Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

(Элементы аналитической геометрии на плоскости)

Методические указания для студентов вечернего отделения

Составители: Агарева О.Ю.
Захаров В.Е.
Селиванов Ю.В.

Москва 2007

Данные методические указания предназначены для студентов вечернего отделения «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, изучающих в рамках общего курса математики тему «Векторная и линейная алгебра в приложении к аналитической геометрии». Они ставят своей целью помочь студентам лучше усвоить теоретический и практический материал по элементам векторной алгебры и аналитической геометрии на плоскости. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание.

Одна из важных частей курса математики для студентов МАТИ — векторная и линейная алгебра в приложении к аналитической геометрии. Эта математическая дисциплина изучается студентами дневного и вечернего отделений на первом курсе. Предлагаемые методические указания ставят своей целью помочь студентам вечернего отделения усвоить теоретический и практический материал по теме «Уравнения прямой. Элементы аналитической геометрии на плоскости». В них рассматриваются простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости, начальные сведения о векторах, линейные действия над ними, скалярное произведение и преобразования координат векторов, основные уравнения прямых на плоскости. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание. Каждому студенту группы выдаются индивидуальные задачи.

1. Простейшие задачи на плоскости

1.1. Расстояние между точками на координатной оси

Определение 1. *Расстояние* $d(x_1, x_2)$ между точками x_1 и x_2 оси OX определяется равенством: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{если} \quad x_1 > x_2, \\ 0, & \text{если} \quad x_1 = x_2, \\ x_2 - x_1, & \text{если} \quad x_2 > x_1. \end{cases}$

Всегда $d(x_1, x_2) \geq 0$;

обозначение: $d(A, B) = |AB|$, где $|AB|$ — длина отрезка $AB \subset OX$.

Пример 1. Пусть $x_1 = -3$, $x_2 = 15$. Тогда $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |-3 - 15| = 18$.

1.2. Деление отрезка на координатной оси в данном отношении

Предположим, что требуется найти точку x_0, которая делит отрезок $[x_1, x_2]$ в отношении $m:n$ (см. рис. 1).

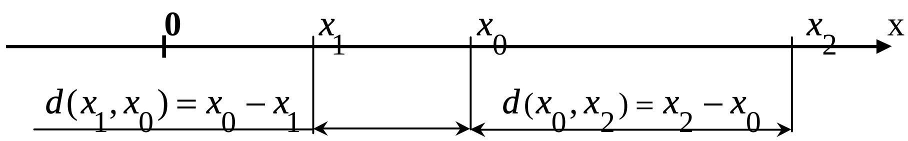

Рис. 1

Тогда

$$\frac{d(x_1,x_0)}{d(x_0,x_2)}=\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}=\frac{m}{n} \quad\Rightarrow\quad n(x_0-x_1)=m(x_2-x_0) \quad\Rightarrow\quad x_0(n+m)=nx_1+mx_2.$$

Следовательно, $$x_0=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}.$$

Пример 2. Найти точку x_0, делящую отрезок $[-3{,}15]\subset OX$ в отношении $1:2$.

Решение. Мы имеем

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{2},\ m=1,\ n=2,\ x_1=-3,\ x_2=15, \quad x_0=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{2\cdot(-3)+1\cdot 15}{2+1}=3.$$

Отсюда $d(x_1,x_0)=6$, $\quad d(x_0,x_2)=12$, $\quad \dfrac{d(x_1,x_0)}{d(x_0,x_2)}=\dfrac{1}{2}$. $\quad$ Ответ: $x_0=3$.

1.3. Уравнение отрезка, лежащего на координатной оси

Пусть точка x_0 делит отрезок $[x_1, x_2] \subset OX$ в отношении $m : n$. Тогда (см. п. 1.2)

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{n}{n+m}\, x_1 + \frac{m}{n+m}\, x_2 .$$

Если положить $t = \dfrac{m}{n+m}$, то $1 - t = 1 - \dfrac{m}{n+m} = \dfrac{n}{n+m}$, поскольку $\dfrac{n}{n+m} + \dfrac{m}{n+m} = 1$. Отсюда

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{n}{n+m}\, x_1 + \frac{m}{n+m}\, x_2 = (1-t)\, x_1 + t\, x_2 ,$$

т. е.

$$x_0 = x(t) = (1-t)\, x_1 + t\, x_2 .$$

Рассматривая t как параметр, мы имеем зависимость между его значениями и точками отрезка $[x_1, x_2]$. При этом каждому $t \in [0, 1]$ соответствует определенная точка $x(t) \in [x_1, x_2]$, причем $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$.

Определение 2. Формула вида

$$x(t) = (1-t)\, x_1 + t\, x_2 , \quad t \in [0, 1]$$

называется *уравнением отрезка* $[x_1, x_2] \subset OX$.

Пример 3. Отрезок $[-3, 15] \subset OX$ описывается уравнением

$x(t) = -3(1-t) + 15t$, $t \in [0,1]$ **б** $x(t) = 18t - 3$, $t \in [0, 1]$.

1.4. Расстояние между точками на плоскости

Определение 3. Число $d(A,B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ есть *расстояние* между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости (см. рис. 2).

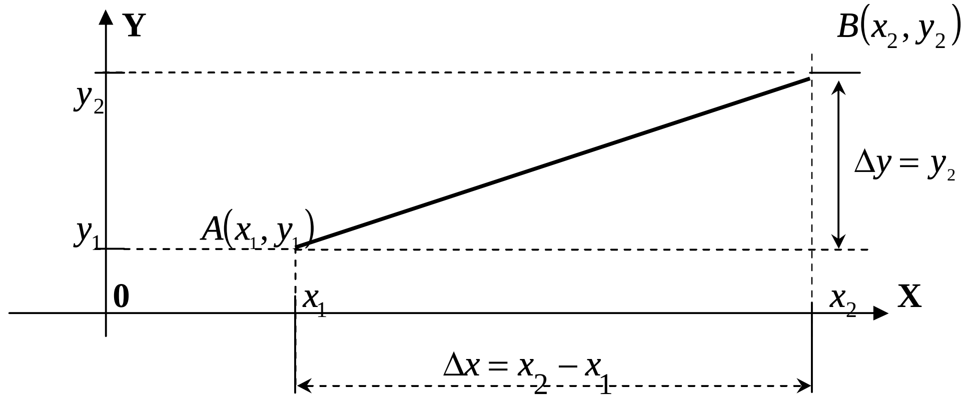

Рис. 2

Пример 4. Пусть $A(-1;\ \ 3), B(2;\ \ 7)$. Тогда

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

1.5. Деление отрезка на плоскости в данном отношении

Требуется найти точку $C(x_0, y_0)$, делящую отрезок AB в отношении $m:n$.

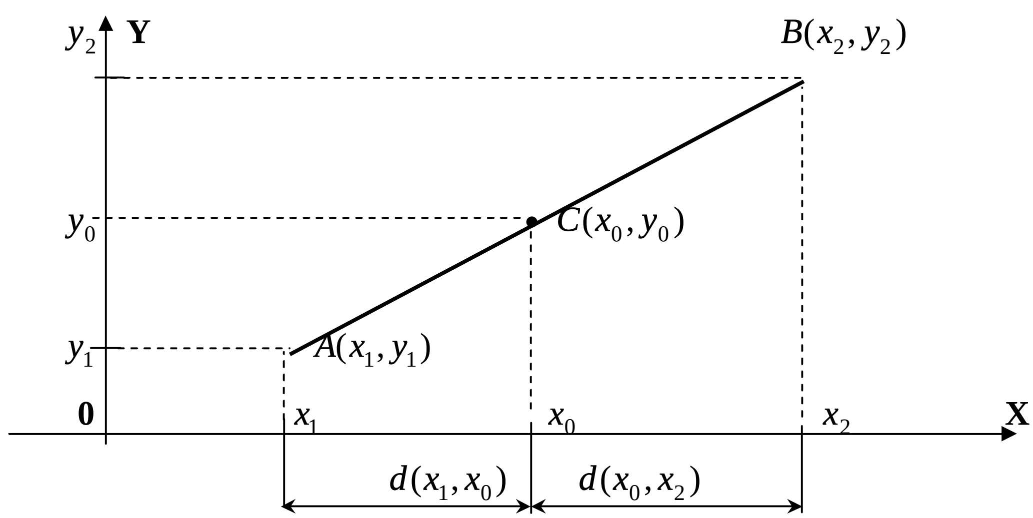

Рис. 3

Проекции отрезка делятся в тех же пропорциях, что и сам отрезок (см. рис. 3). Отсюда

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{d(x_1, x_0)}{d(x_0, x_2)} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n} \Rightarrow n(x_0 - x_1) = m(x_2 - x_0) \Rightarrow x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}.$$

Аналогично $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{d(y_1, y_0)}{d(y_0, y_2)} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}$.

Пример 5. Пусть $A(-1,\ 3)$, $B(2,\ 7)$. Найти точку $C(x_0, y_0)$, делящую отрезок AB в отношении $m:n = 2:1$.

Решение. Мы имеем

$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = 1$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $n = 1$, $m = 2$;

$y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{17}{3}$, где $y_1 = 3$, $y_2 = 7$, $n = 1$, $m = 2$.

Ответ: $C\left(1,\ \frac{17}{3}\right)$.

1.6. Уравнения отрезка, лежащего на плоскости

Пусть точка $C(x_0, y_0)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$. Тогда (см. п. 1.5)

$$x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m} = \frac{n}{n+m} x_1 + \frac{m}{n+m} x_2 = (1-t)x_1 + t\,x_2,$$

$$y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{n+m} = \frac{n}{n+m} y_1 + \frac{m}{n+m} y_2 = (1-t)y_1 + t\,y_2,$$

где $\quad t = \frac{m}{n+m} \quad$ и $\quad 1 - t = \frac{n}{n+m}$.

Рассматривая t как параметр, мы получаем, что каждому значению $t \in [0, 1]$ по формулам $x(t) = (1-t)x_1 + t\,x_2$, $y(t) = (1-t)y_1 + t\,y_2$ соответствует некоторая точка $(x(t), y(t))$ на отрезке AB.

При $t=0$ определяются координаты точки $A(x_1, y_1)$: $x(0)=x_1$, $y(0)=y_1$.

При $t=1$ определяются координаты точки $B(x_2, y_2)$: $x(1)=x_2$, $y(1)=y_2$.

Определение 4. Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — точки на плоскости XOY. У*равнениями отрезка* AB (на плоскости) называются формулы вида

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\,x_1+t\,x_2, \\ y(t)=(1-t)\,y_1+t\,y_2, \\ \qquad t\in[0,1]. \end{cases}$$

Пример 6. Составить уравнения отрезка AB, где $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 7)$.

Ответ: $\begin{cases} x(t)=-(1-t)+2\,t, \\ y(t)=3\,(1-t)+7\,t, \\ \qquad t\in[0,\ 1]. \end{cases}$

2. Начальные сведения о векторах

2.1. Понятие геометрического вектора

Определение 5. *Геометрический вектор* — это направленный отрезок прямой на плоскости или в пространстве, у которого один конец (точка A) называется началом вектора, другой конец (точка B) концом вектора.

Обозначения вектора: $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Вектор характеризуется *длиной* (или *модулем*) и направлением: от A к B. Модуль вектора равен длине отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Определение 6. Вектор $\overline{BA}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Вектор называется *нулевым*, если он имеет нулевую длину.

Очевидно, модули противоположного и исходного векторов равны. У нулевого вектора начало и конец совпадают. Нулевому вектору приписывают любое направление.

Определение 7. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Два коллинеарных вектора называются *одинаково* (*противоположно*) *направленными*, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала. Если вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково (противоположно) направлены, мы будем писать: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Если вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, мы будем писать: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Определение 8. Два вектора называются *равными*, если они имеют равные длины и одинаково направлены (т. е. $\overline{a} = \overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$). Все нулевые векторы считаются равными.

2.2. Линейные действия над векторами и их свойства

Под линейными действиями над векторами понимаются следующие операции:

— сложение векторов;

— умножение вектора на число.

Определение 9. *Сложение двух векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ осуществляется следующим образом:

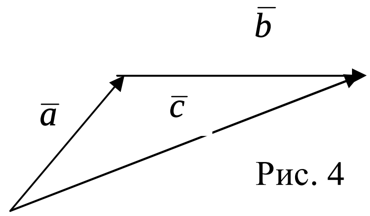

Рис. 4

а) путем параллельного переноса начало вектора $\bar{b}$ совмещается с концом вектора $\bar{a}$ (см. рис. 4);

б) строится третий вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}$. Полученный вектор $\bar{c}$ называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и обозначается $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Определение 10. При *умножении вектора* $\bar{a}$ *на число* $l \in \mathbf{R}$ получается вектор, который обозначается $l\,\bar{a}$ и определяется следующим образом:

$|\,l\,\bar{a}| = |\,l\,||\bar{a}|$, где $|\,l\,\bar{a}|$ — модуль вектора $l\,\bar{a}$, $|\bar{a}|$ — модуль вектора $\bar{a}$.

Если $l > 0$, то направление вектора $l\,\bar{a}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$.

Если $l < 0$, то направление вектора $l\,\bar{a}$ противоположно направлению $\bar{a}$.

Пример 7. Вектор $l\,\bar{a}$ вытянут относительно $\bar{a}$ в l раз, если $l > 1$ (см. рис. 5).

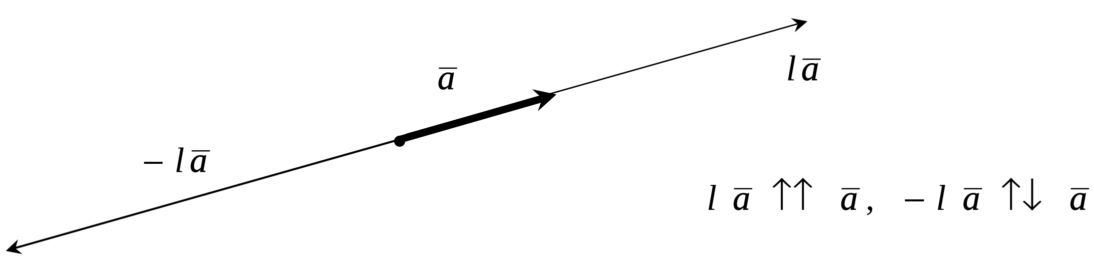

Рис. 5

Пример 8. Построить вектор $\bar{c} = -2\,\bar{a} + \bar{b}$.

Решение:

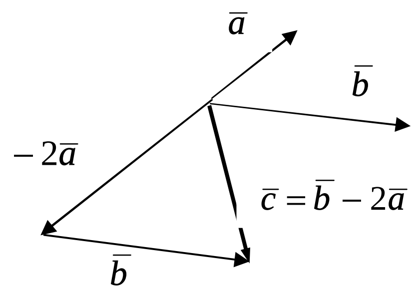

Рис. 6

Свойства линейных действий над векторами

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность).
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативность).
3. $l\,(\bar{a} + \bar{b}) = l\,\bar{a} + l\,\bar{b}$ (дистрибутивность).
4. $(l + m)\,\bar{a} = l\,\bar{a} + m\,\bar{a}$ (дистрибутивность).

2.3. Выражение вектора через коллинеарный вектор

Пусть $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, и пусть модуль вектора $\bar{a}$ в k раз превышает модуль вектора $\bar{b}$, т. е. $\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} = k$. Тогда $\bar{a} = k\,\bar{b}$. Таким образом, в векторе $\bar{a}$ укладывается k векторов $\bar{b}$.

Пусть теперь $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ и $\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} = k$. Тогда $\bar{a} = -k\,\bar{b}$.

Утверждение 1. Если два вектора коллинеарны, то один из них может быть линейно выражен через другой.

2.4. Выражение вектора на плоскости через координатные орты

2.4.1. Выражение вектора через его проекции

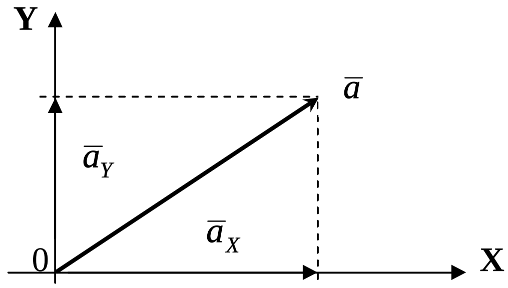

Рис. 7

Пусть $\bar{a}_X$ — проекция вектора $\bar{a}$ на ось OX, $\bar{a}_Y$ — проекция вектора $\bar{a}$ на ось OY (см. рис. 7). Очевидно, $\bar{a} = \bar{a}_X + \bar{a}_Y$.

2.4.2. Линейные действия с проекциями

Утверждение 2. При сложении векторов, их проекции складываются.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выражаются через свои проекции:

$\bar{a} = \bar{a}_X + \bar{a}_Y$, $\bar{b} = \bar{b}_X + \bar{b}_Y$.

Тогда $\bar{a} + \bar{b} = (\bar{a}_X + \bar{b}_X) + (\bar{a}_Y + \bar{b}_Y)$.

Утверждение 3. При умножении вектора на число, его проекции также умножаются на это число.

Пусть $\bar{a} = \bar{a}_X + \bar{a}_Y$. Тогда $k\,\bar{a} = k\,\bar{a}_X + k\,\bar{a}_Y$, где $k \in \mathbf{R}$.

2.4.3. Координаты вектора в прямоугольной системе координат

Единичные векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ называются *координатными ортами*: $\bar{i} \uparrow\uparrow OX$, $|\bar{i}| = 1$; $\bar{j} \uparrow\uparrow OY$; $|\bar{j}| = 1$; $\bar{i} \perp \bar{j}$. Всякий вектор $\bar{a}$ выражается через свои проекции: $\bar{a} = \bar{a}_X + \bar{a}_Y$ (см. рис. 8).

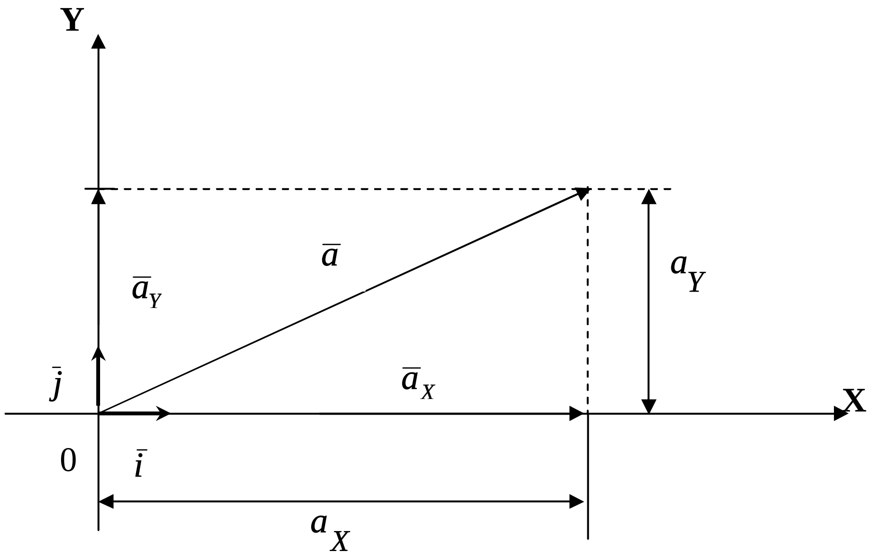

Рис. 8

$\bar{a}_X \uparrow\uparrow \bar{i}$, $|\bar{i}| = 1 \Rightarrow \bar{a}_X = |\bar{a}_X|\,\bar{i} = a_X\,\bar{i}$ (см. 2.3),

где $a_X = |\bar{a}_X|$ — модуль проекции $\bar{a}_X$.

$\bar{a}_Y \uparrow\uparrow \bar{j}$, $|\bar{j}| = 1 \Rightarrow \bar{a}_Y = |\bar{a}_Y|\,\bar{j} = a_Y\,\bar{j}$ (см. 2.3),

где $a_Y = |\bar{a}_Y|$ — модуль проекции $\bar{a}_Y$.

Выразим вектор $\bar{a}$ через координатные орты: $\bar{a} = \bar{a}_X + \bar{a}_Y = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j}$,

где коэффициенты a_X, a_Y — координаты вектора $\bar{a}$.

Определение 11. *Координатами* геометрического вектора $\bar{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости называется пара чисел (a_X, a_Y), определяемая следующим образом:

$$a_X = \begin{cases} |\bar{a}_X|, & \text{если} \quad \bar{a}_X \uparrow\uparrow OX \\ -|\bar{a}_Y|, & \text{если} \quad \bar{a}_X \downarrow\uparrow OX \end{cases}, \text{ где } |\bar{a}_X| \text{ — модуль проекции } \bar{a}_X,$$

$$a_Y = \begin{cases} |\bar{a}_Y|, & \text{если} \quad \bar{a}_Y \uparrow\uparrow OY \\ -|\bar{a}_Y|, & \text{если} \quad \bar{a}_Y \downarrow\uparrow OY \end{cases}, \text{ где } |\bar{a}_Y| \text{ — модуль проекции } \bar{a}_Y .$$

Утверждение 4. Любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации координатных ортов: $\bar{a} = a_X \bar{i} + a_Y \bar{j}$. Коэффициенты этой линейной комбинации суть координаты вектора $\bar{a}$.

Обозначение: $\bar{a} = \{a_X, a_Y\}$.

Пример 9. Вектор $\bar{a}$ образует угол $a = 120^0$ с осью OX в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости (см. рис. 9). Найти координаты вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 3$.

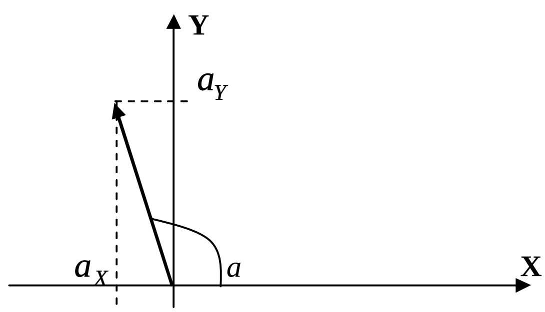

Рис. 9

Решение. Имеем

$$a_X = |\bar{a}|\cos a = 3\cos 120^0 = 3\cos\frac{2p}{3} = 3\cos\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{6}\right) = -3\sin\frac{p}{6} = -\frac{3}{2},$$

$$a_Y = |\bar{a}|\sin a = 3\sin 120^0 = 3\sin\frac{2p}{3} = 3\sin\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{6}\right) = 3\cos\frac{p}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, $\bar{a} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$ или $\bar{a} = -\frac{3}{2}\bar{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{j}$.

Пример 10. Пусть $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 4)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ (см. рис. 10).

Решение. Имеем $\overline{AB} = \overline{a} = \{a_X,\ a_Y\}$, где $a_X = x_2 - x_1 = 4 \ (x_1 = -1,\ x_2 = 3)$;
$a_Y = y_2 - y_1 = 5 \ (y_1 = -1,\ y_2 = 4)$.

Таким образом, $\overline{AB} = \{4{,}5\}$ или $\overline{AB} = 4\bar{i} + 5\bar{j}$.

Пример 11. Пусть $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 4)$. Найти модуль вектора $\overline{AB}$.

а). Модуль вектора через длины его проекций:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{a}_X|^2 + |\overline{a}_Y|^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}, \text{ где } |\overline{a}_X| = 4,\ |\overline{a}_Y| = 5.$$

б). Модуль вектора как расстояние между точками A и B:
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

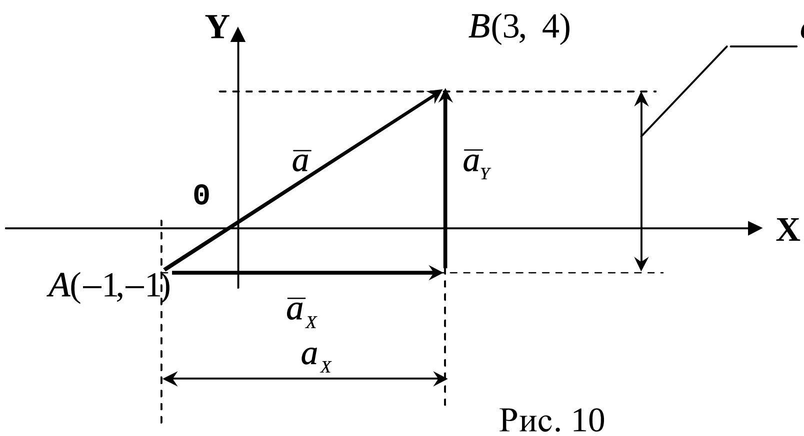

Рис. 10

2.4.4. Линейные действия над векторами в координатной форме

Утверждение 5. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

Пусть $\overline{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j}$, $\overline{b} = b_X\,\bar{i} + b_Y\,\bar{j} \quad \Rightarrow$

$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = c_X\,\bar{i} + c_Y\,\bar{j} = (a_X + b_X)\bar{i} + (a_Y + b_Y)\bar{j}$;

или $\bar{c} = \{c_X, c_Y\}$, $c_X = a_X + b_X$, $c_Y = a_Y + b_Y$ (см. рис. 11).

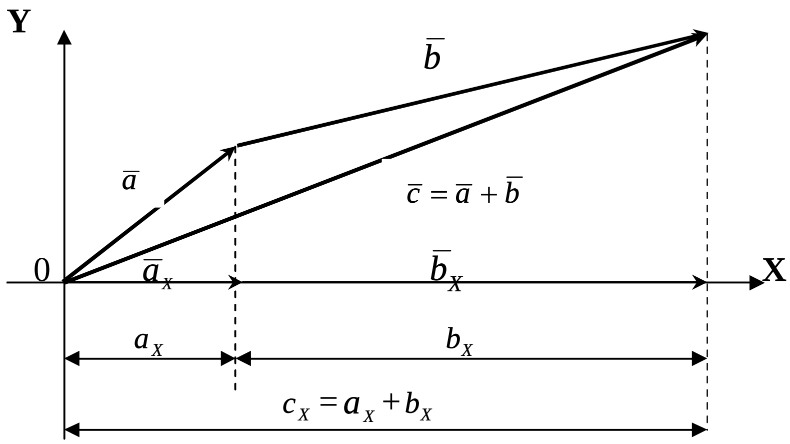

Рис. 11

Утверждение 6. При умножении вектора на число, все его координаты умножаются на это число.

Пусть $\bar{a} = a_X \bar{i} + a_Y \bar{j}$, или $\bar{a} = \{a_X, a_Y\}$. Тогда $k\bar{a} = ka_X \bar{i} + ka_Y \bar{j}$ или $k\bar{a} = \{ka_X, ka_Y\}$, где $k \in \mathbf{R}$ (см. рис. 12).

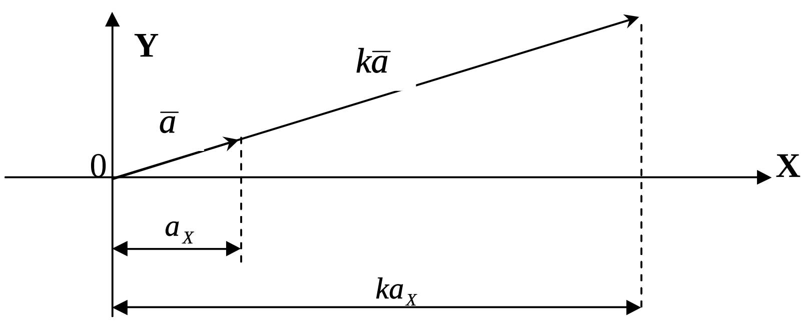

Рис. 12

2.4.5. Условие коллинеарности двух векторов на плоскости

Утверждение 7. Два вектора на плоскости коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Например, если $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, причем вектор $\bar{a}$ в k раз длиннее вектора $\bar{b}$ (т. е. $\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} = k$), то $\bar{a} = k\,\bar{b}$. Тогда $\bar{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j} = k\,\bar{b} = kb_X\,\bar{i} + kb_Y\,\bar{j}$ или $a_X = kb_X$, $a_Y = kb_Y$. Отсюда получаем: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_X}{a_Y} = \frac{b_X}{b_Y}$

2.5. Изменение координат при повороте координатных осей

Рассмотрим изменение координат вектора при повороте координатных осей на угол a против часовой стрелки. Пусть:

$\bar{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j}$, т. е. $\bar{a} = \{a_X, a_Y\}$ — в системе координат XOY;

$\bar{a} = a'_X\,\bar{i}' + a'_Y\,\bar{j}'$, т. е. $\bar{a} = \{a'_X, a'_Y\}$ — в системе координат $X'OY'$.

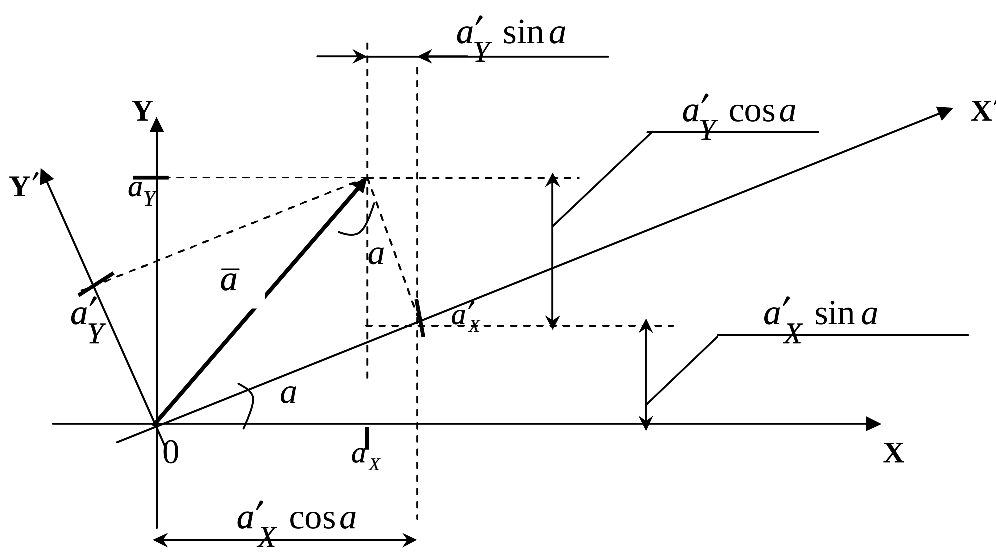

Рис. 13

Из чертежа (см. рис. 13) видна связь между координатами вектора $\bar{a}$ в системах координат XOY и $X'OY'$:

$$a_X = a'_X \cos a - a'_Y \sin a\,, \qquad a_Y = a'_X \sin a + a'_Y \cos a\,.$$

В матричном виде имеем: $\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix}$ **ó** $\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix}$.

Здесь $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ — матрица преобразования координат вектора $\overline{a}$, с помощью которой старые координаты $\{a_X, a_Y\}$ данного вектора выражаются через новые — $\{a'_X, a'_Y\}$.

Чтобы новые координаты вектора $\overline{a}$ выразить через старые, выполним следующую процедуру:

$$\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ — матрица преобразования координат вектора $\overline{a}$, с помощью которой новые координаты выражаются через старые

$$\begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Пусть $\overline{a} = \overline{i} + 2\,\overline{j}$. Найти координаты этого вектора в новой системе координат, которая получается поворотом координатных осей на угол $a = 30^0$ против часовой стрелки относительно начала координат.

Решение. Мы имеем: $\overline{a} = \{1,2\}$ в системе координат XOY; $\overline{a} = \{a'_X, a'_Y\}$ в системе координат $X'OY'$. Координаты a'_X, a'_Y будем искать по формуле:

$$\begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{p}{6} & \sin\frac{p}{6} \\ -\sin\frac{p}{6} & \cos\frac{p}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{p}{6} + 2\sin\frac{p}{6} \\ -\sin\frac{p}{6} + 2\cos\frac{p}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $a'_X = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, $a'_Y = \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$; $\bar{a} = \frac{(2+\sqrt{3})}{2}\,\bar{i}' + \frac{(-1+2\sqrt{3})}{2}\,\bar{j}'$.

Пример 13. Предположим, что осуществляется поворот осей координат на угол a против часовой стрелки относительно начала координат (см. рис. 14). Пусть XOY и $X'OY'$ — старая и новая системы координат. Требуется выразить новые координатные орты $\bar{i}'$ и $\bar{j}'$ через орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

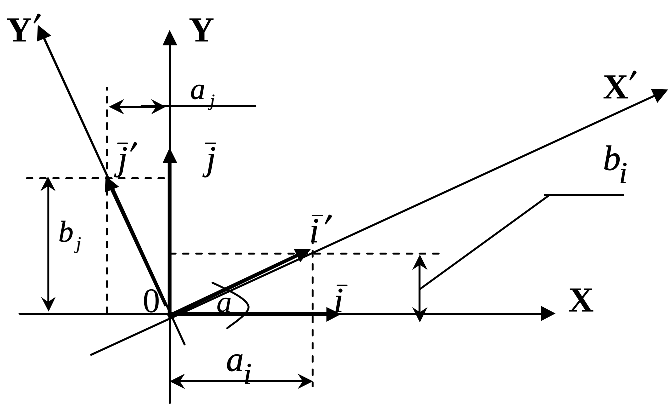

Рис. 14

Решение. Любой вектор плоскости XOY может быть выражен через координатные орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$. В частности, можно предположить, что:

$\bar{i}' = a_i\,\bar{i} + b_i\,\bar{j}$ ó $\bar{i}' = \{a_i, b_i\}$ — в системе координат XOY;

$\bar{j}' = a_j\,\bar{i} + b_j\,\bar{j}$ ó $\bar{j}' = \{a_j, b_j\}$ — в системе координат XOY.

Поскольку $|\bar{i}'| = |\bar{j}'| = 1$, имеем

$$a_i = |\bar{i}'|\cos a = \cos a, \quad b_i = |\bar{i}'|\sin a = \sin a,$$

$$a_j = -|\bar{j}'|\sin a = -\sin a, \quad b_j = |\bar{j}'|\cos a = \cos a;$$

т. е. в системе координат XOY:

$$\bar{i}' = \{\cos a, \sin a\}, \quad \bar{j}' = \{-\sin a, \cos a\}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \bar{i}' = & \bar{i}\cos a + \bar{j}\sin a \\ \bar{j}' = & -\bar{i}\sin a + \bar{j}\cos a \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix}.$$

Итак, при повороте координатных осей на угол a имеем: $\begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix}$,

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ — матрица перехода от старых координатных ортов $\begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \end{pmatrix}$ к новым $\begin{pmatrix} \bar{i}' \\ \bar{j}' \end{pmatrix}$ при повороте координатных осей на угол a.

Напомним, что старые координаты любого вектора выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \end{pmatrix} \quad \text{(см. п. 2.5); здесь } \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

3. Прямая на плоскости

3.1. Скалярное произведение

Определение 12. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение скалярного произведения: $(\bar{a}, \bar{b})$. Имеем $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos a$, где a — угол между векторами.

3.1.1. Свойства скалярного произведения

1. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ (коммутативность);

2. $(k\,\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},k\,\bar{b}) = k\,(\bar{a},\bar{b})$ (линейность);

3. $(\bar{a},\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c})$ (линейность);

4. $\bar{a} \perp \bar{b}$ ó $(\bar{a},\bar{b})=0$ (условие ортогональности векторов);

5. $(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|^2$.

3.1.2. Координатная форма скалярного произведения

Пусть $\bar{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j}$, $\bar{b} = b_X\,\bar{i} + b_Y\,\bar{j}$.

В силу свойств линейности и учитывая, что

$$(\bar{i},\bar{i}) = (\bar{j},\bar{j}) = 1 \quad \text{и} \quad (\bar{i},\bar{j}) = (\bar{j},\bar{i}) = 0,$$

имеем:

$$(\bar{a},\bar{b}) = (a_X\,\bar{i}+a_Y\,\bar{j},\; b_X\,\bar{i}+b_Y\,\bar{j}) =$$

$$= (a_X\,\bar{i},b_X\,\bar{i})+(a_X\,\bar{i},b_Y\,\bar{j})+(a_Y\,\bar{j},b_X\,\bar{i})+(a_Y\,\bar{j},b_Y\,\bar{j}) =$$

$$= a_X\,b_X\,(\bar{i},\bar{i})+a_X\,b_Y(\bar{i},\bar{j})+a_Y\,b_X\,(\bar{j},\bar{i})+a_Y\,b_Y(\bar{j},\bar{j}) = a_X\,b_X + a_Y\,b_Y.$$

Таким образом, $(\bar{a},\bar{b}) = a_X\,b_X + a_Y\,b_Y$.

3.1.3. Выражение модуля вектора через скалярное произведение

Пусть $\bar{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j}$. Тогда

$$(\bar{a},\bar{a}) = a_X\,a_X + a_Y\,a_Y = a_X^2 + a_Y^2,$$

$$|\bar{a}|^2 = (\bar{a},\bar{a}), \qquad |\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2}.$$

3.1.4. Вычисление угла между векторами

Пусть $\bar{a} = a_X \bar{i} + a_Y \bar{j}$ и $\bar{b} = b_X \bar{i} + b_Y \bar{j}$. Тогда

$$\cos a = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_X b_X + a_Y b_Y}{\sqrt{a_X^2 + a_Y^2}\cdot\sqrt{b_X^2 + b_Y^2}}, \qquad (1)$$

где a — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.2. Общий вид уравнения прямой на плоскости

Теорема 1 (*общее уравнение прямой*). Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением вида:

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0),$$

где x, y — координаты текущих точек прямой;

A, B, C — коэффициенты уравнения прямой, геометрический смысл которых следующий:

A и B — координаты вектора, перпендикулярного к прямой (они не равны нулю одновременно), этот вектор называется *нормальным вектором* (или *нормалью*) данной прямой;

C — характеризует положение прямой относительно начала координат,
при $C = 0$ прямая проходит через начало координат.

Доказательство. Пусть l — прямая на плоскости XOY, а $\bar{n} = \{A, B\} \neq 0$ — некоторый вектор, перпендикулярный к l. Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0) \in l$, и пусть $M_1(x, y)$ — произвольная точка на l (см. рис. 15).

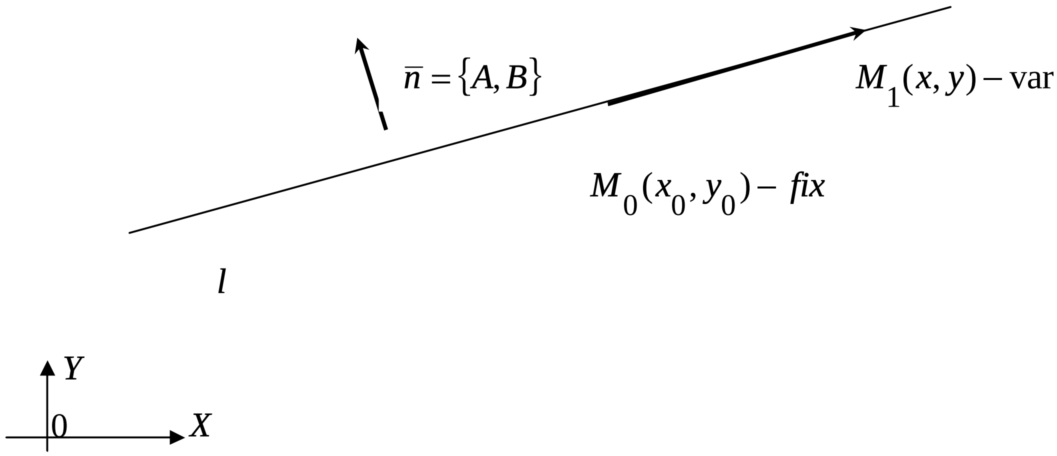

Рис. 15

Так как $\bar{n} \perp l$, то этот вектор перпендикулярен любому вектору, лежащему на l. Поэтому

$$\bar{n} \perp \overline{M_0M_1} \quad \text{ó} \quad (\bar{n}, \overline{M_0M_1}) = 0, \text{ где } \overline{M_0M_1} = \{x - x_0, y - y_0\}.$$

Запишем скалярное произведение в координатной форме

$(\bar{n}, \overline{M_0M_1}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ó $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$ ó $Ax + By + C = 0$, где константа C равна $-Ax_0 - By_0$.

Таким образом, прямая на плоскости, в общем виде, описывается уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$. Справедливо также обратное утверждение:

Утверждение 8. Всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ на плоскости описывает прямую.

Пример 14. Принадлежат ли прямой $x + 2y + 3 = 0$ точки $A_1(-5;\ 1)$ и $A_2(1;\ 2)$?

Решение. Координаты точек, лежащих на прямой, должны удовлетворять уравнению этой прямой. Поэтому: $A_1(-5;\ 1) \in l$, $A_2(1;\ 2) \notin l$.

3.2.1. Угол между двумя прямыми, заданными в общем виде

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Угол a между прямыми будем искать как угол между их нормалями. Имеем: $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ — нормальный вектор прямой l_1, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ — нормальный вектор прямой l_2,

$$\cos a = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (2)$$

3.2.2. Условие параллельности двух прямых на плоскости

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$, где $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ — нормаль прямой l_1;

$l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ — нормаль прямой l_2.

Тогда $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ (см. п. 2.4.5).

Условие параллельности прямых l_1 *и* l_2: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Пример 15. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$l_1:\ x + 2y + 4 = 0$, где $\bar{n}_1 = \{1, 2\}$ — нормаль прямой l_1;

$l_2:\ x + 2y + 5 = 0$, где $\bar{n}_2 = \{1, 2\}$ — нормаль прямой l_2.

Очевидно, что $l_1 \parallel l_2$, так как $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$. Действительно, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{1}$.

3.2.3. Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, где $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ — нормаль прямой l_1;

l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ — нормаль прямой l_2.

Тогда $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow (\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Пример 16. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

l_1: $x - 2y + 4 = 0$, где $\overline{n}_1 = \{1, -2\}$ — нормаль прямой l_1;

l_2: $2x + y + 5 = 0$, где $\overline{n}_2 = \{2, 1\}$ — нормаль прямой l_2.

Очевидно, что $l_1 \perp l_2$, поскольку $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$. Действительно,

$$(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0.$$

3.3. Уравнение прямой в отрезках

Пусть l: $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение некоторой прямой, и пусть $C \neq 0$, т. е. прямая не проходит через начало координат. Тогда

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

здесь $a = \dfrac{-C}{A}$, $b = \dfrac{-C}{B}$.

Уравнение вида $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ называется *уравнением прямой в отрезках*. Очевидно, прямая l пресекает координатные оси OX и OY в точках a и b, соответственно. Действительно: если $x = 0$, то $y = b$; а если $y = 0$, то $x = a$.

Поэтому $A_1(0;\ b)$ и $A_2(a;\ 0)$ — точки пересечения прямой l с осями координат.

Пример 17. Пусть l: $x-2y+4=0$. Найти точки, в которых прямая l пересекает координатные оси.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках:

$x-2y+4=0$ $(A=1,\ B=-2,\ C=4)$ **б** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ a=\frac{-C}{A}=-4,\ b=\frac{-C}{B}=2$

б $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow$ $A_1(-4;\ 0)$ и $A_2(0;\ 2)$ — точки пересечения прямой с осями координат.

3.4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

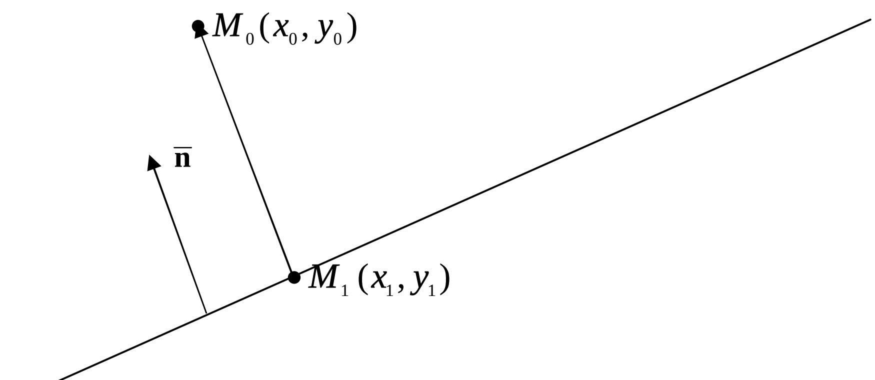

Рис. 16

Пусть дана прямая l: $Ax+By+C=0$, где $\bar{n}=\{A, B\}$ — ее нормальный вектор, и пусть точка $M_0(x_0, y_0) \notin l$, т. е. $Ax_0+By_0+C \neq 0$. Требуется определить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l (см. рис. 16).

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — ортогональная проекция точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямую l. Тогда

$$M_1(x_1, y_1) \in l \;\Rightarrow\; Ax_1 + By_1 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -Ax_1 - By_1.$$

Очевидно, $\overline{M_1M_0} = \{ x_0 - x_1, y_0 - y_1 \}$. Отсюда

$$\overline{M_1M_0} \perp l \;\Rightarrow\; \overline{M_1M_0} \uparrow\uparrow \bar{n} \quad \text{или} \quad \overline{M_1M_0} \uparrow\downarrow \bar{n}.$$

Напомним, что $(\overline{M_1M_0}, \bar{n}) = \left|\overline{M_1M_0}\right| |\bar{n}| \cos a$, где a — угол между векторами $\overline{M_1M_0}$ и $\bar{n}$; здесь

$$\cos a = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \overline{M_1M_0} \uparrow\uparrow \bar{n}, \quad (a = 0^0), \\ -1, & \text{если} \quad \overline{M_1M_0} \uparrow\downarrow \bar{n}, \quad (a = 180^0). \end{cases}$$

Отсюда

$$(\overline{M_1M_0}, \bar{n}) = \pm\left|\overline{M_1M_0}\right| |\bar{n}| \qquad \text{и} \qquad |(\overline{M_1M_0}, \bar{n})| = \left|\overline{M_1M_0}\right| |\bar{n}|.$$

Следовательно,

$$\left|\overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\left(\overline{M_1M_0}, \bar{n}\right)\right|}{|\bar{n}|} = \frac{\left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{\left|Ax_0 + By_0 + (-Ax_1 - By_1)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таким образом, расстояние $d(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l находится по формуле

$$d(M_0, l) = \left|\overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3)$$

Найдем теперь расстояние от начала координат $O(0;\ 0)$ до прямой l:

$$d(O,l)=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4)$$

Пример 18. Найти расстояния от точки $M_0(1;\ 8)$ и от начала координат до прямой l: $2x-3y+7=0$.

Решение. Имеем $d(M_0,l)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $x_0=1$, $y_0=8$, $A=2$, $B=-3$, $C=7$. Отсюда

$$d(M_0,l)=\frac{|2\cdot 1-3\cdot 8+7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{15\sqrt{13}}{13}.$$

Расстояние от начала координат до данной прямой:

$$d(O,l)=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

3.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть $Ax+By+C=0$ — общее уравнение прямой l на плоскости. Предположим, что $B\neq 0$. Тогда

$Ax+By+C=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B} \quad \Leftrightarrow \quad y=kx+b$, где $k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$.

Исследуем геометрический смысл коэффициента k.

Пусть $P_1(x_1,y_1)\in l$ и $P_2(x_2,y_2)\in l$. Поскольку точки $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$ принадлежат прямой l, их координаты удовлетворяют ее уравнению:

$$P_1(x_1, y_1) \in l \quad \Rightarrow \quad y_1 = k\,x_1 + b, \tag{5}$$

$$P_2(x_2, y_2) \in l \quad \Rightarrow \quad y_2 = k\,x_2 + b. \tag{6}$$

Вычитая (5) из (6), имеем:

$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1) \;\Leftrightarrow\; \Delta y = k\,\Delta x$, где $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1 \;\Rightarrow$

$k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\, j$ (см. рис. 17).

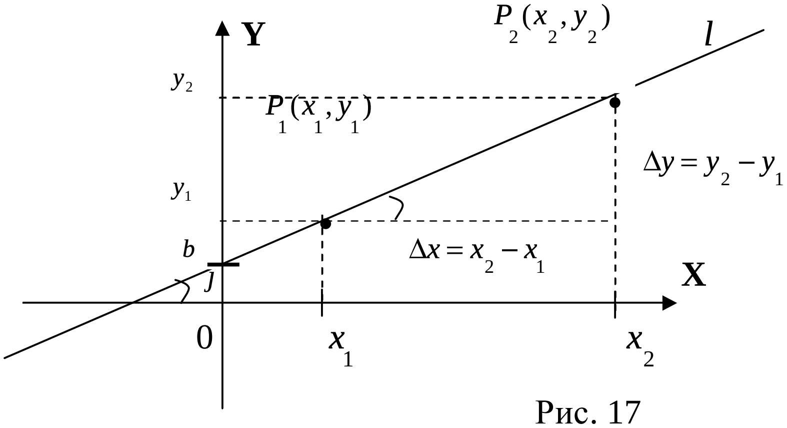

Рис. 17

Таким образом, $y = k\,x + b$ — *уравнение прямой* l на плоскости *с угловым коэффициентом* $k = \mathrm{tg}\, j$. Здесь:

j — угол, который прямая l образует с осью OX,

b — точка, в которой прямая пересекает ось OY ($x = 0 \;\Rightarrow\; y = b$),

x, y — координаты текущих точек прямой l.

Пример 19. Пусть прямая l задана общим уравнением: $x - 2y + 4 = 0$. Требуется написать ее уравнение с угловым коэффициентом.

Решение. Имеем: $x - 2y + 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}\,x + 2$.

Следовательно, угловой коэффициент k равен $\dfrac{1}{2}$. Очевидно,

$(0;\ 2)$ — координаты точки, в которой прямая пересекает ось OY,

$(-4;\ 0)$ — координаты точки, в которой прямая пересекает ось OX.

Пример 20. Описать свойства уравнений прямых на плоскости, параллельных оси OX.

Решение. В этом случае $l \perp OY$ и $j = 0$. Если прямая l задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то

$j = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} j = 0$;

но $\quad \operatorname{tg} j = k = -\dfrac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{A}{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$.

Таким образом, общее уравнение любой прямой, параллельной оси OX, всегда имеет вид

$$By + C = 0. \qquad (7)$$

Уравнение такой прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = b.$$

Итак, уравнение вида $y = b$ (или, в общем виде, $By + C = 0$) на плоскости описывает прямую, параллельную оси OX и пересекающую ось OY в точке $y = b = -\dfrac{C}{B}$.

Пример 21. Описать свойства уравнений прямых на плоскости, параллельных оси OY.

Решение. В этом случае $l \perp OX$ и $j = p/2$. Если прямая l задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то

$j = p/2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} j = 0$;

но $\operatorname{ctg} j = -\frac{B}{A} \Rightarrow -\frac{B}{A} = 0 \Rightarrow B = 0$.

Таким образом, общее уравнение любой прямой, параллельной оси OY, всегда имеет вид

$$Ax + C = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению вида

$$x = c,$$

где $c = -\frac{C}{A}$.

Итак, уравнение вида $x = c$ (или, в общем виде, $Ax + C = 0$) на плоскости описывает прямую, параллельную оси OY и пересекающую ось OX в точке $x = c = -\frac{C}{A}$.

Пример 22. Четыре прямые заданы своими общими уравнениями:
l_1: $x + 2y + 3 = 0$, l_2: $3x + 2y + 1 = 0$, l_3: $2x + 4y + 3 = 0$, l_4: $2x + 4y + 6 = 0$.
Требуется описать взаимное расположение прямой l_1 с прямыми l_2, l_3 и l_4.

Решение. Прямые l_1 и l_2 пересекаются, так как существует общая точка этих прямых, координаты которой удовлетворяют уравнениям данных прямых:

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

Пара координат точки пересечения является единственным решением этой системы.

Ответ 1: $(1;\ -2)$ — координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Ответ 2: Прямые l_1 и l_3 параллельны.

Действительно, система $\begin{cases} x+2y+3 &= 0 \\ 2x+4y+3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y &= -3 \\ 2x+4y &= -3 \end{cases}$

не имеет решений (прямые l_1 и l_3 не имеют общих точек):

l_1: $x+2y+3=0$ **ó** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$,

l_3: $2x+4y+3=0$ **ó** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$;

l_1 и l_3 — параллельны, так как не пересекаются и имеют равные угловые коэффициенты: $k=-\frac{1}{2}$.

Ответ 3: Прямые l_1 и l_4 совпадают.

Действительно, система $\begin{cases} x+2y+3 &= 0 \\ 2x+4y+6 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y &= -3 \\ 2x+4y &= -6 \end{cases}$

имеет бесконечное множество решений, так как состоит из двух эквивалентных уравнений:

l_1: $x+2y+3=0$ **ó** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$,

l_4: $2x+4y+6=0$ **ó** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Оба уравнения описывают одну и ту же прямую.

Полезно отметить, что справедливо следующее

Утверждение 9. Если две прямые заданы своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то могут представиться три случая:

1) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ — прямые имеют одну общую точку;

2) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ — прямые параллельны;

3) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ — прямые совпадают.

3.5.1. Угол между прямыми (через угловые коэффициенты)

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами (см. рис. 18):

$$l_1 :\ y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad l_2 :\ y = k_2 x + b_2,$$

где $k_1 = \operatorname{tg} j_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} j_2$.

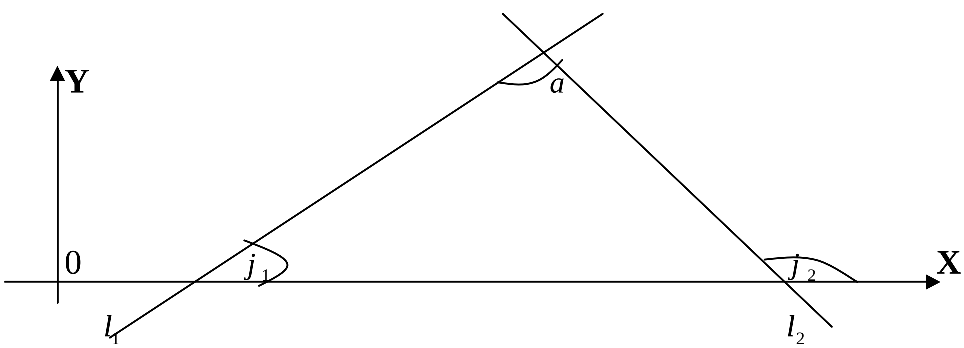

Рис. 18

Очевидно, $a + j_1 + (p - j_2) = p$ **ó** $a = j_2 - j_1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(j_2 - j_1) = \frac{\operatorname{tg} j_2 - \operatorname{tg} j_1}{1 + \operatorname{tg} j_1 \cdot \operatorname{tg} j_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{9}$$

3.5.2. Условие параллельности двух прямых

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

3.5.3. Условие перпендикулярности двух прямых

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

3.5.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом

Пусть на плоскости дана точка $M_0(x_0, y_0)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эту точку под заданным углом φ к оси OX (см. рис. 19).

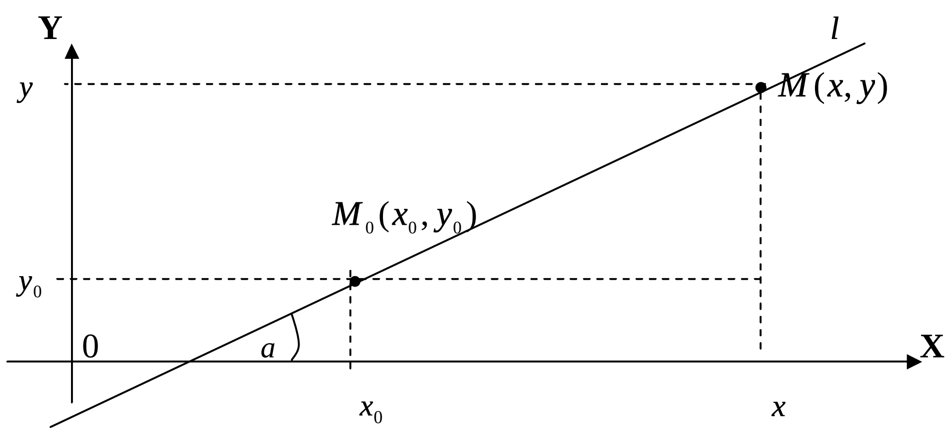

Рис. 19

Напомним, что $k = \operatorname{tg}\varphi$ — угловой коэффициент прямой. Пусть $M(x, y)$ — произвольная текущая точка прямой l. Имеем

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + k(x - x_0).$$

Итак, $y = y_0 + k(x - x_0)$ — *уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *с угловым коэффициентом* k (здесь переменные x, y — координаты текущих точек прямой).

Пример 23. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;\ 2)$ под заданным углом $j = 120^0$ к оси OX.

Решение. Искомое уравнение имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $k = \mathrm{tg}\dfrac{2p}{3} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{p}{2} + \dfrac{p}{6}\right) = -\,\mathrm{ctg}\dfrac{p}{6} = -\sqrt{3}$. Следовательно,

$$y = 2 - \sqrt{3}(x-1) \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2 \quad \text{ó} \quad \sqrt{3}x + y - (\sqrt{3} + 2) = 0.$$

Ответ: $\sqrt{3}x + y - (\sqrt{3} + 2) = 0$ — общее уравнение прямой;
$y = -\sqrt{3}x + (\sqrt{3} + 2)$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

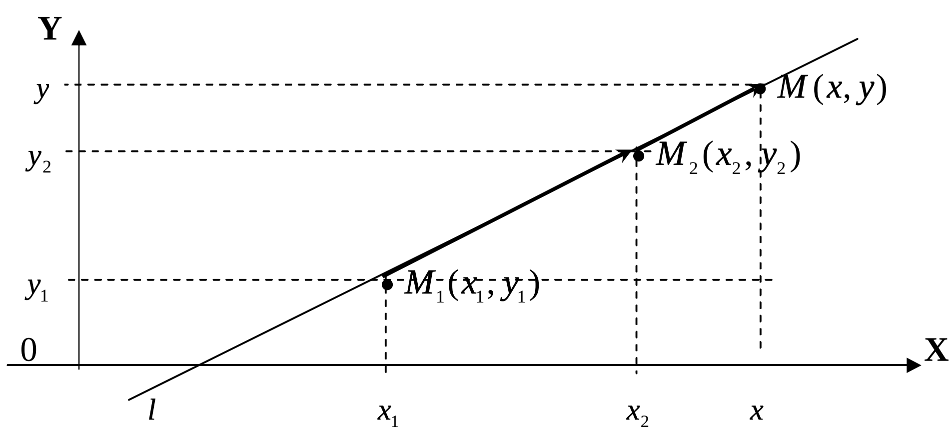

Рис. 20

Пусть заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки (рис. 20).

В силу утверждения 7, у коллинеарных векторов $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M_2}$ координаты должны быть пропорциональны. Отсюда: *уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки* $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$, записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (10)$$

где переменные x, y — координаты текущих точек прямой. Угловой коэффициент этой прямой находится по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Пример 24. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение.

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-2}{4-2} \quad ó \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} \quad ó \quad 2x-2=4y-8 \quad ó \quad x-2y+3=0$$

Ответ: $x-2y+3=0$ — общее уравнение прямой; $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ — ее уравнение с угловым коэффициентом.

Пример 25. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(1;\ 5)$.

Решение.

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{5-2} \quad ó \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{3} \quad ó \quad x=1$$

Ответ: Искомое уравнение имеет вид $x = 1$. Прямая проходит параллельно оси OY, пересекая ось OX в точке $x = 1$.

Пример 26. Даны вершины треугольника $A(-9;\ 0)$, $B(0;\ -3)$, $C(5;\ 2)$. Найти точку пересечения высоты BK, опущенной из вершины B, и медианы AM, проведенной из вершины A, а также острый угол, заключенный между ними (см. рис. 21).

Решение. Используя уравнение (10) прямой, проходящей через две заданные точки, найдем сначала уравнение стороны AC треугольника ABC. Получим:

$$\frac{x+9}{5+9} = \frac{y-0}{2-0} \text{ или } y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7}.$$

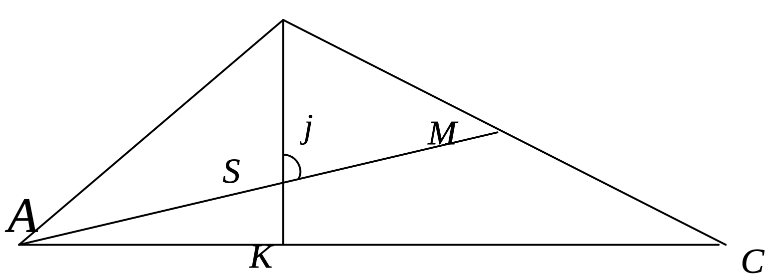

Рис. 21

Угловой коэффициент этой прямой равен $k_{AC} = \frac{1}{7}$. Так как высота $BK \perp AC$, ее угловой коэффициент можно найти по формуле $k_{BK} = -\frac{1}{k_{AC}} = -7$.

Поскольку нам известна точка $B(0;\ -3)$, то уравнение высоты BK находим так: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Получаем: $y + 3 = -7(x - 0)$ или $y = -7x - 3$.

Найдем теперь уравнение медианы AM. Координаты точки M (середины отрезка BC) находим по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Имеем: $x_M = \frac{5}{2}$, $y_M = -\frac{1}{2}$.

Используя (10), получим уравнение медианы AM:

$$\frac{x+9}{\frac{5}{2}+9}=\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0} \quad \text{или} \quad y=-\frac{1}{23}x-\frac{9}{23}.$$

Координаты точки $S(x_s, y_s)$ пересечения высоты BK и медианы AM находим теперь как решение системы уравнений

$$\begin{cases} y=-7x-3, \\ y=-\dfrac{1}{23}x-\dfrac{9}{23}. \end{cases}$$

Имеем: $x_s=-\dfrac{3}{8}$, $y_s=-\dfrac{3}{8}$.

Наконец, используя формулу (9), находим острый угол j между BK и AM $\left(k_1=-7,\ k_2=-\dfrac{1}{23}\right)$:

$$\operatorname{tg} j=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{-1/23+7}{1+7/23}=\frac{16}{3}, \quad j=\operatorname{arctg}\frac{16}{3}.$$

3.7. Каноническое и параметрические уравнения прямой

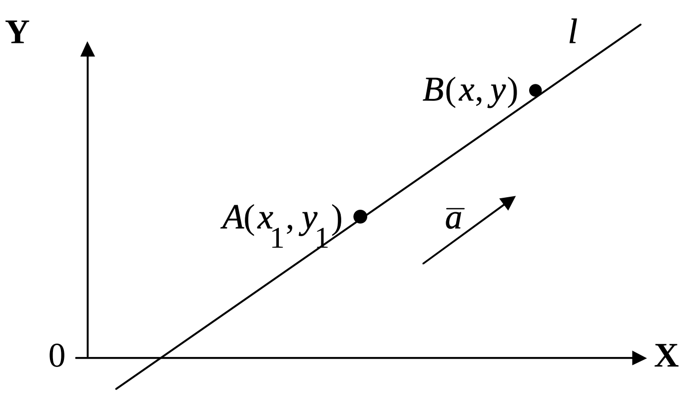

Рис. 22

Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору $\bar{a}$ (рис. 22).

Пусть l — некоторая прямая на плоскости; заданы точка $A(x_1, y_1) \in l$ и вектор $\bar{a} = \{a_X, a_Y\} \parallel l$ — так называемый *направляющий вектор прямой*. Пусть $B(x, y)$ — произвольная текущая точка на прямой l. Так как $\bar{a} \parallel l$, вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\overline{AB} = \{x - x_1, y - y_1\}$. Но у коллинеарных векторов координаты пропорциональны. Записывая данную пропорцию, получаем

$$\frac{x - x_1}{a_X} = \frac{y - y_1}{a_Y}. \qquad (11)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой* l на плоскости. Здесь

x_1, y_1 — координаты точки, через которую проходит прямая,

a_X, a_Y — координаты направляющего вектора прямой,

x, y — координаты текущих точек прямой.

Пример 27. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1;\ 2)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{a} = \{0,3\}$.

Решение.

$\dfrac{x - x_1}{a_X} = \dfrac{y - y_1}{a_Y}$ ó $\dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y - 2}{3}$ ó $x = 1$

Ответ: Искомое уравнение имеет вид $x = 1$. Прямая проходит параллельно оси OY, пересекая ось OX в точке $x = 1$.

Рассмотрим снова каноническое уравнение прямой l. Обозначив через t общее значение данной пропорции, получим:

$$\frac{x - x_1}{a_X} = \frac{y - y_1}{a_Y} = t \quad \Rightarrow \quad x = x_1 + a_X\, t, \quad y = y_1 + a_Y\, t$$

Введя обозначения $a_X = a$ и $a_Y = b$, получим:

$$\begin{cases} x = & x_1 + a \cdot t \\ y = & y_1 + b \cdot t \\ t \in & (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

(так называемые *параметрические уравнения прямой* на плоскости).

Здесь:

x_1, y_1 — координаты некоторой точки, через которую проходит прямая;

x, y — координаты текущей точки прямой;

t — параметр, через который линейно выражаются координаты точек прямой; a, b — коэффициенты, определяющие координаты направляющего вектора прямой.

Согласно данным уравнениям, каждому значению параметра t соответствует определенная точка прямой с координатами (x, y).

3.8. Направляющие косинусы вектора и нормальное уравнение прямой

Напомним, что любой геометрический вектор $\bar{a}$ характеризуется его модулем $|\bar{a}|$ и направлением. Направление вектора $\bar{a} = \{a_X, a_Y\}$ на плоскости определяется углами a и b (см. рис. 23), образованными им с осями координат OX и OY. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) определяются по формулам:

$$\cos a = \frac{a_X}{|\bar{a}|} = \frac{a_X}{\sqrt{a_X^2 + a_Y^2}}, \quad \cos b = \frac{a_Y}{|\bar{a}|} = \frac{a_Y}{\sqrt{a_X^2 + a_Y^2}}. \qquad (12)$$

Направляющие косинусы вектора на плоскости связаны соотношением

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 1.$$

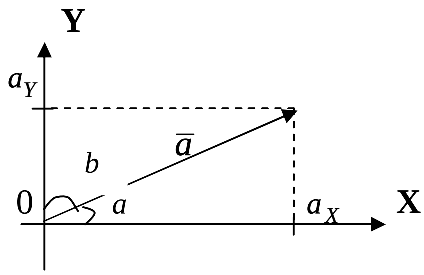

Рис. 23

Пример 28. Пусть $\bar{a} = \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right\}$. Найти направляющие косинусы данного вектора, а также углы a и b.

Решение. Имеем:

$$a_X = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad a_Y = \frac{3}{2}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = 3;$$

$$\cos a = \frac{a_X}{|\bar{a}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos b = \frac{a_Y}{|\bar{a}|} = \frac{1}{2}. \quad \text{Отсюда} \quad a = \frac{p}{6}, \quad b = \frac{p}{3}.$$

Утверждение 10. Координаты единичного вектора совпадают с его направляющими косинусами. Направляющие косинусы любого вектора совпадают с координатами его *орт-вектора* $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ (единичного вектора, имеющего то же направление, что и исходный вектор).

При решении задач по аналитической геометрии часто используют *нормальное уравнение прямой* на плоскости (рис. 24)

$$x \cos a + y \sin a - p = 0. \qquad (13)$$

Здесь a — угол между вектором $\overline{OP}$ и осью Ox, где P — проекция точки O (начала координат) на эту прямую, p — длина вектора $\overline{OP}$.

Таким образом, $\overline{OP}$ — вектор, выходящий из начала координат и перпендикулярный к прямой, а p — расстояние от начала координат до прямой. Заметим еще, что $\cos a$ и $\cos b = \sin a$ суть направляющие косинусы нормального вектора этой прямой.

Из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ легко получить нормальное, если его разделить на коэффициент $m = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (*нормирующий множитель*). Следует правильно выбирать знак коэффициента m; он должен быть противоположен знаку свободного члена C.

С помощью нормального уравнения прямой l легко вычисляется *отклонение* d *точки* $M_1(x_1, y_1)$ *от прямой*:

$$d = x_1 \cdot \cos a + y_1 \cdot \sin a - p\,. \qquad (14)$$

При решении задач полезно иметь в виду, что по разные стороны от прямой отклонение d имеет разный знак.

С помощью отклонения d легко найти расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой l:

$$d = |d| = |x_1 \cos a + y_1 \sin a - p|\,. \qquad (15)$$

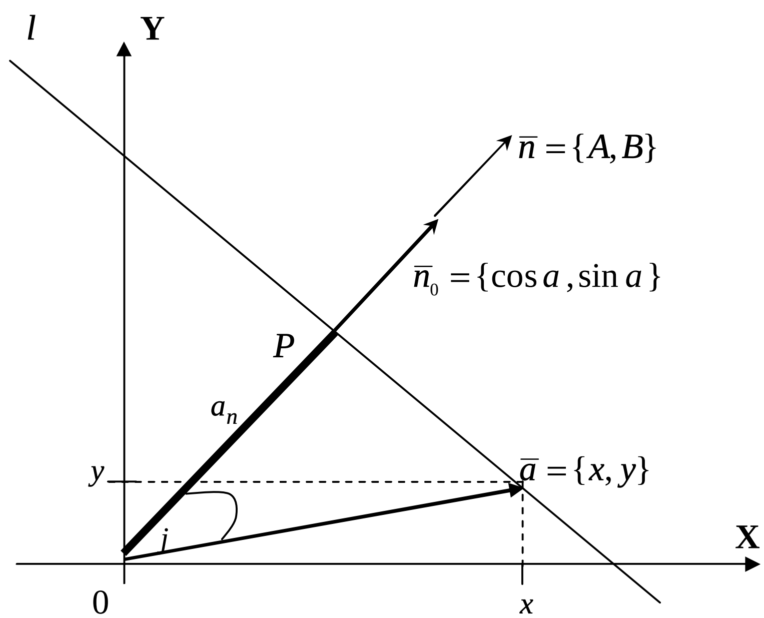

Рис. 24

Напомним еще, что $\bar{n}_0 = \dfrac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \left\{ \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right\} = \{\cos a, \sin a\}$ — единичная нормаль прямой. Пусть x и y — координаты текущей точки прямой l, т. е. $\bar{a} = \{x, y\}$ — *радиус-вектор* этой точки. Нормальное уравнение прямой может быть записано в векторном виде (*векторное уравнение прямой*):

$$l: \ (\bar{a}, \bar{n}_0) = p. \qquad (16)$$

Здесь $(\bar{a}, \bar{n}_0) = |\bar{a}||\bar{n}_0|\cos j = |\bar{a}|\cos j = a_n$, j — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{n}_0$; a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на направление нормали $\bar{n}$;

$a_n > 0$, если $j < \frac{p}{2}$, $a_n < 0$, если $j > \frac{p}{2}$;

$|a_n| = p$ — длина проекции a_n, равная расстоянию от начала координат до прямой l.

Пример 29. Уравнение прямой, заданной общим уравнением $12x - 16y + 95 = 0$, привести к нормальному виду и найти расстояние от начала координат до этой прямой.

Решение. Найдем коэффициент m. Поскольку $C = 95 > 0$, то

$$m = -\sqrt{12^2 + (-16)^2} = -20.$$

Разделив общее уравнение прямой на нормирующий множитель m, получим нормальное уравнение прямой:

$$-\frac{12}{20}x + \frac{16}{20}y - \frac{95}{20} = 0$$

или

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{19}{4} = 0.$$

Здесь $\cos a = -\frac{3}{5}$, $\sin a = \frac{4}{5}$ — направляющие косинусы нормального вектора прямой; $p = \frac{19}{4} = 4{,}75$ — расстояние от начала координат до прямой l.

Пример 30. Стороны треугольника заданы уравнениями: $x - 2y - 6 = 0$, $3x - y + 6 = 0$, $7x + 4y - 24 = 0$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, лежащего против стороны $7x + 4y - 24 = 0$ (рис. 25).

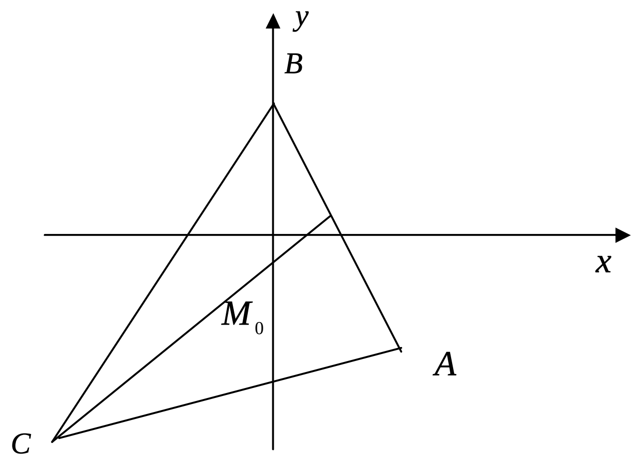

Рис. 25

Решение. Из систем уравнений

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 7x + 4y - 24 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ 7x + 4y - 24 = 0 \end{cases}$$

находим координаты двух вершин $A(x_A = 4;\ y_A = -1)$, $B(x_B = 0;\ y_B = 6)$.

Подставляя координаты каждой из вершин A и B в левую часть уравнения соответствующей противоположной стороны, получим:

$$3 \cdot 4 - (-1) + 6 = 19 > 0,\ 0 - 2 \cdot 6 - 6 = -18 < 0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка искомой биссектрисы, расположенная внутри треугольника. Эта точка лежит по ту же сторону от прямой $3x - y + 6 = 0$, что и точка A, и поэтому $3x_0 - y_0 + 6 > 0$. Она лежит по ту же сторону от прямой $x - 2y - 6 = 0$, что и точка B, и поэтому $x_0 - 2y_0 - 6 < 0$.

Следовательно, расстояния d_1 и d_2 от точки M_0 до сторон треугольника, в силу (3) или (15), задаются формулами:

$$d_1 = \frac{3x_0 - y_0 + 6}{\sqrt{10}}, \quad d_2 = -\frac{x_0 - 2y_0 - 6}{\sqrt{5}}.$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ — точка биссектрисы, то $d_1 = d_2$. Отсюда находим уравнение искомой биссектрисы:

$$\left(3+\sqrt{2}\right)x - \left(1+2\sqrt{2}\right)y - 6\left(\sqrt{2}-1\right) = 0.$$

4. Варианты индивидуальных заданий

Вариант № 1

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярно к прямой $y = 2x$.
2. Через начало координат провести прямую так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от точек $A(2;\ 2)$ и $B(4;\ 0)$.

Вариант № 2

1. Даны две вершины треугольника $A(-10;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, его высоты пересекаются в точке $M(5;\ 2)$. Определить координаты третьей вершины.
2. Составить уравнение геометрического места точек, отклонение которых от прямой $8x - 15y - 25 = 0$ равно -2.

Вариант № 3

1. Средняя линия трапеции имеет уравнение $2x + 3y - 6 = 0$. Составить уравнения оснований трапеции, если известно, что точка $M(3;\ 2)$ лежит на одном из оснований.
2. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(0;\ 2)$ и уравнения высот BM и CM: $x + y = 4$ и $y = 2x$, где M — точка пересечения высот.

Вариант № 4

1. Даны вершины треугольника $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ 13)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ 3)$ так, что середина ее отрезка, заключенного между параллельными прямыми $x+2y+5=0$ и $x+2y+1=0$ лежит на прямой $x-y-5=0$.

Вариант № 5

1. В равнобедренном треугольнике известно уравнение основания $x-2y+3=0$, уравнение одной из его боковых сторон $4x-y+5=0$ и точка $P(1{,}2;\ 5{,}6)$ на другой боковой стороне. Вычислить расстояние от вершины при основании до боковой стороны.

2. На прямой $2x+3y-8=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(4;\ 4)$ и $B(2;\ -4)$.

Вариант № 6

1. Даны вершины треугольника $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ 4)$. Составить уравнения: а) трех сторон треугольника; б) медианы CM; в) биссектрисы BN; г) высоты AK.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ -1)$, параллельно прямой $y=3x+7$.

Вариант № 7

1. Составить уравнения катетов прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и вершину прямого угла $(4;\ -1)$ (треугольник равнобедренный).

2. Через точку $P(-2;\ 1)$ проведена прямая так, что ее расстояние от точки $C(3;\ 1)$ равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.

Вариант № 8

1. Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $x-3y+4=0$ провести прямую, которая: а) проходит через начало координат; б) параллельна оси абсцисс; в) проходит через точку $(4;\ 3)$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(-9;\ 0)$, $B(-3;\ 6)$, $C(3;\ 4)$, $D(6;\ -3)$. Найти точку пересечения его диагоналей AC и BD и вычислить угол между ними.

Вариант № 9

1. Диагонали ромба длиной в 30 и 16 единиц приняты за оси координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.

2. Дано уравнение стороны треугольника $x+2y-2=0$ и уравнения $2x-3y+4=0$, $2x+y-1=0$ двух его высот. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

Вариант № 10

1. Даны середины сторон треугольника: $M(2;\ 1)$, $N(5;\ 3)$, $P(3;\ -4)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

2. Уравнение одной из сторон угла $2x-9y-3=0$, а уравнение биссектрисы $4x-y+11=0$. Найти уравнение второй стороны угла.

Вариант № 11

1. Пусть известны уравнения сторон треугольника ABC: $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Найти точку пересечения его высот.

2. Даны вершины треугольника: $A(-12;\ 3)$, $B(12;\ -10)$, $C(-6;\ 14)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла B.

Вариант № 12

1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $x-2y=0$ и $x-2y+15=0$, а также уравнение одной из его диагоналей $7x+y+15=0$. Найти вершины прямоугольника.

2. При каком значении параметра "a" уравнения $3ax-8y+13=0$ и $(a+1)x-2ay-21=0$ определяют параллельные прямые.

Вариант № 13

1. Даны две вершины треугольника $A(-4;\ 5)$ и $B(4;\ 1)$ и точка пересечения его высот $D(3;\ 5)$. Составить уравнения сторон треугольника.

2. Даны две прямые: $3x+4y-10=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти точку, которая бы находилась на расстоянии 5 единиц как от одной, так и от другой прямой.

Вариант № 14

1. Вершинами треугольника ABC служат точки $A(2;\ -2)$ и $B(3;\ -1)$. Его медианы пересекаются в точке $P(1;\ 0)$. Составить уравнение высоты треугольника, проходящей через вершину C.

2. Определить расстояние между параллельными прямыми $3x+y-3\sqrt{10}=0$ и $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

Вариант № 15

1. Найти уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения его сторон $x+y-1=0$ и $y+1=0$, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке $P(-1;\ 0)$.

2. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты "a" и "b" для того, чтобы прямые $ax+by+1=0$, $2x-3y+5=0$, $x-1=0$ проходили через одну и ту же точку?

Вариант № 16

1. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;\ 13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр тяжести треугольника со сторонами: $x-y-4=0$, $2x-11y+37=0$, $2x+7y-17=0$.

Вариант № 17

1. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ -1)$, $C(4;\ 0)$.

2. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми: $x+7y-6=0$, $5x-5y+1=0$.

Вариант № 18

1. Даны вершины треугольника: $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 2)$, $C(1;\ 5)$. Найти угол между высотой и медианой, проведенными из вершины A.

2. Через точку $M(4;\ -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3-м квадратным единицам.

Вариант № 19

1. Найти углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x-2y+1=0$, $5x-2y-11=0$, $x+2y+5=0$.

2. Отрезок, соединяющий точки $A(-5;\ 8)$ и $B(10;\ 2)$, точками C и D делится на три равные части. Найти точки C и D.

Вариант № 20

1. Составить уравнения сторон треугольника, для которого точки $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ -1)$ и $C(0;\ 4)$ являются серединами сторон.

2. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-7=0$ и точка пересечения его диагоналей $P(0;\ -1)$. Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.

Вариант № 21

1. Найти проекцию точки $P(-8;\ 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(-5;\ 1)$ и $B(2;\ -3)$.

2. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;\ 1)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол $j = \frac{p}{4}$.

Вариант № 22

1. Дана прямая $2x + y - 6 = 0$ и на ней две точки A и B с ординатами $y_A = 6,\ y_B = -2$. Составить уравнение высоты AD треугольника AOB.
2. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

Вариант № 23

1. Известны уравнения двух сторон ромба: $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$, а также уравнение его диагонали $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение двух других сторон ромба и его высоты.
2. Проверить, что точки $A(-4;\ -3)$, $B(-5;\ 0)$, $C(6;\ 6)$, $D(1;\ 0)$ служат вершинами трапеции и найти ее высоту.

Вариант № 24

1. Найти угол наклона прямой к положительному направлению оси OX, если известно, что отрезок прямой расположен между осями координат и точка $M\left(-\frac{8}{3};\ -3\right)$ делит этот отрезок в отношении $3:2$ (считая от оси абсцисс к оси ординат).
2. Пусть известны уравнения двух сторон квадрата: $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Составить уравнения двух других сторон при условии, что точка $M(-3;\ 5)$ лежит на стороне этого квадрата.

Вариант № 25

1. Даны две противоположные вершины ромба $A(3;\ 4)$ и $C(1;\ -2)$ и уравнение одной из его сторон $x - y + 1 = 0$. Найти уравнения остальных сторон ромба.
2. Дан треугольник с вершинами: $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$, $C(4;\ 0)$. Написать уравнение медианы AE.

Рекомендуемая литература

1. Амукова Н.П., Гуторина Т.А., Селиванов Ю.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия на плоскости. Методические указания к домашнему заданию по высшей математике. М., МАТИ, 1989.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Физматлит, 2007.

3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Физматлит, 2003.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. М., Высшая школа, 1999.

5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Физматлит, 2006.

6. Захаров В.Е. Элементы матричной алгебры и теории систем линейных уравнений. Методические указания для студентов вечернего отделения. М., МАТИ, 2005.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Физматлит, 2007.

8. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Под общей ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. М., Физматлит, 2004.

Оглавление

Ольга Юрьевна Агарева
Виталий Евгеньевич Захаров
Юрий Васильевич Селиванов

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

(Элементы аналитической геометрии на плоскости)

Методические указания для студентов вечернего отделения

Компьютерная верстка выполнена Селивановым Ю.В.

Под редакцией авторов

Подписано в печать 05.09.07. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$.
Печать на ризографе. Усл. п. л. 3,1. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 100 экз. Заказ № 100

Издательский центр МАТИ
109240, Москва, Берниковская наб., 14

Типография ИЦ МАТИ
109240, Москва, Берниковская наб., 14