=10, \\ 3x+3y+z=6, \\ x-y+2z=3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 13x_2 - 21x_3 - 11x_4 = -1 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, где $\bar{a} = (2, 3, -1)$, $\bar{b} = (2, 1, 0)$, $\bar{c} = \bar{a} - 4\bar{b} + 5\bar{i}$.

Задача 5. Найти углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x + 2y + 5 = 0$, $5x - 2y - 11 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.

Задача 6. Составить уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым l_1 и l_2 и проходящей посредине между ними, если l_1: $x - 5y - \frac{1}{3} = 0$, l_2: $\frac{x+0,5}{5} = \frac{y+0,5}{1}$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - 4y + 5z - 2 = 0$ и $x - 2y - 3z - 4 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(7, 1, -3)$ является проекцией точки $A(1, -3, -2)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 4x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-9, 2, -5)$ относительно плоскости $\alpha:\ x - 7y + 4z + 2 = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-4, 0, 9)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}.$$

Задача 12. Через точку $B(-8, 1, -3)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 3x - 3y + z - 11 = 0, \\ x + 5y - 2z = 0. \end{cases}$$

Вариант 8

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 1, \\ x + y - z = -1, \\ 8x + 4y - 2z = 2. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(1, 2, -1\right)$, $\overline{b} = \left(-2, 1, 2\right)$, $\overline{c} = 2\overline{a} + 4\overline{b} + 3\overline{i}$.

Задача 5. Составить уравнения сторон треугольника, для которого точки $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(0, 4)$ являются серединами сторон.

Задача 6. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр тяжести треугольника со сторонами $2x+7y-17=0$, $x-y-4=0$ и $2x-11y+37=0$.

Задача 7. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскостью $3x-y+2z-5=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(-2, -1, 2)$ является проекцией точки $A(8, 1, -6)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 5x+5y-2z+2=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-1, 4, 3)$ относительно плоскости $\alpha: \ 2x+5y-z+11=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(6, -5, 7)$ до прямой

$$l: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{3}.$$

Задача 12. Через точку $B(1,-5,0)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 8x+y-7z+4=0, \\ 3x-5y+z-2=0. \end{cases}$$

Вариант 9

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x+2y-z=2, \\ x+3y+4z=2, \\ -x-y+3z=3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+6x_2-7x_3-2x_4=1, \\ -x_1-2x_2+2x_3+3x_4=-3, \\ 2x_1+10x_2-13x_3+6x_4=-9 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(-2, 1, 2\right)$, $\overline{b} = \left(2, 0, -1\right)$, $\overline{c} = -4\overline{a} + 3\overline{b} - 4\overline{j}$.

Задача 5. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A\left(-1, 1\right)$, $B\left(2, -1\right)$, $C\left(4, 0\right)$.

Задача 6. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми: $x + 7y - 6 = 0$, $5x - 5y + 1 = 0$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $3x + 5y + 7z - 6 = 0$ и $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(4, 1, -6\right)$ является проекцией точки $A\left(3, -1, 2\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x}{-7} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 2x - y + 5z - 3 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-3, -7, 2)$ относительно плоскости $\alpha:\ 4x+3y-2z-5=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(7,1,1)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(3, -1, 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} x+5y-6z+1=0, \\ 4x-y-2z+7=0. \end{cases}$$

Вариант 10

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y-z=7, \\ x-y+z=-1, \\ x+2y-5z=11. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 2x_1-7x_2+4x_3=2 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$, векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$, где $\bar{a}=\left(1,-2,-2\right)$, $\bar{b}=\left(3,0,1\right)$, $\bar{c}=-3\bar{a}+\bar{b}+3\bar{k}$.

Задача 5. Дана прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A=6$, $y_B=-2$. Составить уравнение высоты AD треугольника AOB.

Задача 6. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-7=0$ и точка пересечения его диагоналей $P\left(0,-1\right)$. Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}$ и $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-5}{-6}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(1,3,-1\right)$ является проекцией точки $A\left(1,-2,5\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{7}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 4x+y-3z+13=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(8,-1,5)$ относительно плоскости $\alpha:\ 6x-y+3z+7=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-3,1,7)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}.$$

Задача 12. Через точку $B(5,-2,-4)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 2x+7y-z-6=0,\\ 3x-8y+9z+1=0. \end{cases}$$

Вариант 11

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=-3,\\ 2x+y-z=-4,\\ x+2y+3z=3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ -x_1 - 8x_2 + 13x_3 + 37x_4 = 24 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 \\ -6 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & -15 & 9 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(1, 1, 2\right)$, $\overline{b} = \left(-3, 0, -2\right)$, $c = -3\overline{a} + \overline{b} - 2\overline{j}$.

Задача 5. Найти уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения его сторон $x + y - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке $P\left(-1, 0\right)$.

Задача 6. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b для того, чтобы прямые $2x - 3y + 5 = 0$, $ax + by + 1 = 0$, $x - 1 = 0$ проходили через одну и ту же точку?

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $4x - y + 8z - 7 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(12, -1, 5)$ является проекцией точки $A(1, 3, -1)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{-6}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x-2y+z-11=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-6, 1, -4)$ относительно плоскости $\alpha:\ 3x-2y+9z-1=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(2, -1, 1)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}.$$

Задача 12. Через точку $B(6, -1, 0)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} x+2y-6z-1=0, \\ 7x-5y+z+4=0. \end{cases}$$

Вариант 12

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x-4y+3z=-9, \\ 2x+7y-5z=12, \\ -x-y=-1. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 1, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(4, 3, -2\right)$, $\overline{b} = \left(1, 2, -1\right)$, $\overline{c} = \overline{a} - 5\overline{b} - 2\overline{j}$.

Задача 5. Даны две вершины треугольника $A\left(2, -2\right)$ и $B\left(3, -1\right)$. Медианы треугольника пересекаются в точке $P\left(1; 0\right)$. Составить уравнение высоты треугольника, проходящей через третью вершину C.

Задача 6. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми $3x+y-3\sqrt{10}=0$ и $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

Задача 7. Найти угол между прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{4}$ и плоскостью $x-3y+6z-1=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(11,-7,2)$ является проекцией точки $A(7,1,-2)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x-5y+z-2=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(7,-2,5)$ относительно плоскости α: $x+4y-2z-7=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-8,2,0)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(7,-2,-1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 3x-9y+z-2=0, \\ 6x+y-7z+5=0. \end{cases}$$

Вариант 13

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x + 3y - 4z = 2, \\ 7x + y - 2z = 3, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -5, \\ 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 13 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(2,1,-4\right)$, $\overline{b}=\left(1,3,2\right)$, $\overline{c}=4\overline{a}-\overline{b}-2\overline{i}$.

Задача 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+y-7=0$ и перпендикулярно к прямой $y=2x$.

Задача 6. Через начало координат провести прямую так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от точек $A\left(2,2\right)$ и $B\left(4,0\right)$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $3x-2y-6z-7=0$ и $2x+y-2z+5=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(5,-4,-2\right)$ является проекцией точки $A\left(2,-1,0\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x}{2}=\frac{y+7}{1}=\frac{z-2}{2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 11x-2y-10z+15=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(-4,0,1\right)$ относительно плоскости α: $8x-3y+z-1=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(0,-1,3\right)$ до прямой

$$l: \ \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}.$$

Задача 12. Через точку $B(-9, 0, 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} x + 8y - 5z + 1 = 0, \\ 4x - 3y + 6z = 0. \end{cases}$$

Вариант 14

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -3x - 2y + z = 4, \\ 5x + y - z = -3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 3x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 22x_4 = 10 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(2,-2,-1\right)$, $\overline{b}=\left(-2,3,4\right)$, $\overline{c}=-\overline{a}-5\overline{b}-\overline{i}$.

Задача 5. Даны две вершины треугольника $A\left(-10,2\right)$ и $B\left(6,4\right)$, его высоты пересекаются в точке $M\left(5,2\right)$. Определить координаты третьей вершины.

Задача 6. Составить уравнение геометрического места точек, отклонение которых от прямой $8x-15y-25=0$ равно -2.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+5}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{\sqrt{2}}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(3,2,-4\right)$ является проекцией точки $A\left(5,-3,-4\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 2x+y-3z+1=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(4,-7,0)$ относительно плоскости $\alpha:\ 5x-2y+3z+4=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-2,-1,3)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-7}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-1}{6}.$$

Задача 12. Через точку $B(-5,0,1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} x-2y+4z-5=0, \\ 3x+4y-6z+1=0. \end{cases}$$

Вариант 15

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x-2y+3z=12. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 11x_4 = 18 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(1, -2, 3\right)$, $\overline{b} = \left(3, 2, -2\right)$, $\overline{c} = -2\overline{a} - 2\overline{b} - 5\overline{j}$.

Задача 5. Средняя линия трапеции имеет уравнение $2x + 3y - 6 = 0$. Составить уравнения оснований трапеции, если известно, что точка $M\left(3, 2\right)$ лежит на одном из оснований.

Задача 6. Даны вершины треугольника: $A\left(4, 6\right)$, $B\left(-4, 0\right)$, $C\left(-1, 4\right)$. Составить уравнения: а) медианы CM; б) биссектрисы BN; в) высоты AK.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x + 2y + z + 15 = 0$ и $3x - 2y + 4z - 9 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(6,-2,2)$ является проекцией точки $A(3,5,-6)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{1}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x-2y-5z-17=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(0,6,-5)$ относительно плоскости $\alpha:\ 9x+y-z-2=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-3,1,2)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{-3}.$$

Задача 12. Через точку $B(6,-3,2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases}2x-6y+3z-4=0,\\ 3x+7y-8z=0.\end{cases}$$

Вариант 16

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases}2x-y-z=5,\\ 5x+y+4z=13,\\ x-y+2z=-1.\end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ 7x_1 - x_2 - 25x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(2, -2, 3\right)$, $\bar{b} = \left(1, -1, 2\right)$, $\bar{c} = -5\bar{a} + \bar{b} + 7\bar{k}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(1, 2\right)$, $B\left(3, 7\right)$, $C\left(5, 13\right)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

Задача 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(1, 3\right)$ так, что середина ее отрезка, заключенного между параллельными прямыми $x+2y+5=0$ и $x+2y+1=0$ лежит на прямой $x-y-5=0$.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(3,-2,-5)$ является проекцией точки $A(2,-1,5)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+6}{2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x+2y+2z-4=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-5,0,2)$ относительно плоскости α: $3x-2y+4z-6=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-2,0,7)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{5}.$$

Задача 12. Через точку $B(-7,4,-1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases}4x-9y+z-1=0,\\ x+5y-2z+2=0.\end{cases}$$

Вариант 17

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z = 9, \\ x - 2y - z = -6, \\ x + y - 3z = -18. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 18x_4 = 4, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 = 1 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & -15 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(5,4,3\right)$, $\overline{b}=\left(-2,2,2\right)$, $\overline{c}=3\overline{a}-5\overline{b}-2\overline{j}$.

Задача 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(3,-1\right)$, параллельно прямой $y=3x+7$.

Задача 6. В равнобедренном треугольнике известно уравнение основания $x-2y+3=0$, уравнение одной из его боковых сторон $4x-y+5=0$ и точка $P\left(1{,}2;5{,}6\right)$ на другой боковой стороне. Вычислить расстояние от вершины при основании до боковой стороны.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x-2y+2z-6=0$ и $x+z-8=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(2,1,-3\right)$ является проекцией точки $A\left(4,-3,0\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x+2y-4z+8=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(3,-1,4\right)$ относительно плоскости $\alpha:\ 6x+5y-z-13=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(4,-5,1\right)$ до прямой

$$l:\ \frac{x}{-3}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-4}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(8,-6,0)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases}7x+2y-6z+5=0,\\ 3x-5y+8z-4=0.\end{cases}$$

Вариант 18

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases}3x+2y+z=3,\\ 6x+8y+5z=7,\\ 9x+10y+3z=13.\end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+9x_4=3,\\ 2x_1-2x_2+x_3-7x_4=4,\\ 8x_1+x_3-3x_4=18\end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, где $\bar{a} = (4, 5, 8)$, $\bar{b} = (2, 1, -1)$, $\bar{c} = -2\bar{a} - \bar{b} + \bar{j}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, 4)$. Составить уравнения трех сторон треугольника.

Задача 6. На прямой $2x + 3y - 8 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(4, 4)$ и $B(2, -4)$.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ и $\frac{x+2}{-4} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-4}{10}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(11, -2, -10)$ является проекцией точки $A(0, -7, 2)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-5}$$

параллельно плоскости

$$\alpha\colon\ 5x-4y-2z-5=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(-6,7,0\right)$ относительно плоскости $\alpha\colon\ 8x-y+5z+2=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(6,0,-9\right)$ до прямой

$$l\colon\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+4}{7}.$$

Задача 12. Через точку $B\left(-2,7,4\right)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l\colon\ \begin{cases}6x-4y+9z-1=0,\\ 4x+2y-7z+15=0.\end{cases}$$

Вариант 19

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases}3x+y-5z=0,\\ 4x-y+z=3,\\ x+3y-13z=-6.\end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -12 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(1, -1, -1\right)$, $\overline{b} = \left(2, 3, 4\right)$, $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + 3\overline{i}$.

Задача 5. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 5$ и вершину прямого угла $\left(4, -1\right)$.

Задача 6. Составить уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым l_1 и l_2 и проходящей посредине между ними, если l_1: $3x - 2y - 1 = 0$, l_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3}$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - 2y + z + 5 = 0$ и $2x - y + 3z - 6 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(3,-5,1)$ является проекцией точки $A(9,-2,0)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 11x-7y+2z-2=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(4,-3,1)$ относительно плоскости $\alpha: \ 5x+4y-2z-3=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(2,-3,1)$ до прямой

$$l: \ \frac{x-7}{4}=\frac{y+6}{-5}=\frac{z+9}{1}.$$

Задача 12. Через точку $B(3,-6,5)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} x+9y-7z+3=0, \\ 8x-y+5z-6=0. \end{cases}$$

Вариант 20

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3, \\ 3x-5y+2z=4, \\ 4x-7y+z=-5. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 13x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 8 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(4, -1, -1\right)$, $\overline{b} = \left(2, 3, -1\right)$, $\overline{c} = 5\overline{a} - 4\overline{b} - 3\overline{i}$.

Задача 5. Через точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $x - 3y + 4 = 0$ провести прямую, которая: а) проходит через начало координат; б) параллельна оси абсцисс; в) проходит через точку $\left(4, 3\right)$.

Задача 6. Даны вершины четырехугольника $A(-9,0)$, $B(-3,6)$, $C(3,4)$, $D(6,-3)$. Найти точку пересечения его диагоналей AC и BD и вычислить угол между ними.

Задача 7. Найти угол между прямой $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскостью $4x+y+z-3=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(3,-2,-1)$ является проекцией точки $A(12,-9,1)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{-3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 12x-y+5z+3=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-1,8,-9)$ относительно плоскости $\alpha:\ x-7y+3z+6=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-4,0,7)$ до прямой

$$l:\ \frac{x}{6}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{8}.$$

Задача 12. Через точку $B(-4,8,7)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 5x-6y+z-2=0, \\ 4x+3y-2z+8=0. \end{cases}$$

Вариант 21

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y+2z=-3, \\ 2x+y-z=3, \\ 2x-2y+z=6. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+x_4=2, \\ -2x_1+x_2+3x_3-x_4=3, \\ 12x_1+5x_2+x_3+5x_4=-5 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(2,-1,3\right)$, $\overline{b}=\left(1,2,-1\right)$, $\overline{c}=-2\overline{a}+3\overline{b}+3\overline{j}$.

Задача 5. Найти значение числа a, при котором прямая, задаваемая уравнением $ax-2y-3=0$, параллельна прямой, проходящей через точки $A\left(-1,2\right)$ и $B\left(1,4\right)$.

Задача 6. Дано уравнение стороны треугольника $x+2y-2=0$ и уравнения $2x-3y+4=0$, $2x+y-1=0$ двух его высот. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $-3x+6y+2z+2=0$ и $-x+8y+4z-5=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(4,1,-3\right)$ является проекцией точки $A\left(1,3,-2\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-1}{-13}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{5}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x+3y-z-7=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(2,-7,6\right)$ относительно плоскости $\alpha:\ 2x+3y-4z-9=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(0,-3,1\right)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+4}{5}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z-7}{2}.$$

Задача 12. Через точку $B(1,-9,-3)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 9x+y+3z-4=0, \\ 7x-2y-5z+1=0. \end{cases}$$

Вариант 22

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=3, \\ 2x+5y+5z=-2, \\ 2x+5y+11z=6. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4=-2, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4=-3, \\ 3x_1+x_2-8x_3+2x_4=-1 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(2, 2, 3\right)$, $\bar{b} = \left(-2, 1, 3\right)$, $\bar{c} = -3\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{k}$.

Задача 5. Даны середины сторон треугольника: $M\left(2, 1\right)$, $N\left(5, 3\right)$, $P\left(3, -4\right)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

Задача 6. Уравнение одной из сторон угла $2x - 9y - 3 = 0$, а уравнение биссектрисы $4x - y + 11 = 0$. Найти уравнение второй стороны угла.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ и $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(-2, -1, 5\right)$ является проекцией точки $A\left(0, -2, 1\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 4x + y - 6z - 2 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-7, 2, 0)$ относительно плоскости $\alpha: \ 4x - 6y + 7z + 1 = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(4, -8, 3)$ до прямой

$$l: \ \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{7}.$$

Задача 12. Через точку $B(0, -5, 4)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} 6x - 2y + 5z - 3 = 0, \\ x + 4y - 3z + 7 = 0. \end{cases}$$

Вариант 23

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -5, \\ 4x + 5y + 6z = 10, \\ 2x + 8y + 9z = -15. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -1, \\ -2x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 32x_4 = 6, \\ 13x_1 - x_2 - 30x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 14 & 0 \\ 4 & 2 & 13 & -1 \\ 3 & 5 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(-2, 4, 1\right)$, $\overline{b} = \left(2, -4, 8\right)$, $\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b} - 2\overline{j}$.

Задача 5. Пусть известны уравнения сторон треугольника ABC: $x + 3y - 31 = 0$, $4x - y - 7 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Найти точку пересечения его высот.

Задача 6. Даны вершины треугольника: $A\left(-6, 14\right)$, $B\left(12, -10\right)$, $C\left(-12, 3\right)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $6x + 2y + 3z + 4 = 0$ и $-x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(5,5,-2)$ является проекцией точки $A(-1,-2,3)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+6}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 2x+y+2z=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(8,0,-5)$ относительно плоскости $\alpha:\ 7x+8y-6z-4=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(5,-6,-1)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+3}{-4}=\frac{y}{7}=\frac{z-8}{9}.$$

Задача 12. Через точку $B(-6,1,0)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 7x+y-4z+8=0, \\ 2x-5y+3z-9=0. \end{cases}$$

Вариант 24

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y-3z=2, \\ 2x-2y+z=3, \\ x+y-z=2. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 = -10 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(2, -1, 4\right)$, $\overline{b} = \left(1, 4, -3\right)$, $\overline{c} = \overline{a} - 5\overline{b} + \overline{j}$.

Задача 5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$ и $x - 2y + 15 = 0$, а также уравнение одной из его диагоналей $7x + y + 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

Задача 6. При каком значении параметра a уравнения $(a+1)x - 2ay + 19 = 0$ и $3ax - 8y - 12 = 0$ определяют параллельные прямые.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ и $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(4,-2,3)$ является проекцией точки $A(-2,1,0)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{5}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 7x+y-3z+2=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(0,-4,3)$ относительно плоскости $\alpha:\ 9x-y+8z+5=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-7,5,0)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-5}{2}=\frac{y+4}{9}=\frac{z-1}{-6}.$$

Задача 12. Через точку $B(7,-2,-1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 5x+7y-z+6=0, \\ 8x-y+9z-1=0. \end{cases}$$

Вариант 25

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} -x+2y-z=1, \\ 2x+2y+3z=4, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+4x_4=5, \\ -2x_1+3x_2+4x_3-x_4=-3, \\ 10x_2+20x_3+10x_4=2 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$, векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$, где $\bar{a}=\left(4,-5,1\right)$, $\bar{b}=\left(3,1,-2\right)$, $\bar{c}=-\bar{a}+8\bar{b}+\bar{i}$.

Задача 5. Даны две вершины треугольника $A(-4,5)$ и $B(4,1)$ и точка пересечения его высот $D(3,5)$. Составить уравнения сторон треугольника.

Задача 6. Даны две прямые: $3x+4y-10=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти точку, которая бы находилась на расстоянии 5 единиц как от одной, так и от другой прямой.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $-3x+y+2z+1=0$ и $-x+2y-z-5=0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(3,-6,-2)$ является проекцией точки $A(-5,2,-3)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-2}{-3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x-4y-2z=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-3,-2,8)$ относительно плоскости $\alpha:\ x+4y-9z+1=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(8,-1,2)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+4}{-3}=\frac{y-5}{6}=\frac{z+2}{1}.$$

Задача 12. Через точку $B(4,-5,9)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \begin{cases} x - 9y - 6z + 2 = 0, \\ 6x - y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Вариант 26

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 7, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(4,3,-4\right)$, $\overline{b}=\left(2,1,5\right)$, $\overline{c}=4\overline{a}-5\overline{b}-2\overline{i}$.

Задача 5. Даны две вершины треугольника: $A\left(-1,3\right)$, $B\left(3,2\right)$, $C\left(1,-2\right)$. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно его сторонам.

Задача 6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(-2,6\right)$ и составляющей с осью Ox угол, в два раз меньший угла, который составляет с осью Ox прямая $-3x+\sqrt{3}y+5=0$.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(1,4,-1\right)$ является проекцией точки $A\left(-5,2,0\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x-y-z-22=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(-4,0,7\right)$ относительно плоскости α: $2x-7y-z+17=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(0, 3, -4)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-5}{8} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-2}{-7}.$$

Задача 12. Через точку $B(-9, 4, 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 2x - 7y + z - 3 = 0, \\ 5x + y - 4z + 8 = 0. \end{cases}$$

Вариант 27

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1, \\ 2x + y - z = 0, \\ x - y + 2z = -9. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 12 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(-1, 2, 1\right)$, $\overline{b} = \left(-3, 1, 3\right)$, $\overline{c} = 2\overline{a} + 4\overline{b} + 3\overline{k}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(-3, 2\right)$, $B\left(4, 5\right)$, $C\left(2, -1\right)$. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и центр тяжести треугольника.

Задача 6. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $3x - 4y + 1 = 0$ и $3x - 4y - 2 = 0$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - y - 2z + 1 = 0$ и $2x + y + z - 3 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(1, 4, -1\right)$ является проекцией точки $A\left(2, 1, -1\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 3x - 2y + z + 3 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(5,-2,1)$ относительно плоскости α: $3x+9y-2z-4=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(7,-1,-3)$ до прямой

$$l:\ \frac{x+5}{4}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-8}{9}.$$

Задача 12. Через точку $B(0,-7,4)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 3x-y+9z-6=0, \\ 4x+2y-3z+8=0. \end{cases}$$

Вариант 28

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x+y+z=22, \\ x+y-2z=-18. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+9x_2-3x_3-6x_4=3, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(1, 2, -4\right)$, $\bar{b} = \left(3, -2, -1\right)$, $\bar{c} = -4\bar{a} - 3\bar{b} - 2\bar{k}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(3, 7\right)$, $B\left(5, 3\right)$, $C\left(2, 0\right)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной медиане AD треугольника.

Задача 6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(3, -3\right)$ и составляющей с осью Ox угол, в три раза больший угла, который составляет с осью Ox прямая $x - y - 15 = 0$.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(6, -1, 13\right)$ является проекцией точки $A\left(-1, 3, 4\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{7}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x-4y+2z-5=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(0,6,-4)$ относительно плоскости $\alpha:\ 7x-5y+4z-11=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(6,-5,0)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z+2}{-3}.$$

Задача 12. Через точку $B(-3,8,2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases}7x+2y-z+9=0,\\ 9x-5y+2z-8=0.\end{cases}$$

Вариант 29

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases}x+y+2z=4,\\ 2x-y+2z=-1,\\ 4x+y+4z=9.\end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$, где $\bar{a} = \left(2, -1, 5\right)$, $\bar{b} = \left(2, -3, 3\right)$, $\bar{c} = 5\bar{a} + \bar{b} - 4\bar{j}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(-4, 1\right)$, $B\left(-2, 2\right)$, $C\left(1, 0\right)$. Найти точку пересечения высот.

Задача 6. Отрезок, соединяющий точки $A\left(-5, 8\right)$ и $B\left(10, 2\right)$, точками C и D делится на три равные части. Найти точки C и D.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и $x + y + \sqrt{2}z + 6 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(2, -1, 3)$ является проекцией точки $A(0, -1, 7)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 3x + y - z + 2 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-5, 1, 3)$ относительно плоскости $\alpha: \ 6x - 2y - 7z + 8 = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-8, 9, 1)$ до прямой

$$l: \ \frac{x+6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}.$$

Задача 12. Через точку $B(7, -3, 4)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} 3x + 8y - z + 2 = 0, \\ 6x - 5y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

Вариант 30

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 18, \\ x + y - 2z = 4, \\ 3x - 2y + z = 9. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 4, \\ -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 4x_4 = -5, \\ 3x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(4, -6, 1\right)$, $\overline{b} = \left(2, 3, 1\right)$, $\overline{c} = \overline{a} + 6\overline{b} - 9\overline{j}$.

Задача 5. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

Задача 6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(6,-2\right)$ и составляющей с осью Ox угол, в два раза больший угла, который составляет с осью Ox прямая $\sqrt{3}x-3y+12=0$.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(3,-6,-2\right)$ является проекцией точки $A\left(-5,2,-3\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x}{-5}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-2}{1}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 2x+3y+z-6=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(9,-2,4\right)$ относительно плоскости $\alpha:\ 8x+3y-z-7=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(5,-4,6\right)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-7}{8}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{9}.$$

Задача 12. Через точку $B\left(4,-3,1\right)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 31

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = -3, \\ 2x - y + 2z = 9, \\ 3x - 2y + 4z = 1. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ -3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(7, 4, 1\right)$, $\overline{b} = \left(2, 3, 6\right)$, $\overline{c} = 6\overline{a} - 2\overline{b} - 2\overline{i}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(-3, 3\right)$, $B\left(2, 1\right)$, $C\left(4, -5\right)$. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения высот треугольника.

Задача 6. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M\left(5, 1\right)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $2x - 2y - z + 7 = 0$ и $2x + y + 3 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(-1, 3, 4\right)$ является проекцией точки $A\left(2, 4, 5\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x + y - z + 15 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q\left(2, -1, 1\right)$ относительно плоскости $\alpha:\ x - y + 2z - 2 = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A\left(-1, 2, 0\right)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}.$$

Задача 12. Через точку $B(-5, 6, 8)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 2x-y+3z-2=0, \\ -x-y-z+1=0. \end{cases}$$

Вариант 32

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+2z=2, \\ 5x+y+2z=6, \\ x+5y-z=4. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7, \\ x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 3x_1-12x_2-3x_3-9x_4=9 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$, векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, где $\overline{a}=\left(5,-2,4\right)$, $\overline{b}=\left(1,3,2\right)$, $\overline{c}=2\overline{a}-4\overline{b}+2\overline{i}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A\left(-3,3\right)$, $B\left(4,2\right)$, $C\left(1,-1\right)$. Составить уравнение средней линии треугольника, параллельной стороне AC.

Задача 6. Диагонали ромба длиной в 30 и 16 единиц приняты за оси координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(1,-1,8\right)$ является проекцией точки $A\left(4,1,5\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+7}{5}=\frac{y+9}{8}=\frac{z}{1}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 2x - y - 2z - 2 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(1, 3, -4)$ относительно плоскости $\alpha: \ 3x + y - 2z = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(5, 2, -8)$ до прямой

$$l: \ \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

Задача 12. Через точку $B(12, -6, 1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 33

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0, \\ 2x + 5y - 3z = 9, \\ 5x + 6y - 2z = 15. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 12x_2 + 16x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$, векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ и смешанное произведение $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$, где $\overline{a} = \left(1, -7, -2\right)$, $\overline{b} = \left(2, -5, 3\right)$, $\overline{c} = -3\overline{a} + 5\overline{b} - 3\overline{j}$.

Задача 5. Даны точки $A\left(-5, 1\right)$ и $B\left(3, 7\right)$. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок AB.

Задача 6. Даны вершины треугольника: $A\left(-2, 0\right)$, $B\left(0, 3\right)$, $C\left(2, 1\right)$. Найти расстояние от вершины C до медианы, проведенной из вершины B.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 2z - 7 = 0$ и $x - y + 2z = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B\left(-3, 4, 2\right)$ является проекцией точки $A\left(-2, 7, 4\right)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+5}{-2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{-5}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ 2x-3y-5z-9=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(3,-3,-1)$ относительно плоскости $\alpha:\ 2x-4y-4z-13=0.$

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(4,3,10)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Задача 12. Через точку $B(-6,6,-5)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

Вариант 34

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=-1, \\ 3x-2y+4z=1. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 7 & -4 & -2 & -15 \\ 1 & -2 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ и смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, где $\bar{a} = (3, 1, 6)$, $\bar{b} = (5, 1, 1)$, $\bar{c} = -3\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{k}$.

Задача 5. Даны вершины треугольника: $A(-3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(2, 0)$. Найти длину высоты, проведенной к стороне BC треугольника.

Задача 6. Через точку $P(-2, 1)$ проведена прямая так, что ее расстояние от точки $C(3, 1)$ равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.

Задача 7. Найти угол между прямыми $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(-7,1,-4)$ является проекцией точки $A(-8,3,-6)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{-2}$$

параллельно плоскости

$$\alpha:\ x-3y+6z+7=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(2,4,2)$ относительно плоскости $\alpha:\ 6x+4y+z+23=0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(0,2,1)$ до прямой

$$l:\ \frac{x-1{,}5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}.$$

Задача 12. Через точку $B(-8,3,-6)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l:\ \begin{cases} 4x+5y-2z+1=0, \\ 3x-2y-z-4=0. \end{cases}$$

Вариант 35

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x-4y-2z=0, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=13. \end{cases}$$

Решить систему:

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом (используя обратную матрицу, вычисленную с помощью алгебраических дополнений).

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3-x_4=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-6x_3-8x_4=2 \end{cases}$$

и решить ее методом Гаусса.

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Вычислить скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$, векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ и смешанное произведение $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$, где $\bar{a}=\left(3,-3,6\right)$, $\bar{b}=\left(2,1,-1\right)$, $\bar{c}=2\bar{a}-6\bar{b}-2\bar{j}$.

Задача 5. Точки $A\left(2,1\right)$, $B\left(4,2\right)$, $C\left(-3,3\right)$ — последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Написать уравнения сторон параллелограмма.

Задача 6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(0, 2)$ и уравнения высот BM и CM: $x + y = 4$ и $y = 2x$, где M — точка пересечения высот.

Задача 7. Найти угол между плоскостями $x - y + z + 2 = 0$ и $2x - y - 2z + 1 = 0$.

Задача 8. Составить уравнение плоскости, если точка $B(1, -5, -2)$ является проекцией точки $A(5, -5, 1)$ на эту плоскость.

Задача 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$l: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-7}{-3}$$

параллельно плоскости

$$\alpha: \ 2x - y + 3z + 15 = 0.$$

Задача 10. Найти координаты точки P симметричной с точкой $Q(-2, 0, 3)$ относительно плоскости α: $2x - 2y + 10z + 1 = 0$.

Задача 11. Вычислить расстояние от точки $A(-4, -5, 3)$ до прямой

$$l: \ \frac{x+1}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}.$$

Задача 12. Через точку $B(-7, 5, 9)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l: \ \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$$

Литература

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : / Д. В. Беклемишев. — М. : Высшая школа, 2009.

2. *Бугров, Я. С.* Высшая математика : в 3 т. Т. 1 : Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Дрофа, 2009.

3. *Выск, Н. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия : / Н. Д. Выск, К. Ю. Осипенко. — М. : МАТИ, 2011.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. — М. : Оникс, 2012.

5. Линейная алгебра : методические указания и варианты курсовых заданий / сост. Е. В. Введенская, Н. Д. Выск, Т. А. Гуторина. — М. : МАТИ, 2005.

6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : методические указания к домашнему заданию по высшей математике / сост. Н. П. Амукова, Т. А. Гуторина, Ю. В. Селиванов. — М. : МАТИ, 1989.

7. Методические указания и варианты индивидуальных домашних заданий по линейной алгебре для студентов I курса / сост. Н. П. Амукова, Ю. В. Селиванов. — М. : МАТИ, 1984.

8. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч. 1 / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. — М. : Физматлит, 2009.

9. Уравнения прямой (элементы аналитической геометрии на плоскости) : методические указания для студентов вечернего отделения / сост. О. Ю. Агарева, В. Е. Захаров, Ю. В. Селиванов. — М. : МАТИ, 2007.

Оглавление