Министерство образования Российской Федерации

***“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО***

Кафедра “Высшая математика”

РЯДЫ

Методические указания к курсовой работе

Составитель: ст. преп. Данилина И. А.

Москва 2001 г.

ВВЕДЕНИЕ

Программой «Высшей математики» предусмотрено проведение курсовой работы по разделу «Ряды». В данной работе приведены примеры вариантов курсовой работы и подробное решение одного из них.

Работа ставит своей целью помочь студентам лучше усвоить теоретический и практический материал. Она может использоваться студентами на всех факультетах и специальностях, где есть раздел, посвященный числовым и функциональным рядам.

Вариант 1.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням х.

7. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

Вариант 2.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(n\frac{p}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням х.

7. $\ln(1-x-6x^2)$.

Вариант 3.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{7}{12 + x - x^2}$.

Вариант 4.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\ln(1 + x - 6x^2)$.

Вариант 5.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3m+5} \frac{1}{2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{6}{8+2x-x^2}$.

Вариант 6.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\,\frac{5}{n}}{n!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1}$.

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{1}{3^n}(x+5)^n$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\ln(1-x-12x^2)$.

Вариант 7.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin \frac{pn}{2}}{n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} tg \frac{1}{5^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{p}{4n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2n)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{7}{12-x-x^2}$.

Вариант 8.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{pn}{3}}{3^n+2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2-1)}{n!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{pn}{2n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n\sqrt{\ln(n-2)}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\ln(1+2x-8x^2)$.

Вариант 9.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n+4}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{5}{6+x-x^2}$.

Вариант 10.

Исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{p}{2^n}$.

Найти область сходимости степенного ряда.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\ln(1-x-20x^2)$.

Пример решения курсовой работы.

1. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}.$$

Решение:

Этот ряд можно исследовать на сходимость с помощью признака сравнения с положительными членами.

1) Если член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, начинается с некоторого, не больше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, т.е. $u_n \le v_n (n = N, N+1, N+2,....)$, и больший ряд сходится, тогда сходится и меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.
2) Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, начиная с некоторого, не меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, т.е. $u_n \ge v_n (n = N, N+1, N+2,....)$, и меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится, тогда расходится и больший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Сравним исследуемый ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Начиная с n = 3 члены нашего ряда больше соответствующих членов гармонического ряда $\frac{n\ln n}{n^2-3} > \frac{n\ln n}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, т.к. при n > 3 , ln n > 1.

Гармонический ряд расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$..

2. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}.$$

Решение:

Используем признак Даламбера.

Если в ряде с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ отношение (n + 1)- го члена к n – му при n → ∞ имеем конечный предел l , т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тогда:

1) ряд сходится в случае $l < 1$,
2) ряд расходится в случае $l > 1$.

В случае l =1 ответа на вопрос сходимости или расходимости ряда признак не дает.

В нашей задаче $u_n = \frac{n^2}{(n+2)!}, u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{((n+1)+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+3)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+3)!}}{\dfrac{n^2}{(n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+2)!}{n^2(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=1\cdot 0=0<1$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}.$$

Решение:

Здесь удобно применить признак Коши.

Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при n $\to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тогда:

1) в случае $l < 1$ ряд сходится,
2) в случае $l > 1$ ряд расходится.

В случае $l = 1$ признак Коши не позволяет судить о сходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$ расходится.

4. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$$

Решение:

Воспользуемся тем. Что если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, тогда оба ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Вместо ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$ можно исследовать на сходимость более простой

ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\ln n}$, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{(n^2+1)\ln n}}{\dfrac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1.$

Применим интегральный признак сходимости ряда.

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ положительны и не возрастают, т.е. $u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots,$ и пусть f(x) - такая непрерывная невозрастающяя функция, что f(1)=u_1, f(2)=u_2,… . Тогда ряд сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$.

Вычислим несобственный интеграл от функции $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, удовлетворяющий условиям интегрального признака.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln x)\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=+\infty.$$

Интеграл расходится , значит будет расходится и ряд.

5. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Решение:

Этот ряд знакочередующийся, причем он не сходится абсолютно, т.е. не сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов первоначального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. и гармонический ряд ведут себя одинаково.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)}=2.$$

Применим признак Лейбница.

Если в знакочередующемся ряде члены таковы, что $u_1>u_2>u_3>\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, тогда ряд сходится.

Проверим выполнение первого условия.

$$u_n=\frac{2n+1}{n(n+1)};u_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{(n+1)((n+1)+1)}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}>\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow(2n+1)(n+2)>(2n+3)n\Leftrightarrow 2n^2+5n+2>2n^2+3n\Leftrightarrow 2n+2>0.$$

Последнее равенство очевидно.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0.$$

Значит, выполнено и второе условие признака Лейбница.

Следовательно, данный ряд сходится условно.

6. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

Решение:

Интервал сходимости можно найти, применяя признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Здесь $u_n=\dfrac{n^2|x-3|^n}{(n^4+1)^2}$, $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2|x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2|x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}}{\dfrac{n^2|x-3|^n}{(n^4+1)^2}}=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n^4+1)^2}{n^2((n+1)^4+1)^2}=|x-3|.$$

По признаку Даламбера для сходимости ряда предел должен быть меньше 1.

$$|x-3|<1$$

$$-1<x-3<1$$

$$2<x<4$$

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Если x = 4, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Он сходится и притом абсолютно, т.к. этот ряд ведет себя как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

Если x = 2, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Он сходится и притом абсолютно, т.к. сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Окончательно получим, что область сходимости исследуемого ряда отрезок [2;4].

7. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

$$f(x)=\frac{9}{(20-x-x^2)}.$$

Решение:

Разложим $f(x)$ на элементарные дроби

$$\frac{9}{20-x-x^2}=\frac{9}{(x+5)(4-x)}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{4-x}.$$

Воспользуемся готовой формулой $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n.$

$$\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5\left(1+\frac{x}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n.$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{x}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^n.$$

Сложив эти два выражения, окончательно получим

$$\frac{9}{20-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^n$$

Литература.

1. Сборник задач по математике для втузов. Часть 2. Специальные разделы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича). М., Наука, 1995.
2. Данко П.Е. , Попов А.Г. , Кожевникова Т.Я., Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. М., Высшая школа, 1998.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике М., Высшая школа, 1994.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения, Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., Наука, 1985.
5. Пискунов И.С. Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов. Том 2. М., Наука, 1985.