«МАТИ» - Российский государственный технологический
университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

Определенный интеграл

Методические указания к курсовой работе

Составители: Горелова Р.П.
Кулакова Р.Д.

Москва 2002г.

Введение.

Домашнее задание по теме «Определенный интеграл» предназначено для студентов первого курса вечернего отделения. Данное задание можно использовать как контрольную работу для студентов дневного отделения. Задание включает вычисление определенных интегралов и геометрические приложения.

1. Методические указания и образцы решения задач.

Для вычисления определенных интегралов от непрерывных функций с конечными пределами необходимо, пользуясь известными методами интегрирования, получить первообразную от интегрируемой функции и, применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти разность значений первообразной при подстановке вместо переменной верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Задача 1.

Вычислить интеграл $\int_4^{16}\frac{\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}$.

Решение.

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Применим подстановку $\sqrt{x}=t; x=t^2$. Определим новые пределы интегрирования: $x=4\ \text{при}\ t=2, x=16\ \text{при}\ t=4$

$$\int_4^{16}\frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}dx=\int_2^4\frac{t*2t}{t^2(t-1)}dt=2\int_2^4\frac{dt}{t-1}=2\ln|t-1|\Big|_2^4=2\ln 3$$

Для вычисления несобственных интегралов необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохранила непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода). Затем, вычислив значение интеграла в измененных пределах по формуле Ньютона-Лейбница, нужно применить предельный переход для возвращения к пределам интегрирования, заданным в условии задачи.

Задача 2.

Найти несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

Рассматривается несобственный интеграл 2-го рода, т.к. подынтегральная функция терпит разрыв на правом конце интегрирования. На основании определения:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin x\big|_0^{1-\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} .$$

Задача 3.

Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение.

Применим теорему сравнения: $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ при $x \ge a$ и если $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ также сходится. В нашем случае при $x \ge 1$ справедливо неравенство: $\frac{1}{x^2(1+e^x)} \le \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} (-\frac{1}{b} + 1) = 1$

т.к. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ тоже сходится.

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми $y_1(x), y_2(x)$, прежде чем применять формулу для нахождения площади

$$S = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]dx ,$$

нужно определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$. Они находятся как решения уравнения: $y_1(x) = y_2(x)$. Корни этого уравнения x_1, x_2, причем $x_1 < x_2$ являются пределами интегрирования.

Задача 4.

Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$, содержащейся между точками, для которых $x = 3$ *и* $x = 8$.

Решение.

Длина дуги кривой определяется по формуле: $l = \int_a^b \sqrt{1 = [f'(x)]^2} dx$

$$a=\sqrt{8}; b=\sqrt{15}; f(x)=\ln x; f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$l=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=t; x^2+1=t^2; xdx=tdt\\ x=\sqrt{8}; t=3; x=\sqrt{15}; t=4\end{array}\right\}=$$

$$=\int_3^4\frac{t*tdt}{t^2-1}=\int_3^4\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left.\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right|_3^4=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3*4}{5*2}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$$

Запишем формулу для вычисления объема тела вращения.

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx$$

Если фигура, ограничена кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x); 0\le f_1(x)\le f_2(x)$ и прямыми $x=a, x=b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения:

$$V_x=\pi\int_a^b(y_2{}^2-y_1{}^2)dx$$

Вариант 1.

1). $\int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ 2). $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

3). $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\boldsymbol{xy = 4, x + y - 5 = 0}$.

5)Вычислить длину кардиоиды: $S = a(1-\cos j)$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами: $y = -x^2 + 8$ и $y = x^2$

Вариант 2.

1). $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ 2). $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

3). $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} dx$ a>0

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=16-8x$ и $y^2=24x+48$.

5)Вычислить длину всей линии: $S = \sin^2 \frac{j}{2}$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной фигуры, ограниченной осью OX, прямой $x = p$ и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Вариант 3.

1). $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^6}$ 2). $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{2x^2 + 3x - 2}$

3). $\overset{¥}{\underset{2}{ò}}\, \boldsymbol{\frac{\ln x}{x} dx \;\; a > 0}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=x^2-3x$ и $3x+y-4=0$.

5)Вычислить длину линии: $\begin{cases} x = R(\cos t + t\sin t) \\ y = R(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$

6)Фигура, ограниченная дугами парабол $\boldsymbol{y = x^2; x = y^2}$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объём тела вращения.

Вариант 4.

1). $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

2). $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

3). $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$

4).Фигура ограничена линией $S = 4\cos 3j$. Вычислить площадь той её части, которая расположена вне круга $S = 2$.

5)Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{(x+1)^3}\,(-1 \le x \le 1)$

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$ и x=n (p>0,n>0).

Вариант 5.

1). $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

2). $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

3). $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

4)Вычислить площадь, ограниченную первым и вторым витками спирали Архимеда $S = 2j$

5)Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсечённой прямой $x = \frac{4}{3}$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$x = 0, y = 0, y = \cos x$

Вариант 6.

1). $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

2). $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$

3). $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную лемнискатой Бернулли: $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$

5)Найти длину кривой: $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсечённой осью ОХ.

6)Вычислить объём тела вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми

$xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$

Вариант 7.

1). $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

2). $\int_0^p x^3 \sin x dx$

3). $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

4)Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y^2 = x^3, y = 8, x = 0$

5)Найти длину одной арки циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

6)Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y = \pm b$$

Вариант 8.

1). $\int_0^{\frac{p}{4}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$

2). $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$

3). $\int_{-\infty}^0 \frac{2x dx}{x^2+1}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную эллипсом: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5)Найти длину дуги кривой: $y = \ln x$, от $x = \frac{3}{4}$ до $x = \frac{12}{5}$.

6)Вычислить объём тела вращения вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 4 - x, x = 0$$

Вариант 9.

1). $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$

2). $\int_0^{\frac{p}{2}} x^2 \cos x dx$

3). $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривой: $r = 2\sin 3j$

5)Найти длину дуги кривой: $y = \ln(1-x^2)$, от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$.

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3, x = 0$

Вариант 10.

1). $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 2). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$

3). $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную одной аркой циклоиды:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$$

и осью ОХ.

5)Найти длину дуги цепной линии: $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

6)Определить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $(y-a)^2 = ax, x = 0$

Вариант 11.

1). $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ 2). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

3). $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную одной полуволной синусоиды:
$y = 3\sin 3x$ и осью ОХ.

5)Найти длину дуги кривой: $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

6)Определить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной эллипсом: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Вариант 12.

1). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 5\cos x}$ 2). $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$

3). $\int\limits_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную астроидой:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$$

5)Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r = aj$.

6)Найти объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{1+x^2}, x = \pm 1.$$

Вариант 13.

1). $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

2). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{w}} \sin^2(wx + j_0)dx$

3). $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривыми: $y^2 = 1 - x, x = -3$

5)Найти длину кардиоиды $r = 3(\cos x - 1)$

6)Определить объём тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ и прямыми $x = \pm a, y = 0$.

Вариант 14.

1). $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{(4-x^2)^3}dx$

2). $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

3). $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную половиной одной аркой циклоиды:
$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ и осью ОУ и прямой $y = 2$.

5)Найти длину дуги кривой: $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

6)Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x = \pm 3a$.

Вариант 15.

1). $\int\limits_{3}^{20} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

2). $\int\limits_{1}^{e-1} \ln(x+1)dx$

3). $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctg(x+1)^2 dx}{x^2+2x+2}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривой $r = 3\cos 2j$

5)Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$

6)Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной астроидой:
$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (x \ge 0, y \ge 0)$ вокруг оси ОХ.

Вариант 16.

1). $\int\limits_{2.5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx$ 2). $\int\limits_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

3). $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривыми: $4y = x^2, y^2 = 4x$.

5)Найти длину кардиоиды $r = 3(1+\cos j)$

6)Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной прямыми $x = 0, y = 2$ и первой половиной первой арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

Вариант 17.

1). $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^3}}$ 2). $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x + x^3}$

3). $\int\limits_{-\infty}^{1} x e^{-x^2} dx$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную цепной линией $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ и прямыми $x = a, x = -a, y = 0$

5)Найти длину всей кривой $r = 2\cos j$

6)Определить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОЧ фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью ОХ.

Вариант 18.

1). $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ 2). $\int\limits_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{p}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$

3). $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кардиоидой $r = 3a(1+\cos j)$

5)Найти длину полукубической параболы $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, если $-1 \le x \le 4.$.

6)Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3, x = 0, y = 8$.

Вариант 19.

1). $\int_0^{\frac{p}{4}} \frac{dx}{2-3\sin x}$ 2). $\int_1^3 x^2 \log_3 x dx$

3). $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную линией $r = 2 + \sin j$

5)Найти длину дуги линии $\begin{matrix} x = 2(t\sin t + \cos t) \\ y = -2(t\cos t - \sin t) \end{matrix} \quad (0 \le t \le p)$

6)Определить объём тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = a^2, x = \pm 2a$.

Вариант 20.

1). $\int_0^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2 - x^2}}$ 2). $\int_0^{\frac{p}{4}} ctg^4 x dx$

3). $\int_1^{\infty} \frac{\ln^4 x dx}{x}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями: $y = 6x - x^2, y = 0$.

5)Вычислить длину кривой $r = 4\sin j$

6)Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной астроидой:

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (x \ge 0, y \ge 0)$.

Вариант 21.

1). $\int_0^{1} \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ 2). $\int_0^{p} x^2 \sin x dx$

3). $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 2x + 4, x = 0$

5)Определить длину кривой $r = \sin^3 \frac{x}{3}$

6)Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$ и прямыми $x = a, x = b$.

Вариант 22.

1). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} \frac{dx}{2\sin^2 x + 5}$ 2). $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

3). $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 2 - x^2, y = x^2 - 6$

5)Вычислить длину второго витка спирали Архимеда $r = j$.

6)Определить объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

Вариант 23.

1). $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ 2). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} e^{2x} \cos x dx$

3). $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5) arctg(x + 2)}$

4)Вычислить площадь фигуры, ограниченную кривой $r = 3 - \cos j$

5)Найти длину дуги кривой $y = \ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат ОУ и ОХ.

6)Определить объём тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

Вариант 24.

1). $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x^3}$ 2). $\int\limits_{1}^{e^2} \ln^2 x dx$

3). $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

4)Вычислить площадь, описываемую полярным радиусом спирали Архимеда $r = 2j$ при одном его обороте, если начало $j = 0$

5)Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{2x}$ $(0 \le x \le 2)$

6)Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми $y = xe^x, x = 1, y = 0$.

Вариант 25.

1). $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{2+5\cos x}$ 2). $\int\limits_{0}^{1} (e^x - 1)^4 e^x dx$

3). $\int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

4).Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля: $r = 2(2+\cos j\,)$

5). Вычислить длину части астроиды

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ расположенной в 1-м квадранте.

6). Фигура, ограниченная гиперболой

$x^2 - y^2 = 4$ и прямой $x = 5$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

Вариант 26.

1). $\int\limits_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$ 2). $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} tg^3 x dx$

3). $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

4). Найти площадь, ограниченную кривыми $y = 0$, $y = \ln x$, $x = e$

5). Найти длину дуги кривой $r = \sin^2 \frac{j}{2}$, расположенной во 2-ой четверти декартовой системы координат, если эту систему совместить с полярной традиционным способом.

6). Парабола $y^2 = 10x$ вращается вокруг своей оси. Найти объем параболоида вращения, отсеченного плоскостью, перпендикулярной оси вращения и отстоящей от вершины параболоида на 3 единицы.

Вариант 27.

1). $\int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$ 2). $\int\limits_{0}^{1} \ln^2(x+1)dx$

3). $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

4). Найти площадь, ограниченную кривыми $y = 0$, $y = \frac{1}{1+x^2}$.

5). Найти длину дуги кривой $r = 5\cos j$ $\quad (-\frac{p}{6} \le j \le \frac{p}{6})$.

6). Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигурой, ограниченной дугой синусоиды, соответствующей четверти периода, осью $0Y$ и прямой $y = 1$.

Вариант 28.

1). $\int\limits_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}dx$ 2). $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$

3). $\int\limits_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$

4). Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2=(4-x)^3$, $x=0$.

5). Найти длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$ от $x=\frac{p}{3}$ до $x=\frac{2p}{3}$.

6). Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной одной аркой циклоиды, вокруг ее основания. $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(t-\cos t) \end{cases}$.

Вариант 29.

1). $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 2). $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{0} e^{2x}\sin xdx$

3). $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

4). Найти площадь, ограниченную кривыми $y=x^2+4x$ и $y=x+4$.

5). Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x=\frac{t^6}{6} \\ y=2-\frac{t^4}{4} \end{cases}$ между точками пересечения с осями координат.

6). Фигура, ограниченная аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(t-\cos t) \end{cases}$ и ее основанием вращается вокруг прямой, перпендикулярной к середине основания. Найти объем получающегося тела вращения.

Вариант 30.

1). $\int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{2\cos x-1}$ 2). $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} ctg^3xdx$

3). $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctgxdx}{x^2+1}$

4). Найти площадь, ограниченную линиями $y=3-2x-x^2$ и $y=0$.

5). Найти длину всей астроиды $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$.

6). Найти объем тела вращения, получающегося от вращения локона $y=\frac{1}{1+x^2}$ вокруг своей асимптоты.