

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МАТИ им. К.Э.Циолковского - ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

## **АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

**Методические указания  
к чтению лекций  
и проведению практических занятий**

**ГОРБАЦЕВИЧ В.В.**

**ЧАСТЬ I**

МОСКВА 2000 год

## ВВЕДЕНИЕ

Эти методические указания предназначены для помощи преподавателям и студентам при преподавании и изучении различных прикладных курсов, связанных с использованием методов анализа случайных процессов и временных рядов. Такие курсы читаются различными кафедрами, причем не всегда лекторами являются профессиональные математики, которые могут выделить из массы опубликованного в учебниках материала те теоретические разделы, которые действительно необходимы студентам тех или иных специализаций. В этом пособии будут даны методические указания для изложения и изучения наиболее практически важных теоретических разделов теории случайных процессов и временных рядов. При этом не ставилась задача заменить имеющиеся учебники по теории случайных процессов и по анализу временных рядов. Как раз наоборот, изучение данного пособия предполагает обращение читателя к более подробным учебникам и курсам лекций для углубленного изучения предложенного материала. Здесь же будут затрагиваться только ключевые идеи и связи между ними. Особое внимание будет уделено практическим методам решения актуальных прикладных задач, в которых необходимо исследование временных рядов. Такое исследование может и ныне проводиться или «по старинке», т.е. без использования современной вычислительной техники (калькулятор ныне уже не относится к вычислительной технике, он – необходимый инструмент для любого специалиста, каким когда-то были таблицы синусов, логарифмов и логарифмическая линейка) или же с использованием современных математических пакетов и специализированных программ. Сейчас более естественна ориентация на современные вычислительные средства, о чем тоже будет идти речь ниже.

При исследовании многих природных и производственных процессов возникает задача анализа в динамике событий и их последовательностей, которые не поддаются методам стандартного математического анализа. Дело в том, что многие факторы таких процессов можно рассматривать как случайные, а такого рода объектами занимаются специальные области математики – теория вероятностей, математическая статистика, и, в частности, теория случайных процессов и временных рядов. Основными задачами в таких исследованиях являются детальное изучение этих процессов, выделение их существенных характеристик, которое может привести к возможности прогнозирования развития этих процессов в будущем. Также представляет интерес выделение внутренних закономерностей, которым подчинено развитие этих процессов. Для такого рода исследований разработано немало различных методов, однако не все из них действительно эффективны, а применение других требует достаточно глубокой теоретической подготовки.

Вначале в главе 1 будут рассмотрены некоторые ключевые, основополагающие для теории случайных процессов, идеи теории вероятностей (понятие случайного события, случайной величины и ее числовых характеристик). Затем будут даны рекомендации по методике исследования взаимосвязей случайных величин (методы теории корреляции и регрессии) и построению статистических оценок

параметров случайных величин. После этого в главе 2 разбираются основные понятия теории случайных процессов в целом и важнейшего частного случая – временных рядов. Глава 3 посвящена современным методам исследования временных рядов. В главе 4 обсуждаются методы исследования временных рядов с применением математических пакетов программ для компьютера. Глава 5 посвящена примерам конкретных задач на исследование временных рядов. В главе 6 даны указания на возможные направления развития одной из прикладных тем – о временных циклах в природе и обществе.

В силу полиграфических требований данные методические указания разбиты на две части, издаваемые отдельно. В часть I вошли Введение и §§1-3, а в Часть II – §§4-6 и Заключение, а также список литературы. Нумерация параграфов в двух частях единая.

## ГЛАВА 1. Краткий обзор теории вероятностей и математической статистики

### §1. Случайные события и их вероятности

Начнем с понятия случайного события. Обычно под случайным событием понимают такое, которое невозможно предсказать заранее. Например, это может быть результат бросания игральной кости, результат измерения длины кита в океане, процентное содержание серы и углерода в выбранном наудачу образце стали, выходной сигнал при строго синусоидальном сигнале на входе трансформатора (причем здесь мы имеем событие настолько сложное, что его более естественно рассматривать как процесс) и др. Такое определение требует комментариев. Во-первых, подразумевается, что событие связано с некоторым действием (или комплексом действий), которое называют экспериментом, испытанием, опытом и т.п. События можно рассматривать как исходы этих экспериментов. Событие может произойти в результате произведенного испытания, а может и не произойти. В теории вероятностей рассматриваются только те эксперименты, которые можно повторять неограниченное (по крайней мере, очень большое) число раз, причем все внешние условия при проведении каждого эксперимента должны оставаться неизменными (в пределах разумного, конечно, так как буквально ВСЕ условия воспроизвести не удастся никогда, ибо, например, время проведения испытания каждый раз будет разным). Уже поэтому такое явление, как развитие Вселенной, не может являться предметом теории вероятностей, так как Вселенная – уникальна и мы не можем по нашему желанию провести еще один эксперимент со всей Вселенной. Во-вторых, можно (и нужно) говорить о невозможности предсказать исход случайного события, только исходя лишь из современного состояния развития человеческого знания. Вполне может оказаться, что некоторое событие, которое сейчас рассматривается с полным на то основанием как случайное, через некоторое время окажется предметом новой области знания, в которой будет возможно предсказывать исход любого эксперимента соответствующего типа.

Например, в очень далеком прошлом восход Солнца вполне можно было рассматривать как случайное событие, так как не было даже простой уверенности у древнего человека в том, что Солнце взойдет и на следующий день. Недаром в прошлом жрецами произносились особые заклинания и производились специальные обряды для того, чтобы помочь Солнцу, зашедшему вечером за горизонт, наутро снова «жить». А уж такие характеристики восхода, как точное положение точки восхода на горизонте и само время восхода, еще не так давно были недоступны для предсказания для подавляющего большинства населения Земли. Ныне же восход Солнца никому не придет в голову считать случайным. Поэтому понятие случайности события носит не абсолютный, а относительный, условный характер. После создания квантовой механики в философии стала активно пропагандироваться идея о наличии в природе особо рода «вероятностных связей», которые по своей сути не являются детерминированными (т.е. они непредсказуемы по своей природе). Однако строгого доказательства наличия таких связей до сих пор все же нет, а попытки такого доказательства апеллируют к квантовой механике, которая сама нуждается (и очень сильно) в обосновании. И, наконец, еще одно замечание. Не так просто точно указать, к именно каким экспериментам теория вероятностей применима, а когда такое применение не приведет к содержательным результатам. Здесь иногда пытаются ввести условие наличия «объективных закономерностей» при каждом осуществлении эксперимента. Одна само условие «объективности» не так просто проверить, а уж а priori утверждать объективность какого-либо явления просто невозможно. Поэтому лучше просто при изучении некоторого явления вначале пытаться применить к нему методы теории вероятностей, а о степени адекватности судить лишь потом по тем результатам, к которым приведет такого рода применение. Если окажется, что методы теории вероятностей дают определенные устойчивые и практически проверяемые результаты, то такая практическая проверка может служить оправданием (на определенном этапе) использования теории вероятностей в данном вопросе.

Когда речь идет об эксперименте, подразумевается, что он имеет определенные ИСХОДЫ. Список этих исходов часто бывает довольно небольшим. Например, при бросании игральной кости их шесть. При бросании монеты их всего два. Если уж быть совсем точным, то их три - орел, решка и... еще одна возможность, когда монета встанет на ребро, такая возможность настолько маловероятна (т.е. происходит очень редко), что про нее просто забывают, хотя в принципе и такой исход не является невозможным. Случайность исхода эксперимента заключается обычно не в том, что невозможно предсказать, какого рода может быть исход некоторого испытания, а в том, что невозможно предсказать, какой именно из известного списка исходов реализуется при данном испытании. Например, при бросании игральной кости не может выпасть 7 очков (если мы, конечно, пользуемся стандартной игральной костью с шестью гранями, пронумерованными числами от 1 до 6).

Эксперимент и его исходы часто имеют определенные числовые характеристики. Именно наличие такого рода числовых характеристик

и дает основания для использования математических методов при изучении случайных событий (без этого случайные события остались бы предметом только таких по сути своей описательных наук, как философия, психология, социология и др.). Эти характеристики сами могут быть случайными (и тогда их называют случайными величинами), а могут быть вполне определенными числами (например, вероятность события).

Одной из важнейших числовых характеристик случайного события является его ВЕРОЯТНОСТЬ, которая является некоторым числом, сопоставляемым данному случайному событию. Нужно понимать, что это – фундаментальная характеристика и потому ПРОСТОГО определения, применимого ко ВСЕМ случайным событиям, просто не может быть (как нет, например, универсального определения для понятия «событие»). В некоторых простейших случаях такое определение может быть, конечно, дано. В элементарных учебниках по теории вероятностей часто ограничиваться «классическим» определением, которое основано на хорошо известной простой схеме. В этой схеме для определения вероятности некоторого случайного события А выделяется некоторое (конечное) множество исходов, которые полагаются (или предполагаются) равновероятными. Обозначим число этих исходов через N. Кстати, понятие равновероятности нескольких событий является еще более общим, чем понятие вероятности одного события. Поэтому для проверки равновероятности применяются соображения, лежащие за пределами теории вероятностей. Этими соображениями может быть просто здравый смысл или некоторые физические (или химические, биологические и т.п.) соображения. Например, равновероятность выпадения 1-го, 2-х, ... 6-ти очков при бросании игральной кости предполагается равновероятными любым здравомыслящим (хотя и не обязательно знакомым с теорией вероятностей) человеком. Интересно, что при этом иногда забывают, что для определенного рода кости («жульнической», т.е. неоднородной или несимметричной) эти шесть исходов равновероятными могут и не быть. Далее, устанавливается, что заданному событию А благоприятствуют определенное число, скажем M, из этих N исходов. Тогда полагают по определению, что вероятность рассматриваемого события А равной числу

$$p(A) = M/N.$$

При более абстрактном (аксиоматическом) подходе к определению вероятности такое «классическое» определение является некоторой теоремой, т.е. логически выводится из этих аксиом. Но и абстрактный подход требует определенного рода соглашений, так как предполагает выполнение определенного рода аксиом.

Под вероятностью произвольного случайного события приходится в общем случае понимать некоторую числовую характеристику этого события, которая характеризует степень его случайности. Для отдельных классов событий разработаны специальные методы вычисления вероятности (которые изучаются в курсе теории вероятностей). Более подробные общие определения вероятности можно найти в некоторых специальных философских трудах, однако в них не указываются практические методы применения этих определений. Поэтому приходится на первых этапах построения теории вероятности

лабиринт между Сциллой математики и Харибдой философии, стремясь избежать конфликтов и с той и с другой.

Вероятность  $p(A)$  случайного события  $A$  обладает несколькими фундаментальными свойствами, часть из которых при аксиоматическом подходе просто превращается в аксиомы. Перечислим те из них, которые будут нужны для дальнейшего изложения. Аргументы в пользу справедливости этих свойств можно найти в учебниках по теории вероятностей (где они выступают подчас как теоремы, а иногда и как аксиомы).

#### 1. $0 \leq p(A) \leq 1$

Граничные значения 0 и 1 вероятность принимает в следующих двух крайних случаях. Событие называется невозможным, если оно не происходит ни при одном испытании (заданного типа). Невозможному событию естественно приписать вероятность 0. Важно отметить, что не только невозможное событие имеет нулевую вероятность. Есть и другие события, наступление которых вполне возможно, а вот вероятность этого наступления равна 0. Например, рассмотрим выбор случайной точки на отрезке  $[0,1]$ . Предполагается, что все точки здесь равноправны и потому выбор любой из них равновероятен. Тогда нетрудно показать, используя приведенное ниже свойство 2, что вероятность выбора любой конкретной точки равна нулю, хотя выбор данной конкретной точки вовсе не является невозможным. С другой стороны, событие называется достоверным, если оно происходит при каждом испытании из заданного класса. Вероятность достоверного события естественно предполагать равной 1. И здесь обратное утверждение неверно – если вероятность некоторого события равна 1, то отсюда вовсе не следует, что это событие наверняка произойдет (что противоречит расхожему мнению о достоверности того события, которое гарантировано на 100%).

#### 2. $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$

Здесь  $A+B$  обозначает сумму событий  $A$  и  $B$ , т.е. событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий  $A$  или  $B$ . Через  $AB$  обозначено произведение событий  $A$  и  $B$ , это событие происходит тогда и только тогда, когда оба события  $A$  и  $B$  происходят одновременно. Приведенное выше свойство вероятности связывает между собой вероятности суммы и произведения заданных событий. У этого свойства есть важный частный случай, относящийся к несовместным событиям.

Два события называются несовместными, если наступление одного из них исключает наступление второго, т.е. если они не могут наступить одновременно, в одном эксперименте. Например, выпадение на игральной кости 5 очков исключает выпадение в том же эксперименте 3 очков. Ясно, что произведение несовместных событий невозможно, поэтому из свойства 2 получаем такое следствие

2а.  $p(A+B) = p(A) + p(B)$ , если события  $A$  и  $B$  несовместны.

Свойства 2 и 2а можно распространить и на большее, чем два, число событий. Но при этом нужно отметить, что для выполнения, скажем, свойства  $p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C)$  недостаточно только попарной несовместности событий  $A, B, C$ . Здесь нужно требовать, чтобы каждое из этих событий (скажем,  $A$ ) было несовместно с суммой всех остальных событий (в данном случае, с  $B+C$ ).

Для каждого события  $A$  можно рассмотреть событие  $A'$ , ему противоположное, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие  $A$ . В силу принятой сейчас в нашем мире двузначной системы логики (восходящей к Аристотелю и в наше время уже далеко не всегда адекватной) произведение  $AA'$  невозможно, а сумма  $A+A'$  достоверна. Из свойства 2а тогда получаем, в частности, что

2б.  $p(A')=1-p(A)$ .

Для формулировки следующего свойства нам понадобится понятие независимости событий. Это понятие является весьма общим. Обычно в учебниках по теории вероятностей это понятие вводят на основе понятия условной вероятности, которое само нуждается в отдельном определении. Другой подход – абстрактный (на основе системы аксиом) – через определяющее для независимости событий равенство  $p(AB)=p(A)p(B)$ . Но тут возникает другая проблема – как проверить, что данные конкретные события удовлетворяют требованиям этих аксиом. Поэтому стоит ограничиться не строгим, а только разъясняющим суть дела определением и под независимыми событиями понимать такие, наступление одного из которых не влияет на наступление другого (и его вероятность). Например, выпадение 4 очков при бросании игральной кости не влияет (по-видимому...) на результат эксперимента по бросанию одновременно с этим и монеты.

3.  $p(AB)=p(A)p(B)$ , если события  $A$  и  $B$  независимы.

## §2. Случайные величины

Под случайными величинами понимают числовые характеристики случайных событий. Другими словами, случайные величины – это числовые результаты экспериментов, значения которых невозможно (в данное время) предсказать заранее.

Например, следующие величины можно рассматривать как случайные:

1. Напряжение в электросети в заданный момент времени.
2. Процент мальчиков среди детей, родившихся в заданном роддоме в некоторый определенный день.
3. Число и площадь пятен на Солнце, видимых в некоторой обсерватории в течение определенного дня.
4. Число студентов, опоздавших на данную лекцию.
5. Курс доллара на бирже (скажем, на ММВБ), хотя может быть он и не так уж "случаен", как это кажется обывателям.
6. Число отказов оборудования в заданный день на определенном предприятии.

Случайные величины делят на дискретные и непрерывные в зависимости от того, каково множество всех возможных значений соответствующей характеристики – дискретное или же непрерывное. Это деление довольно условно, но полезно при выборе адекватных методов исследования. Если число возможных значений случайной величины конечно или сопоставимо с множеством всех натуральных чисел (т.е. может быть перенумеровано), то случайную величину

называют дискретной. В противном случае ее называют непрерывной, хотя на самом деле как бы неявно предполагается, что фактически непрерывные случайные величины принимают свои значения в некотором простом числовом промежутке (отрезке, интервале). Например, дискретными будут случайные величины, приведенные выше под номерами 4 и 6, а непрерывными – под номерами 1 и 3 (площади пятен). Иногда случайная величина имеет смешанный характер. Таков, например, курс доллара (или какой-то другой валюты), который фактически принимает лишь дискретный набор значений, но при этом оказывается удобным считать, что множество его значений «непрерывно».

Случайные величины можно задавать разными способами. Дискретные случайные величины обычно задаются своим законом распределения. Тут каждому возможному значению  $x_1, x_2, \dots$  случайной величины  $X$  сопоставляется вероятность  $p_1, p_2, \dots$  этого значения. В результате образуется таблица, состоящая из двух строк:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

Это и есть закон распределения случайной величины.

Непрерывные случайные величины законом распределения задать невозможно, так как по самому своему определению их значения невозможно перенумеровать и потому задание в виде таблицы тут исключается. Однако для непрерывных случайных величин есть другой способ задания (применимый, кстати, и для дискретных величин) – это функция распределения:

$$F(x) = P[X < x]$$

равная вероятности события  $[X < x]$ , которое состоит в том, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее заданного числа  $x$ .

Часто вместо функции распределения удобно использовать другую функцию – плотность  $f(x)$  распределения случайной величины  $X$ . Ее еще иногда называют дифференциальной функцией распределения, а  $F(x)$  в этой терминологии называется интегральной функцией распределения. Эти две функции взаимно определяют друг друга по следующим формулам:

$$f(x) = dF/dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Если случайная величина дискретна, то для нее понятие функции распределения тоже имеет смысл, в этом случае график функции распределения состоит из горизонтальных участков, каждый из которых расположен выше предыдущего на величину, равную  $p_i$ .

Важными примерами дискретных величин являются, например, биномиально распределенные величины (распределение Бернулли), для



которых

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

где  $p$  – вероятность отдельного события (ее иногда условно называют “вероятностью успеха”). Так распределены результаты серии последовательных однородных испытаний (схема Бернулли). Предельным случаем биномиального распределения (при увеличении числа испытаний) является распределение Пуассона, для которого

$$p_k = \lambda^k / k! \cdot \exp(-\lambda),$$

где  $\lambda > 0$  некоторый положительный параметр.

Простейший пример непрерывного распределения – равномерное распределение. Оно на отрезке  $[a, b]$  имеет постоянную плотность распределения, равную  $1/(b-a)$ , а вне этого отрезка плотность равна 0.

Чрезвычайно важным примером непрерывного распределения является нормальное распределение. Оно задается двумя параметрами  $m$  и  $\sigma$  (математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением – см. ниже), его плотность распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-m)^2/2\sigma^2)$$

Фундаментальная роль нормального распределения в теории вероятностей объясняется тем, что в силу Центральной Предельной Теоремы (ЦПТ) сумма большого числа случайных величин, которые являются попарно независимыми (о понятии независимости случайных величин см. ниже) или слабо зависимыми, оказывается приближенно распределенной по нормальному закону. Отсюда следует, что случайная величина, случайность которой вызвана наложением большого числа слабо зависимых между собой случайных факторов, может рассматриваться приближенно как распределенная нормально (в независимости от того, как были распределены слагающие ее факторы). Другими словами – нормальный закон распределения весьма универсален.

Имеется несколько числовых характеристик, которые удобно использовать при изучении случайных величин. Среди них выделим математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

равное среднему значению случайной величины, дисперсию

$$D(X) = M(X - M(X))^2,$$

равную математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от среднего значения, и еще одну, удобную на практике дополнительную величину (той же размерности, что и исходная случайная величина):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

называемую среднеквадратичным отклонением. Будем предполагать (не оговаривая этого в дальнейшем), что все выписанные интегралы существуют (т.е. сходятся на всей числовой оси). Как известно, дисперсия и среднеквадратичное отклонение характеризуют степень рассеяния случайной величины вокруг ее среднего значения. Чем

меньше дисперсия, тем более тесно группируются значения случайной величины вокруг ее среднего значения.

Например, математическое ожидание для распределение Пуассона равно  $\lambda$ , для равномерного распределения оно равно  $(a+b)/2$ , а для нормального распределения оно равно  $m$ . Дисперсия для распределения Пуассона равна  $\lambda$ , для равномерного распределения  $(b-a)^2/12$ , а для нормального распределения равна  $\sigma^2$ .

В дальнейшем будут использоваться следующие свойства математического ожидания и дисперсии:

1.  $M(X+Y) = M(X)+M(Y)$ .
2.  $M(cX) = cM(X)$ .
3.  $D(cX) = c^2D(X)$ , где  $c$  - произвольное постоянное число.
4.  $D(X+A) = D(A)$  для произвольной постоянной (неслучайной) величины  $A$ .

Случайная величина  $\check{U} = U - MU$  называется центрированной. Из свойства 1 вытекает, что  $M\check{U} = M(U - MU) = M(U) - M(U) = 0$ , то есть ее среднее значение равно 0 (с этим и связано ее название). При этом в силу свойства 4 имеем  $D(\check{U}) = D(U)$ .

Имеется также полезное соотношение, которое удобно использовать на практике для вычисления дисперсии и связанных с нею величин:

5.  $D(X) = M(X^2) - M(X)^2$

Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются независимыми, если для произвольных их значений  $x$  и  $y$  соответственно события  $[X < x]$  и  $[Y < y]$  независимы. Например, независимы будут (по видимому...) результаты измерения напряжения в электросети и рост главного энергетика предприятия. А вот мощность этой электросети и зарплату главного энергетика на предприятиях уже не всегда можно считать независимыми.

Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то имеют место и следующие свойства (которые для произвольных случайных величин могут не выполняться):

5.  $M(XY) = M(X)M(Y)$ .
6.  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ .

Кроме отдельных случайных величин  $X, Y, \dots$  изучаются и системы случайных величин. Например, пара  $(X, Y)$  случайных величин может рассматриваться как новая случайная величина, значения которой являются двумерными векторами. Аналогично можно рассматривать и системы большего числа случайных величин, называемые многомерными случайными величинами. Такого рода системы величин тоже задаются своей функцией распределения. Например, для системы двух случайных величин эта функция имеет вид

$$F(x, y) = P[X < x, Y < y],$$

то есть она равна вероятности события, заключающегося в том, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее заданного числа  $x$ , а случайная величина  $Y$  - меньшее заданного числа  $y$ . Эту функцию называют еще функцией совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ . Также можно рассматривать средний вектор - естественный аналог математического ожидания, а вот вместо дисперсии приходится изучать уже несколько числовых характеристик, называемых моментами второго порядка. Это, во-первых, две частные дисперсии  $DX$  и  $DY$

случайных величин  $X$  и  $Y$ , рассматриваемых по-отдельности, а, во-вторых, ковариационный момент, более подробно рассмотренный ниже.

Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$  – произведение функций распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  и потому изучение пары независимых случайных величин сводится во многом просто к изучению  $X$  и  $Y$  по отдельности.

### §3. Оценки параметров

В предыдущих параграфах речь шла о точно заданных (и потому довольно абстрактных) случайных величинах. Для таких величин функция распределения или плотность распределения предполагается известной абсолютно точно. Однако на практике такой точной информации о случайной величине обычно не имеется. Вместо этого имеются обычно лишь некоторые предположения о характере распределения и возможность экспериментальной проверки этих предположений.

При исследовании случайных величин в распоряжении исследователя имеется ряд результатов некоторой серии экспериментов. Другими словами, имеется ряд чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

каждое из которых есть результат отдельного опыта, эксперимента, испытания случайной величины  $X$ . На основании этих экспериментальных данных невозможно точно восстановить функцию распределения или плотность распределения, невозможно даже точно вычислить значения математического ожидания и дисперсии. Вместо этого пытаются вычислить некоторые приближения к указанным величинам. Эти приближения и называют оценками. Для каждой величины можно рассматривать много различных оценок, т.е. много разных способов приблизительно вычислить точное значение интересующего параметра, исходя из заданного набора экспериментальных данных. Здесь необходимо иметь возможности выделения среди этих оценок тех, которые являются более адекватными. Например, для математического ожидания  $M(X)$  можно предложить следующие оценки

$$M^*(X) = (x_1 + x_2 + \dots + x_N) / N,$$

$$M^{**}(X) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{N-1} + x_N) / 2(N-1),$$

где  $N$  – общее число экспериментальных данных. Если первая оценка довольно естественна, то вторая – пример достаточно произвольный. Всякая оценка как функция случайных значений сама является случайной величиной. Оценка называется **НЕСМЕЩЕННОЙ**, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Если оценка не является несмещенной, то это означает, что она дает систематическую ошибку при вычислении исследуемого параметра. Однако на практике иногда все же рассматривают и смещенные оценки, так как часто оказывается, что вносимая ими погрешность не так уж и велика, а вот способ вычисления оказывается подчас намного проще, чем у любой несмещенной оценки.

Имеем  $M(M^*(X)) = (M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_N)) / N = M(X)$ , так как математическое ожидание любой из величин  $x_1, x_2, \dots$  равно  $M(X)$ . Тем

самым доказано, что оценка  $M^*(X)$  является несмещенной. Однако точно так же проверяется, что и оценка  $M^{**}(X)$  тоже несмещенная. Для выделения "наилучшей" оценки вводят понятие эффективности. Одна оценка называется более эффективной, чем другая, если ее дисперсия (т.е. мера рассеяния вокруг оцениваемого параметра) меньше. Ясно, что использовать нужно как можно более эффективные оценки.

Можно доказать, что  $M^*(X)$  – самая эффективная оценка для математического ожидания. Это утверждение является оправданием правила среднего арифметического, столь распространенного на практике.

Для дисперсии обычно используют такую оценку  $D^*(X) = ((x_1 - M^*)^2 + (x_2 - M^*)^2 + \dots + (x_N - M^*)^2) / N$ .

Это довольно естественная формула и удивительным оказывается тот факт, что так построенная оценка является смещенной. Это можно проверить прямым вычислением, которое дает равенство

$$M(D^*(X)) = \frac{N}{N-1} D(X).$$

Причина смещенности кроется в том, что мы в этой формуле используем не точное математическое ожидание  $M(X)$ , а лишь его оценку  $M^*(X)$ . Однако, исходя из указанного равенства, можно так подправить формулу, что получится несмещенная оценка для дисперсии  $s^2 = (x_1 - M^*)^2 + (x_2 - M^*)^2 + \dots + (x_N - M^*)^2 / (N-1)$ , Величина  $s$  называется несмещенной оценкой для среднеквадратичного отклонения.

#### §4. Корреляционная теория случайных величин

Корреляционная теория изучает взаимосвязи случайных величин. Большинство случайных величин не являются независимыми, даже иногда выдвигается, и не без основания, тезис о всеобщей зависимости явлений в нашем мире. Оценить меру этих связей и призвана теория корреляции. При этом мы ограничимся простейшим случаем линейной корреляции, так как случай нелинейной корреляции требует весьма непростого математического аппарата.

Для случайных величин  $X$  и  $Y$  их ковариацией (или коэффициентом ковариации, ковариационным или корреляционным моментом – терминология здесь до сих пор не установилась) называется число  $cov(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY))$ .

Если  $X=Y$ , то получаем, что  $cov(X, X) = D(X) \geq 0$ . С другой стороны, если величины  $X$  и  $Y$  независимы, то независимыми будут и  $X - MX$ ,  $Y - MY$ , а потому в силу свойства 6 математического ожидания (см. выше)

$$cov(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = M(X - MX)M(Y - MY) = 0.$$

Эти замечания показывают, что коэффициент ковариации (т.е. совместного изменения) действительно в какой-то степени характеризует степень взаимосвязи случайных величин  $X$  и  $Y$ . Существуют и другие величины, которые можно рассматривать как меру связей между случайными величинами, ковариация и производные от

нее величины (см. ниже). Рассмотрим еще некоторые другие свойства коэффициента ковариации:

1.  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$  – свойство симметричности.
2. Если  $Y = Z + A$ , где  $Z$  и  $A$  случайные величины, причем  $X$  независима с  $Y$  и с  $A$ , то  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, Z)$ .
3.  $|\text{cov}(X, Y)|^2 \leq D(X)D(Y)$ .

Это неравенство напоминает по форме неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения из линейной алгебры. Фактически  $\text{cov}(X, Y)$  и является некоторым скалярным произведением (оно даже и положительно определено – см. ниже), а потому свойство 3 доказывается точно так же, как неравенство Коши-Буняковского в линейной алгебре.

В связи со свойством 3 оказывается удобным рассматривать “нормированный коэффициент ковариации”, который обычно называют коэффициентом корреляции (терминология здесь еще не установилась окончательно, что иногда приводит к путанице):

$$r(X, Y) = \text{cov}(X, Y) / \sigma(X)\sigma(Y)$$

Ясно, что коэффициент  $(X, Y)$  (его иногда обозначают и  $r_{XY}$ ) тоже симметричен. Свойство 3 эквивалентно неравенству  $|r(X, Y)| \leq 1$  или же системе неравенств  $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$ . При этом крайние значения  $-1$  и  $+1$  коэффициент корреляции принимает, например, если  $Y = X$  и  $Y = -X$  соответственно. Более того, если  $Y = aX + b$  (т.е.  $X$  и  $Y$  линейно зависимы), то  $\text{cov}(X, Y) = 1$  или  $-1$  (в зависимости от знака коэффициента  $a$ ). Строго говоря, значения  $+1$  и  $-1$  принимаются и для некоторых линейно независимых между собой величин  $X$  и  $Y$ . Однако нетрудно доказать, анализируя стандартное доказательство свойства 3, что  $|r(X, Y)| = 1$  тогда и только тогда, когда  $X$  и  $Y$  с вероятностью 1 линейно зависимы (т.е. существуют такие числа  $a$  и  $b$ , что  $Y = aX + b$  с вероятностью 1).

Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $r(X, Y) = 0$ . Случайные величины, для которых  $r(X, Y) = 0$  (или, что эквивалентно,  $\text{cov}(X, Y) = 0$ ), называются некоррелированными. Итак, если случайные величины независимы, то они некоррелированы, обратное утверждение неверно.

Коэффициент корреляции играет важную роль при изучении линейной регрессии. Не вдаваясь здесь в подробности регрессионного анализа, рассмотрим только его простейший вариант.

Пусть заданы случайные величины  $X$  и  $Y$ . Если  $r(X, Y) \neq 0$ , то, как следует из вышесказанного,  $Y$  не является линейной функцией от  $X$ . Однако это не препятствует попыткам найти такую линейную функцию от  $X$ , которая приближает  $Y$  наилучшим образом. В качестве меры приближения удобно взять математическое ожидание квадрата отклонения. Квадрат здесь берется для того, чтобы иметь возможность применять методы математического анализа, ибо математическое ожидание модуля отклонения в первой степени не является дифференцируемой функцией параметров. Другими словами, ставится следующая задача:

Для заданных случайных величин  $X$  и  $Y$  найти такие числа  $a$  и  $b$ , чтобы величина

$$F(a, b) = M(Y - (aX + b))^2$$

была минимальна.

Для решения этой задачи нужно просто найти точку минимума функции  $F(a,b)$ . Это делается стандартным образом – вычисляются частные производные по  $a$  и  $b$  и приравниваются к нулю. Получаем, как легко убедиться, систему из двух линейных алгебраических уравнений относительно переменных  $a, b$ . Так как из постановки задачи ясно, что она имеет решение (так как существования минимума у функции  $F$  довольно очевидно), то решение этой системы существует (причем, как нетрудно проверить, единственное) и дает минимум исследуемой функции. Если провести все вычисления, то уравнение  $y=ax+b$ , определяющее искомую линейную функцию, может быть преобразовано к следующему виду

$$y - MY = r \frac{S_Y}{S_X} (x - MX),$$

где  $r = r(X, Y)$ . Получаем уравнение прямой, называемое уравнением регрессии  $Y$  на  $X$ . Мы видим, что угловым коэффициентом этой прямой пропорционален  $r(X, Y)$ . Кроме того, из сказанного выше следует, что погрешность  $F(a, b)$  равна 0 тогда и только тогда, когда  $r(X, Y) = +1$  или  $-1$ .

Ту же задачу о нахождении линейной связи между  $X$  и  $Y$  можно решать и по-другому. Можно искать такие числа  $c$  и  $d$ , чтобы величина  $X$  отличалась как можно меньше от  $cY + d$ . Нахождение коэффициентов  $c$  и  $d$  проводится точно так же, как выше, при этом мы и ответ можем записать в сходной форме, а именно, в виде уравнения прямой

$$y - MY = \frac{1}{r} \frac{S_Y}{S_X} (x - MX).$$

Полученное уравнение называется уравнением регрессии  $X$  на  $Y$ . От уравнения регрессии  $X$  на  $Y$  оно отличается только тем, что в него входит не  $r$ , а  $1/r$ . Два эти уравнения совпадают тогда и только тогда, когда  $r^2 = 1$ , т.е.  $r = +1$  или  $-1$ . Чем ближе  $r$  к  $+1$  или к  $-1$ , чем теснее пары значений  $(x, y)$  располагаются вокруг некоторой прямой (прямой регрессии). Если же  $r$  близок к нулю, то пары  $(x, y)$  располагаются на плоскости хаотически и нет какой-либо прямой, вокруг которой они группируются (однако они могут группироваться вокруг некоторой кривой, например, спирали).

Можно вычислить ту минимальную погрешность, которая возникает при замене точной (но неизвестной) зависимости  $Y$  от  $X$  линейной зависимостью. Это делается по следующей формуле:

$$\varepsilon = \sigma(1 - r^2).$$

Из этой формулы видно, что  $\varepsilon$  тем меньше, чем меньше  $\sigma$  и чем  $r^2$  ближе к 1.

Как и для других характеристик случайных величин, для ковариации и коэффициента корреляции можно строить оценки, исходя из экспериментальных данных. Обычно используется следующая оценка (к сожалению, немного смещенная) для ковариации:

$$\text{cov}^*(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (x_i - M^*X)(y_j - M^*Y),$$

где суммирование производится по всем возможным парам значений  $(x_i, y_j)$ , число таких пар обозначается через  $N$ . Оценка  $r^*$  для  $r(X, Y)$  получается из оценки для ковариации делением на произведения оценок для средних квадратичных отклонений  $X$  и  $Y$ .

## ГЛАВА 2. Случайные процессы и временные ряды

В этой главе будут рассмотрены основные определения, связанные с понятиями случайного процесса и его частного случая – временного ряда. Во многом эти определения параллельны тем, которые были даны выше для случайных величин. Это связано с тем, что случайный процесс можно рассматривать как систему (одномерный массив) случайных величин или же как случайную величину, зависящую от параметра.

### §1. Определения случайного процесса и временного ряда

Под случайной функцией переменной  $t$  понимается соответствие, в силу которого каждому значению переменной  $t$ , принадлежащей некоторому заданному множеству  $U$  (называемому областью определения рассматриваемой функции) сопоставляется случайная величина  $X(t)$ . Обычно  $U$  – это некоторое числовое множество, так что речь идет о случайной величине, зависящей от некоторого числового параметра  $t$ . В приложениях в качестве параметра  $t$  обычно фигурирует время и тогда  $X(t)$  часто называют случайным процессом. Иногда в качестве параметра  $t$  берется и некоторая пространственная координата. Случайный процесс – это случайная величина, взятая в динамике (временной, пространственной и т.п.) ее развития. Например, напряжение в электросети, наблюдаемое в течении некоторого заданного промежутка времени, вовсе не постоянно, как принято считать, а является случайным процессом, колеблясь вокруг своего номинального значения  $220v$ . Реализуемая в некотором конкретном эксперименте функция  $x(t)$ , состоящая из значений случайной величины  $X(t)$ , называется реализацией этой случайной величины. Для напряжения реализация – это зависимость напряжения от времени при одном определенном измерении в заданном временном интервале. Еще одним примером случайного процесса является число пятен, наблюдаемое на Солнце работниками некоторой определенной обсерватории. Здесь важно подчеркнуть, что нужно рассматривать именно данные одной обсерватории, так как для разных обсерваторий случайные функции  $X(t)$  будут разными (т.е. случайные величины  $X(t)$  при каждом  $t$  будут немного отличаться в разных обсерваториях). Еще примеры случайных процессов – число отказов оборудования на данном предприятии, курс некоторой валюты (например, доллара) на бирже (например, на московской или лондонской), население города, броуновское движение микрочастиц в жидкости или газе, турбулентность и так далее.

Переменная  $t$  не обязательно должна меняться непрерывно. Может оказаться, что она принимает дискретный набор значений. Например, областью определения случайной функции может быть

множество  $\mathbf{N}$  всех натуральных чисел (или какое-либо другое семейство равноотстоящих значений). В этом случае  $X(t)$  называется временным рядом. Временной ряд можно рассматривать как последовательность  $\{X_n\}$  случайных величин. Реализация случайного процесса – это определенная последовательность чисел (т.е. числовая функция натурального аргумента). Итак, между случайным процессом и временным рядом нет принципиального различия, они отличаются только характером своей области определения. Поэтому их изучение можно производить параллельно.

Почти все приведенные выше примеры случайных процессов на самом деле более естественно рассматривать как примеры временных рядов. Например, число пятен на Солнце измеряется не непрерывно, а лишь раз в день (или чуть чаще, но даже далеко не каждую минуту) и потому результат является реализацией временного ряда. Отказы оборудования и курс доллара тоже определяются не непрерывно и потому их тоже стоит рассматривать как примеры временных рядов. А вот напряжение в электросети, регистрируемое каким-либо прибором непрерывно, является типичным примером случайного процесса.

Если зафиксировать значение переменной  $t=t_0$ , то случайная величина  $X(t_0)$ , соответствующая этому значению, называется сечением случайного процесса. Поэтому случайный процесс – это набор сечений.

Часто случайные процессы можно задавать аналитически. Например, рассмотрим следующие два случайных процесса:

$$X(t)=A \cdot \sin \omega t$$

$$Y(t)=a \cdot \sin \Omega t,$$

где  $A$  и  $\Omega$  – случайные величины,  $a$  и  $\omega$  – некоторые постоянные величины. Тогда  $X(t)$  можно рассматривать как гармонические колебания с постоянной частотой (равной  $\omega$ ), но со случайной амплитудой (задаваемой случайной величиной  $A$ ). Например, это могут быть колебания некоторого фиксированного математического маятника, для которых начальное отклонение (определяющее амплитуду) выбирается случайно. Случайный процесс  $Y(t)$  можно рассматривать как гармонические колебания, имеющие постоянную амплитуду, но частота которых случайна.

При изучении случайных процессов обычно бывает необходимо решить следующие задачи:

1. Вычислить числовые и функциональные характеристики процесса (описательные методы).
2. Определить, имеется ли некоторая неслучайная, закономерная компонента, описывающая тенденцию (тренд) процесса.
3. Определить, нет ли регулярных, колебательных "сезонных" компонент, которые связаны с периодическими естественными колебаниями параметров случайного процесса.
4. Выделить и описать основные колебания случайного процесса вокруг тренда, в случае необходимости удалить влияние второстепенных факторов.
5. Дать прогноз развития случайной процесса на ближайшее будущее и указать степень уверенности в этом прогнозе.

Анализ случайных процессов находит применение во многих областях – научных и прикладных. Например, его используют в экономике, метеорологии (прогноз температуры, осадков, паводков и др.), морских дисциплинах, геофизике, маркетинге, при анализе производственных процессов (для выделения факторов, изменяющихся во времени и влияющих на эффективность этих процессов), в военном деле и так далее.

Основные характеристики случайных процессов аналогичны тем, которые используются при изучении случайных величин. Только теперь добавляется зависимость этих характеристик от параметра  $t$ . Для временных рядов получается последовательность чисел, каждое из которых соответствует данному моменту времени.

Функцией распределения случайного процесса  $X(t)$  называется функция  $F(x, t) = P[X(t) < x]$ . При каждом фиксированном  $t = t_0$  мы получаем функцию распределения  $F(x, t_0)$  случайной величины  $X(t_0)$ . Тем самым  $F(x, t)$  полностью характеризует каждое сечение случайного процесса  $X(t)$ . Однако это не дает исчерпывающей характеристики случайного процесса в отличие от случайных величин, для которых знание функции распределения позволяет получить всю необходимую информацию о случайной величине. Для случайного же процесса важна и взаимная связь различных сечений. Совместное распределение двух сечений случайного процесса  $X(t)$  описывается двумерной функцией распределения:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2].$$

Аналогично можно вести и функции совместных распределений трех и более сечений. Все они будут нести важную информацию об исходном случайном процессе. Однако с увеличением числа рассматриваемых сечений эти функции становятся все более сложными и потому обычно ограничиваются рассмотрением только первых двух функций распределения – одномерной и двумерной.

Плотность распределения (одномерная) случайного процесса получается, как и в случайных величинах, дифференцированием функции распределения

$$f(x, t) = \frac{dF}{dx}(x, t).$$

Математическое ожидание случайного процесса – это функция, которая при каждом значении параметра  $t$  равно математическому ожиданию соответствующего сечения. Если величины  $X(t)$  при каждом  $t$  являются дискретными случайными величинами, то они задаются законами распределения

$$\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & \dots \\ p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \dots \end{matrix}$$

В этом случае математическое ожидание случайного процесса вычисляется по формуле:

$X$

$$M(X(t)) = \sum_i x_i(t) p_i(t).$$

Для временного ряда  $\{X_n\}$  математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$MX_n = \sum_i x_i(n) p_i(n)$$

Если процесс  $X(t)$  образован непрерывными случайными величинами, то математическое ожидание через плотность распределения этого случайного процесса выражается следующим естественным образом:

$$M(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,t)dx .$$

Свойства математического ожидания для случайного процесса те же, что для математического ожидания отдельной случайной величины. Это не удивительно, так как математическое ожидания для каждого значения параметра  $t$  зависит только от сечения в этой точки.

Математическое ожидание случайного процесса является некоторой обычной (неслучайной) функцией переменной  $t$ . График этой функции описывает развитие во времени среднего значения величины  $X(t)$ . При этом может оказаться, что этот график – прямая линия, параллельная оси  $t$ . В этом случае случайный процесс можно рассматривать как случайные колебания вокруг некоторого постоянного значения. Такого рода процессы очень часто встречаются на практике.

Если случайный процесс  $X(t)$  центрировать, вычтя из него функцию  $MX(t)$ , то получим центрированный случайный процесс, которые представляет собой случайные колебания вокруг нулевого значения. Иногда случайный процесс еще и нормируют, деля его на среднеквадратичное отклонение  $\sigma_x$  (см. ниже), при этом получается процесс с нулевым средним и с единичной дисперсией. Эта нормировка удобна для сравнения между собой случайных процессов разного рода.

Определение дисперсии случайного процесса тоже вполне очевидно. Его можно записать также в виде:

$$D(X(t)) = M(X(t))^2 - MX(t)^2 .$$

Если процесс  $X(t)$  образован дискретными величинами, то развернутая формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D(X(t)) = \sum_i (x_i(t) - MX(t))^2 p_i .$$

Для непрерывного случая имеем формулу

$$D(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX(t))^2 f(x,t)dx .$$

Ясно, что и свойства дисперсии случайного процесса по сути не отличаются от свойств дисперсии случайной величины. Дисперсия случайного процесса характеризует степень рассеяния различных реализаций случайного процесса вокруг его "средней реализации" (т.е. математического ожидания случайного процесса). Для случайных процессов вводится, конечно, и понятие среднеквадратичного отклонения  $\sigma(X(t))$  – это корень квадратный из дисперсии.

Два случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(s)$  называются независимыми, если для каждых значений параметров  $t$  и  $s$  независимы случайные величины  $X(t)$  и  $Y(s)$ . Это означает, что должны быть независимыми события  $[X(t) < x]$  и  $[Y(s) < y]$  при любых значений переменных  $x$  и  $y$  и аргументов  $t$  и  $s$ . Например, есть все основание предполагать, что

курс доллара на московской бирже и температура воздуха в городе Москве независимы.

Однако понятие независимости на практике не является абсолютным и потому может оказаться, что эти два не связанных между собой (на первый взгляд) процесса на самом деле нельзя рассматривать как независимые. Чтобы убедиться в независимости двух процессов, иногда приходится проводить довольно длительные исследования.

Для независимых случайных процессов их математические ожидания и дисперсии, как и в случае отдельных случайных величин, обладают дополнительными свойствами:

$$\begin{aligned}M(X(t)Y(t)) &= M(X(t))M(Y(t)), \\D(X(t)+Y(t)) &= D(X(t))+D(Y(t)).\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые примеры вычисления математического ожидания и дисперсии случайных процессов.

1. Пусть  $X(t)=at+B$ , где  $a$  – некоторое постоянное число, а  $B$  – случайная величина. Тогда имеем

$$M(X(t))=at+M(B)$$

Графики реализаций этого случайного процесса являются параллельными между собой прямыми, а график функции  $M(X(t))$  – это как бы средняя среди всего этого множества прямых. Далее, имеем

$$D(X(t))=D(B),$$

так как слагаемое  $at$  не является случайным и потому на значение дисперсии не влияет (см. выше).

2.  $X(t)=A_1\sin\omega_1t + A_2\sin\omega_2t$ ,

где  $A_1$  и  $A_2$  – случайные величины, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – некоторые постоянные числа. Предположим, что случайные величины  $A_1$  и  $A_2$  независимы, их математические ожидания равны 0, а их дисперсии одинаковы и равны некоторому числу  $\sigma^2$ . Имеем тогда, используя свойства математического ожидания и дисперсии, такие соотношения:

$$\begin{aligned}M(X(t)) &= M(A_1)\sin\omega_1t + M(A_2)\sin\omega_2t = 0+0=0, \\D(X(t)) &= D(A_1)\sin^2\omega_1t + D(A_2)\sin^2\omega_2t = \sigma^2(\sin^2\omega_1t + \sin^2\omega_2t), \\ \sigma(X(t)) &= \sigma\sqrt{\sin^2\omega_1t + \sin^2\omega_2t}.\end{aligned}$$

Несмотря на то, что математическое ожидание и дисперсия случайного процесса являются очень полезными характеристиками, для серьезного изучения случайных процессов этих характеристик оказывается далеко не достаточно. Дело в том, что эти две характеристики ничего не говорят о том, как связаны между собой различные сечения случайного процесса. А без знания такой связи не стоит и пытаться искать методы прогнозирования случайных процессов.

Так как временной ряд – это частный случай понятия случайной функции, то все сказанное выше о характеристиках случайных процессов в полной мере относится и к временным рядам. Для них математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам, аналогичным приведенным выше. Только теперь в результате получаются не функции, а последовательности чисел.

Выше речь шла о скалярных случайных процессах, где случайные величины одномерны. Можно рассматривать и вектор-значные (или,

иначе говоря, многомерные) случайные процессы, в которых каждому значению параметра  $t$  соответствует некоторый случайный вектор. Например, в таком виде можно задать движение артиллерийского снаряда с течением времени. Вектор-значный случайный процесс можно рассматривать как систему, состоящую из нескольких скалярных случайных процессов. Поэтому многие методы исследования, применяемые в теории скалярных (одномерных) случайных процессов, подходят и для исследования вектор-значных процессов. Однако тут есть и свои специфические проблемы.

## §2. Корреляционная теория случайных процессов и временных рядов

Методы теории корреляции играют огромную роль при изучении случайных процессов. Их роль велика и при изучении отдельных случайных величин, но именно для случайных процессов корреляция выходит на первый план. Это объясняется, в частности, тем, что именно корреляция дает возможность связать воедино информацию о различных сечениях случайного процесса и тем самым выявить его суть.

Ковариацией (или, точнее, взаимной ковариацией) двух случайных процессов  $X(t), Y(t)$  называется функция двух переменных  $s$  и  $t$ :

$$\text{cov}(X, Y)(s, t) = M((X(s) - MX(s))(Y(t) - MY(t))).$$

Иногда эту же функцию называют функцией взаимной корреляции или кросскорреляции. Если случайные процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  независимы, то их ковариация, конечно, равна нулю. Поэтому ковариацию, как и в случайных величинах, можно рассматривать как меру независимости случайных процессов  $X$  и  $Y$ . Ковариацию можно рассматривать и применительно к одному случайному процессу, если интересоваться мерой независимости его сечений. А именно, корреляционной функцией случайного процесса или функцией автокорреляции  $X(t)$  называют функцию

$$K_X(s, t) = \text{cov}(X, X)(s, t) = M((X(s) - MX(s))(X(t) - MX(t))).$$

Если функция  $K_X(s, t)$  тождественно равна нулю, то это означает, что все сечения случайного процесса некоррелированы. Такого рода процессы называют белым шумом (иногда, накладывая еще некоторые дополнительные ограничения на сечения этого процесса, требуют их одинаковой распределенности с нулевым средним значением).

Перечислим некоторые основные свойства функции ковариации:

1.  $|\text{cov}(X, Y)(s, t)|^2 \leq DX(s)DY(t)$ .

В частности  $|K_X(s, t)|^2 \leq DX(s)DX(t)$ .

2.  $K_X(s, t) = K_X(t, s)$  - симметричность.

3.  $\iint a(s)a(t)K_X(s, t)dsdt \geq 0$  для произвольной функции  $a(t)$ . Это свойство называется свойством положительной определенности, аналогичное свойство имеется и для случайных величин, но мы его выше не указывали, так как там оно нам было не так важно, как для случайных процессов.

Свойство 1 доказывается точно так же, как аналогичное свойство для случайных величин. Свойство 2 очевидно, оно означает, что функция автокорреляции  $K_X(s, t)$  симметрична по своим аргументам.

Как и в случае случайных величин, свойство 1 дает основания для введения нормированной функции ковариации:

$$r_{XY}(s, t) = \text{cov}(X, Y)(s, t) / \sigma_X(s) \sigma_Y(t).$$

Функция  $r_{XY}$  принимает значения в отрезке  $[-1, +1]$  и равна нулю, если  $X$  и  $Y$  независимы. Если  $r_{XY} = 0$ , то процессы  $X$  и  $Y$  не обязательно будут независимы, они будут называться некоррелированными. Итак, независимые процессы всегда некоррелированы, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Аналогично определяется нормированная функция автокорреляции  $r_X(s, t)$  для случайного процесса  $X(t)$ .

Рассмотрим примеры вычислений функции корреляции.

1 Пусть  $X(t) = At + b$ , где  $A$  – равномерно распределенная на отрезке  $[a, b]$  случайная величина,  $b$  – некоторая константа. Тогда  $MX = MA \cdot t + b$  и получаем:

$$K_X(s, t) = M((X(s) - MX(s))(X(t) - MX(t))) = M(A - MA)^2 st = DA \cdot st,$$

где  $DA = (b - a)^2 / 12$ . Далее, имеем:

$$DX(t) = Da \cdot t^2, \quad \sigma_X(T) = t \sqrt{DA}.$$

Из этих вычислений вытекает, очевидно, что  $r_X(s, t) = 1$ ! Это означает, что каждое из сечений в этом примере полностью определяет любое другое сечение. Это на самом деле и не удивительно, если вспомнить, что рассматриваемый нами процесс линеен.

2. Пусть  $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ , где  $\omega$  – некоторая постоянная величина, а  $A$  и  $B$  – случайные величины, причем предположим, что они некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и равные между собой дисперсии (или среднеквадратичные отклонения), т.е. пусть выполнены условия:

$$\text{cov}(A, B) = 0, \quad MA = MB = 0, \quad DA = DB = \sigma^2.$$

Тогда  $MX(s, t) = 0$  и имеем равенства:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, X)(s, t) &= M((A \cos \omega s + B \sin \omega s)(A \cos \omega t + B \sin \omega t)) = \\ &= M(A^2 \cos \omega s \cdot \cos \omega t + \sin \omega s \cdot \sin \omega t + 2AB(\cos \omega s \cdot \sin \omega t + \sin \omega s \cdot \cos \omega t)) = \\ &= \sigma^2 \cos \omega(s - t). \end{aligned}$$

Этот случайный процесс  $X(t)$  можно рассматривать как общий вид случайного гармонического колебания с постоянной частотой  $\omega$  (случайными тут являются амплитуда и фаза). Для этого нужно просто записать  $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  в виде  $C \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  – амплитуда, а  $\varphi = \arctg(A/B)$  – фаза. Такой случайный процесс мы будем называть элементарным гармоническим процессом.

Для временных рядов определения теории корреляции выглядят совершенно аналогично. На основе этих определений строятся формулы для вычисления оценок. Общая схема построения простейших формул для оценок такова. Берется формула для вычисления некоторой характеристики временного ряда, у которого все сечения являются дискретными случайными величинами. В эту формулу вместо всех фигурирующих там вероятностных параметров (математическое

ожидание, дисперсия и т.д.) подставляются некоторые их оценки. Суммирование по всем возможным значениям дискретной случайной величины заменяется на суммирование по всем экспериментальным данным. Таким способом были построены вышеприведенные оценки для математического ожидания и дисперсии. Выше было показано, что иногда так полученные оценки являются несмещенными, а иногда имеют смещение (хотя и небольшое). Однако все такие формулы имеют одно достоинство – они просты. Иногда используются и другие, весьма изощренные формулы для оценок. В частности, часто используемая на практике формула для оценки автокорреляции центрированного временного ряда  $X(k)$  имеет вид

$$K^* = \frac{1}{N+1} \sum_k x(k(T-\tau)/N+\tau)x(k(T-\tau)/N),$$

здесь при  $\tau < 0$  в правой части нужно заменить  $\tau$  на  $|\tau|$ .

Для временного ряда часто используется коэффициент взаимной корреляции между значениями  $x_1, x_2, x_3, \dots$  некоторой реализации этого ряда и соответствующими моментами времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . Моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  считаются равноотстоящими. Выбрав подходящие единицу времени и начало его отсчета, можно поэтому считать, что моменты времени – это натуральные числа  $1, 2, 3, \dots$ . Тогда для отрезка  $1, 2, 3, \dots, T$  математическое ожидание равно  $(n+1)/2$ , а дисперсия  $DT$  равна, как нетрудно проверить, величине  $n(n+1)/12$ . Поэтому уравнение регрессии для временного ряда может быть записано в таком виде:

$$x - MX = \frac{12}{n(n+1)} \left( \sum_k (x_k - MX) \left(k - \frac{n+1}{2}\right) \right) \left(t - \frac{n+1}{2}\right).$$

### §3. Стационарные временные ряды. Свойство эргодичности.

Среди всех случайных процессов оказывается полезным выделить такие, которые обладают дополнительным свойством стационарности, т.е. некоторой регулярности относительно времени. Различают два класса стационарных случайных процессов – стационарные в широком и в узком смысле.

Случайный процесс  $X(t)$  называется стационарным (в узком, т.е. в наиболее строгом смысле этого слова), если все его функции распределения ( $F(x, t), F(x_1, x_2, t_1, t_2)$  и т.д.) не зависят от выбора начальной точки отсчета времени. Другими словами, процесс стационарен, если все его вероятностные характеристики (а эти характеристики полностью определяются его функциями распределения – одномерной, двумерной и т.д.) являются стационарными. Тем самым все моменты времени тут являются равноправными.

Для одномерной функции распределения  $F(x, t)$  условие стационарности можно записать в виде:

$$F(x, t+T) = F(x, t),$$

где  $T$  – произвольное число. Отсюда следует, что  $F(x, t)$  не зависит от  $t$  и потому является функцией одного только  $x$ . А отсюда вытекает, в частности, что математическое ожидание случайного процесса (как, впрочем, и его дисперсия) является постоянной

величиной. Это означает, что стационарный процесс можно рассматривать как состоящий из случайных колебаний вокруг некоторого фиксированного значения, которое является его стационарным состоянием. Графически это изображается как колебания вокруг горизонтальной прямой.

Для двумерной функции распределения условие стационарности можно записать в следующем виде:

$$F(x_1, x_2, t_1 + T, t_2 + T) = F(x_1, x_2, t_1, t_2).$$

Положив  $\tau = t_2 - t_1$ , мы видим, что двумерная функция распределения  $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$  фактически зависит не от моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , а лишь от их разности  $\tau$ , называемой иногда лагом (запаздыванием, задержкой) и может быть записана в виде  $F(x_1, x_2, \tau)$ . Отсюда следует, что все вероятностные характеристики случайного процесса, которые выражаются через двумерную функцию распределения, зависят от  $\tau$ . В частности, это относится к функции автокорреляции  $r_X(s, t) = r_X(\tau)$ .

Стационарные случайные процессы описывают те явления и системы, изменения которых являются стационарными (в том смысле, что не зависят от выбора системы отсчета времени). Например, стационарными можно считать напряжение в линии электропередач, давление газа в замкнутом помещении или в газопроводе и т.д.

Кроме независимости  $M_X$  от  $t$  и зависимости  $K_X$  только от  $\tau$  стационарные случайные процессами обладают еще многими дополнительными свойствами. Дело в том, что выше мы не использовали еще многие другие числовые характеристики случайных процессов, которые выражаются через одно- и двумерную функции распределения (среди которых и такие важные, как дисперсия), а о функциях распределения высших порядков речь вообще не шла. Однако в процессе практического изучения тех случайных процессов и временных рядов, которые есть основания рассматривать как стационарные, оказалось, что именно указанные выше две особенности стационарных процессов являются определяющими. Поэтому было введено понятие стационарности в широком смысле, которое основывается только на этих двух особенностях. А именно, случайный процесс  $X(t)$  называется стационарным в широком (или, лучше сказать, расширенном) смысле, если его математическое ожидание  $M_X$  постоянно, а функция автоковариации  $K_X$  зависит только от разности  $s - t$  временных аргументов.

Случайных процессов, стационарных в широком смысле, в природе очень много. Например, это все процессы, стационарные в узком смысле, а также, как мы сейчас покажем, и все задаваемые в виде суммы независимых элементарных гармонических процессов. Рассмотрим этот важный класс примеров стационарных процессов.

Пусть  $X(t) = \sum_k C_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$  – сумма элементарных гармонических

случайных процессов  $C_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Предположим, что случайные величины  $C_k$  имеют нулевые математические ожидания и независимы, пусть их среднеквадратичные отклонения равны  $\sigma_k$ , а частоты  $\omega_k$  и фазы  $\phi_k$  гармоник – некоторые постоянные величины (т.е. числа, зависящие только от номера  $k$ ).

Ясно, что  $M_X = 0$ . Вычисление, аналогичное приведенному выше, показывает, что

$$K_X(\tau) = \sum_k \sigma_k^2 \sin^2(\omega_k \tau).$$

Отсюда видно, что процесс  $X(t)$  является стационарным в широком смысле этого слова. При этом он далеко не всегда будет стационарным в узком (т.е. в точном) смысле этого слова. Однако оказывается, что и его дисперсия постоянна, она равна

$$DX = \sum_k s_k^2 = K_X(0).$$

Перечислим теперь некоторые важные свойства функции автокорреляции стационарных процессов. При этом в дальнейшем мы практически всегда будем рассматривать стационарность в широком смысле этого слова.

1  $K_X(0) = DX$ .

Отсюда следует, в частности, что  $r_X(0) = 1$  и что  $r_X = K_X / K_X(0)$ .

2  $|K_X(\tau)| \leq K_X(0)$ .

Это неравенство следует из стандартного свойства функции ковариации, если учесть предыдущее свойство 1.

3  $K_X(-\tau) = K_X(\tau)$ , то есть  $K_X(\tau)$  является четной функцией своего аргумента  $\tau$ . То же касается, конечно, и функции  $r_X(\tau)$ .

4 Если  $X = Y + Z$  – сумма двух некоррелированных стационарных случайных процессов, то  $K_X(\tau) = K_Y(\tau) + K_Z(\tau)$ .

Отметим, что на практике обычно оказывается, что для стационарных процессов  $r_X$  стремится к 0 при  $\tau \rightarrow \infty$  или же она просто отлична от нуля только на конечном интервале.

Стационарность – это не единственное полезное свойство, которым могут обладать случайные процессы и которое дает возможность более подробно их исследовать. Еще одним свойством такого рода является эргодическое свойство или, говоря более коротко, эргодичность. Понятие “эргодичность” заимствовано из статистической физики, в которой изучаются свойства некоторых физических систем (например, газов) состоящих из большого числа одинаковых частиц. Там выделяется особый класс систем, в которых математические ожидания (средние значения) физических характеристик можно вычислить не только путем усреднения по всему множеству составляющих систему частиц, но и по траектории движения одной единственной частицы. Термин “эргодический” связан с греческим словом *ergon* – работа, в статистической физике он появляется потому, что свойство эргодичности формулируется в тонком (в пределе – бесконечно тонком) слое фазовой области вблизи поверхности постоянной энергии. Эргодичность проявляется в том, что со временем соответствующий физический процесс становится однородным, т.е. любая реализация этого процесса окажется в какой-то момент сколь угодно близко к произвольному заданному состоянию системы.

Для случайных процессов свойство эргодичности формулируется по отношению к различным вероятностным характеристикам. Например, для математического ожидания свойство эргодичности формулируется следующим образом.

Пусть  $X(t)$  – некоторый случайный процесс. Его математическое ожидание вычисляется через интеграл с учетом всей области изменения его значений  $x$ . Для практического вычисления

математического ожидания необходимо знать все возможные реализации этого случайного процесса. Математическое ожидание и есть усреднение по множеству всех этих реализаций. Однако на практике невозможно найти все возможные реализации, да и усреднение по их множеству (бесконечному, а фактически даже континуальному) практически выполнить невозможно. Но оказывается, что в некоторых случаях математическое ожидание можно найти, если известна только одна реализация случайного процесса. Пусть  $x(t)$  – некоторая реализация случайного процесса  $X(t)$ . Выделим временной отрезок  $[-T, +T]$  длины  $2T$  и рассмотрим следующую величину, зависящую от  $T$ :

$$m_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt .$$

Для временного ряда вместо интеграла берется сумма:

$$m_T = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(k) .$$

Эту величину  $m_T$  можно рассматривать как среднее значение функции  $x(t)$  на отрезке  $[-T, +T]$ , она может использоваться как оценка (причем несмещеная) для математического ожидания стационарного случайного процесса. Если перейти к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , то получим число  $m$ , которое является средним значением для данной реализации случайного процесса. Естественно возникает вопрос о том, какое отношение имеет это среднее значение к математическому ожиданию  $MX$  случайного процесса. Вообще говоря, конечно, это две различные величины. Но в некоторых важных случаях оказывается, что они совпадают. Так как  $m$  постоянно, то тут естественно рассматривать только стационарные процессы. Говорят, что стационарный случайный процесс  $X(t)$  обладает свойством эргодичности по отношению к математическому ожиданию, если для любой его реализации  $x(t)$  имеет место равенство:

$$MX = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt .$$

Свойство эргодичности тут означает, что усреднение по всем реализациям можно заменить на усреднение по одной единственной траектории.

Аналогично формулируются свойства эргодичности для других характеристик случайных процессов. Например, для дисперсии оно имеет вид:

$$DX = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x - MX)^2 dt ,$$

а для функции автокорреляции:

$$K_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x(t+\tau) - MX)(x(t) - MX) dt .$$

Если для случайного процесса проверено свойство эргодичности, то говорят, что для него справедлива эргодическая теорема (в теории вероятностей их называют еще, по аналогии с классической теорией вероятностей, законами больших чисел). Свойство эргодичности означает, что все реализации случайного процесса

однородны, равноправны (по крайней мере, относительно некоторой одной характеристики – математического ожидания, дисперсии, функции автокорреляции). Обычно на практике свойство эргодичности выводят из определенных физических соображений. Например, эргодическим естественно считать броуновское движение микрочастиц. Неэргодичность часто означает, что случайный процесс можно рассматривать как смесь нескольких эргодических процессов, тут величина  $m_T$  характеризует лишь одну из компонент смеси, но не всю смесь в целом. Если же стационарный процесс  $X(t)$  не является явной смесью, т.е. искусственным объединением нескольких существенно различных процессов, то этот процесс есть все основания предполагать эргодическим.

Для того, чтобы строго доказать какую-либо эргодическую теорему, на стационарный процесс  $X(t)$  нужно наложить определенные дополнительные ограничения. Например, для эргодичности математического ожидания достаточно потребовать, чтобы при  $T \rightarrow \infty$  функция  $r_X(\tau)$  стремилась к 0, а для эргодичности дисперсии – чтобы к нулю стремилась функция  $r(X(t)^2)(\tau)$ . Это последнее условие означает, что сечения случайного процесса становятся все менее коррелированными с увеличением временного промежутка между ними. Другими словами, события, произошедшие в некоторый момент времени, оказывают с течением времени все меньшее влияние на развитие процесса в будущем.

Нетрудно привести примеры неэргодических случайных процессов. Например, таков процесс  $X(t)=A$ , где  $A$  – некоторая случайная величина. Его реализации – постоянные функции и усреднение каждой из них дает, вообще говоря, разные значения (и потому не совпадает с  $MX$ ).

КОНЕЦ ЧАСТИ I