Министерство образования и науки

Российской Федерации

«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

Исследование функций и построение графиков

Методические указания и варианты курсовых заданий

Составитель: Выск Н.Д.

Москва 2014

Пособие предназначено для студентов 1 курса МАТИ, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Исследование функций». В нем рассматриваются основные приемы исследования функций с помощью методов математического анализа и способы построения их графиков. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

1. Общая схема исследования функции

Результаты, полученные при изучении различных аспектов поведения функции, позволяют сформулировать общую схему ее исследования с целью построения качественного графика, отражающего характерные особенности поведения данной функции. Для этого требуется определить:

1) область определения функции и ее поведение на границах области определения (найти соответствующие односторонние пределы или пределы на бесконечности);

2) четность и периодичность функции;

3) интервалы непрерывности и точки разрыва (указав при этом тип разрыва);

4) нули функции (т.е. значения x, при которых $f(x) = 0$) и области постоянства знака;

5) интервалы монотонности и экстремумы;

6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

7) асимптоты графика функции.

Рассмотрим каждый из этих пунктов.

2. Область определения функции и ее поведение на границах области определения

Область определения функции – это множество всех значений аргумента, при которых заданы значения функции. Отметим основные ограничения на область определения для элементарных функций:

1) знаменатель дроби не должен равняться нулю;

2) для корня четной степени подкоренное выражение должно быть неотрицательным;

3) аргумент логарифма может принимать только положительные значения;

4) аргумент тангенса не равен $\frac{p}{2}+p\,n,$ а аргумент котангенса - $p\,n.$

Пример 1.
Найдем область определения функции

$$\boldsymbol{y}=\sqrt{\log_{\boldsymbol{x}-2}\left(\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+15\right)}.$$

Требуется выполнение условия: $\log_{\boldsymbol{x}-2}\left(\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+15\right)\geq 0.$

Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, является возрастающей, а при основании, меньшем 1, - убывающей, рассмотрим каждый из этих случаев отдельно:

а) пусть $x-2>1$, тогда из логарифмического неравенства следует, что

$$\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+15\geq 1,\quad \text{или}\quad \boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+14\geq 0.$$

Решая эту систему неравенств, получаем:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}>3 \\ \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x}\leq 4-\sqrt{2} \\ \boldsymbol{x}\geq 4+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}\geq 4+\sqrt{2},$$

то есть решением системы является промежуток $\left[4+\sqrt{2};+\infty\right).$

б) если $0<x-2<1$, то для аргумента логарифма должно выполняться неравенство $\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+15\leq 1.$

Кроме того, следует учесть область допустимых значений логарифмируемого выражения: $\boldsymbol{x}^2-8\boldsymbol{x}+15>0.$

Найдем решение системы трех неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x-2 < 3 \\ x^2-8x+15 \le 1 \\ x^2-8x+15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ 4-\sqrt{2} \le x \le 4+\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-\sqrt{2} \le x < 3.$$

Получаем еще один промежуток: $\left[4-\sqrt{2};3\right)$. Объединение промежутков, найденных в пунктах а) и б), является областью определения исследуемой функции.

Ответ: $\left[4-\sqrt{2};3\right) \cup \left[4+\sqrt{2};+\infty\right)$.

Важная часть ответа на первый вопрос - изучение поведения функции на границах области определения. Для этого нужно найти односторонние пределы рассматриваемой функции на каждой границе каждого интервала области определения.

Пример 2.

Найдем область определения и поведение на ее границах функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Ограничения на область определения имеют вид: $x^2-1 \ne 0,\ x \ne \pm 1$, следовательно, область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Найдем пределы на их границах.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1; \quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty; \quad \lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty; \quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty.$$

Заметим, что подробный ответ на первый вопрос фактически содержит ответы на второй и отчасти на седьмой вопросы. Действительно, если в область определения не входят отдельно расположенные точки и найдены односторонние пределы функции в этих точках, то тем самым указан характер разрывов. В частности, если какой-либо из этих односторонних пределов бесконечен, через точку разрыва (или через соответствующую границу области определения) проходит вертикальная асимптота. Если область определения функции не ограничена слева или справа и на бесконечности соответствующего знака существует конечный предел функции, то график имеет на указанном конце оси *Ox* горизонтальную асимптоту. Например, для рассматриваемой функции точки ± 1 являются точками разрыва 2-го рода, функция имеет две вертикальные асимптоты, уравнения которых $x = \pm 1$, и горизонтальную асимптоту $y = 1$ при $x \to \pm\infty$.

3. Четность и периодичность функции

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если:

1) область ее определения симметрична относительно нуля;

2) $f(-x) = f(x)$ для любого *x*, принадлежащего области определения.
График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если:

1) область ее определения симметрична относительно нуля;

2) $f(-x) = -f(x)$ для любого *x*, принадлежащего области определения.

График четной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 3.

Докажем, что функция $f(x) = \lg\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ является нечетной. Во-первых, логарифмируемое выражение всегда положительно. Действительно, подкоренное выражение не меньше 1, при отрицательных *x* аргумент логарифма является суммой двух положительных чисел, при $x = 0$ $f(x) = \lg 1 = 0$, а при положительных *x*

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0.$$

Отсюда следует, что область определения функции: $(-\infty; +\infty)$, то есть симметрична относительно нуля.

Проверим выполнение второго условия: при смене знака аргумента функция должна тоже поменять знак.

$$f(-x)=\lg\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)=$$

$$=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lg\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lg\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-1}=-\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-f(x).$$

Утверждение о нечетности функции доказано.

Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число T, не равное нулю, что для любого x, принадлежащего области определения, $f(x+T) = f(x)$.

4. Интервалы непрерывности и точки разрыва

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Из этого определения следует, во-первых, что функция определена при $x = x_0$, и во-вторых, что при $x\to x_0$ существует конечный предел функции.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке [*ab*],** если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (при этом $f(a)$ и $f(b)$ равны соответствующим односторонним пределам).

Как известно, все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения, поэтому интервалы непрерывности функции чаще всего совпадают с областью ее определения.

Пример 4.

Функция, рассмотренная в примере 2, непрерывна на интервалах $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$.

Классификация точек разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой этой точки. Тогда x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если функция либо не определена при $x = x_0$, либо не является непрерывной в точке x_0.

1) Если существует конечный предел $f(x)$ при $x\to x_0$, но не равный $f(x_0)$, точка разрыва x_0 называется **устранимой особенностью**. Термин «устранимая особенность» связан с тем, что, доопределив функцию в точке разрыва значением ее предела в этой точке, мы сделаем ее непрерывной при $x = x_0$, то есть устраним разрыв в рассматриваемой точке.

2) Если существуют конечные, не равные друг другу односторонние пределы $f(x)$ при $x \to x_0$, точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**.

3) Все остальные точки разрыва называются **точками разрыва 2-го рода**.

Пример 5.

Найдем количество точек разрыва функции $y = \dfrac{2x-3}{\log_2|x|}$ и исследуем характер этих точек.

Данная функция не существует при трех значениях аргумента: $x = 0$ и $x = \pm 1$ (в первом случае знаменатель не существует, во втором он равен нулю). Каждая из найденных точек является внутренней точкой области определения и, следовательно, точкой разрыва.

Исследуем характер точек разрыва:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-3}{\log_2|x|} = \lim\limits_{x\to 0}(2x-3)\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2|x|} = -3\cdot 0 = 0.$

Следовательно, $x = 0$ – устранимая особенность.

2) При $x \to \pm 1$ $|x| \to 1 \Rightarrow \log_2|x| \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2|x|} \Rightarrow \infty.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to \pm 1} \dfrac{2x-3}{\log_2|x|} = \infty$, и $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода.

5. Нули функции и области постоянства знака

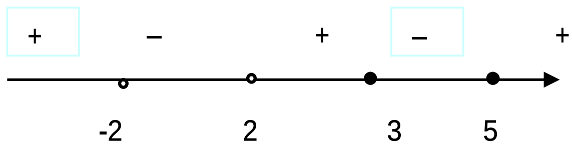
Для поиска нулей (корней) функции требуется решить уравнение $f(x) = 0$, а для определения областей постоянства знака - неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Пример 6.

Найдем нули функции $y = \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-4}$ и области постоянства ее знака.

$$\frac{x^2-8x+15}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2-8x+15 = 0,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5 \quad -$$

найдены нули функции. Исследуем ее знак, применяя метод интервалов. Корни знаменателя: $x = \pm 2$. При $x = 0$ функция принимает отрицательное значение, следовательно, знаки функции на интервалах, разделенных корнями числителя и знаменателя, распределяются так:



Следовательно, $f(x) = 0$ при $x = 3$ и $x = 5$, $f(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -2) \cup (2;3] \cup [5;+\infty)$, $f(x) < 0$ на $(-2;2) \cup [3;5]$.

6. Интервалы монотонности и экстремумы

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[ab]$, если

$$\forall x_1, x_2 \in [ab] \quad \text{таких, что} \quad x_1 < x_2, \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Если неравенства между значениями функции строгие, то функция называется строго монотонной (возрастающей или убывающей соответственно).

Функция $f(x)$, дифференцируемая на $[ab]$, возрастает на этом отрезке если и только если $f'(x) \ge 0$ на $[ab]$. Функция $f(x)$ убывает на $[ab]$ если и только если $f'(x) \le 0$ на $[ab]$. Если производная функции строго больше(меньше) нуля, то функция будет строго возрастающей (убывающей).

Необходимое условие экстремума: пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка x_0 называется **критической точкой** функции. Таким образом, все точки экстремума находятся в множестве критических точек функции.

Достаточные условия экстремума

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума;
2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума;
3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0, эта точка не является точкой экстремума.

2. Пусть $f'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

3. Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1,2,\ldots, n-1$, а $f^{(n)}(x_0)$ не равна нулю. Тогда, если n – четное число ($n = 2m$), функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же n – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка x_0 не является точкой экстремума.

Пример 7.

Найдем интервалы возрастания функции $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

Найдем производную и исследуем ее знак.

$$y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}. \quad y' > 0 \quad \text{при} \quad x > 0 \Rightarrow$$

с учетом области определения интервалы возрастания: $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

Пример 8.

Найти точку минимума функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$.

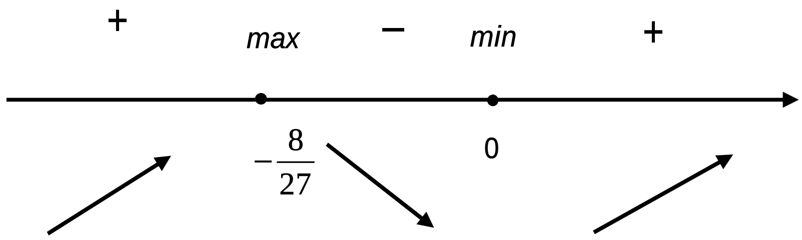
Область определения функции: $(-\infty,+\infty)$.

$$y' = 1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x}+2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

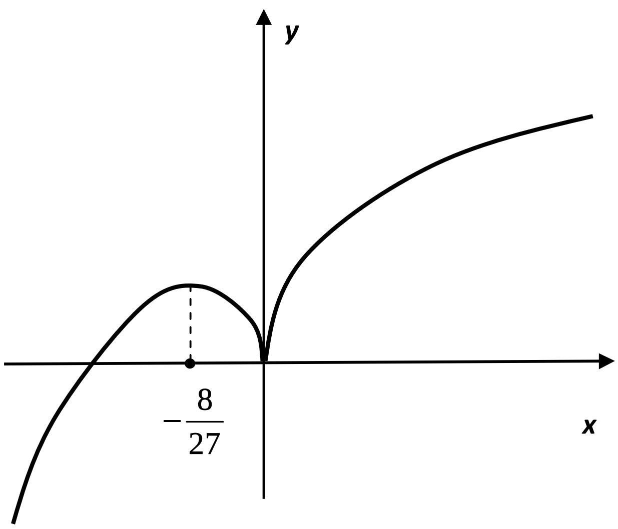
Функция имеет две критические точки:

$x = -\dfrac{8}{27}$, где $y' = 0$, и $x = 0$, где y' не существует.

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:



При этом график функции имеет вид:



Следовательно, точка минимума: $x = 0$.

Пример 9.

Исследуем на экстремум функцию $y = x^5 + x^3$.

$y' = 5x^4 + 3x^2 = x^2\left(5x^2 + 3\right) = 0$ при $x = 0$.

При этом $y'' = 20x^3 + 6x = 0$ при $x = 0$, $y''' = 60x^2 + 6 \neq 0$ при $x = 0$. Порядок первой ненулевой производной в точке $x = 0$ равен нечетному числу 3, следовательно, по теореме 5 функция не имеет экстремума в этой точке, а так как критическая точка единственна, функция вообще не имеет экстремумов.

7. Интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба

Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале (ab), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале (ab), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (ab), то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (ab), то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале.

Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.
Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

Необходимое условие точки перегиба: если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.
Достаточное условие точек перегиба: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то x_0 – точка перегиба.
Пример 10.
Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции

$$x^3 - 6x^2 + x - 12.$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 1, \quad y'' = 6x - 12, \quad y'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 2,$$

$$y'' < 0 \quad \text{при} \quad x < 2, \quad y'' > 0 \quad \text{при} \quad x > 2.$$

Таким образом, график функции является вогнутым при $x < 2$, выпуклым при $x > 2$, а $x = 2$ – точка его перегиба.

8. Асимптоты

Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменой точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

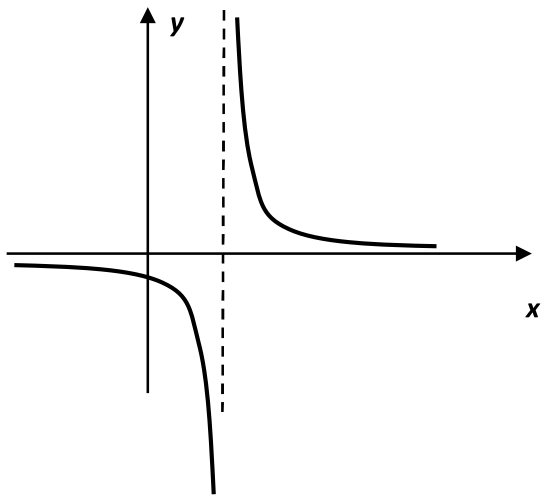
Рассмотрим три вида асимптот и определим способы их нахождения.

1. Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен.

Пример 11.
Вертикальной асимптотой графика функции

$$y = \frac{1}{x-1}$$

является прямая $x = 1$.

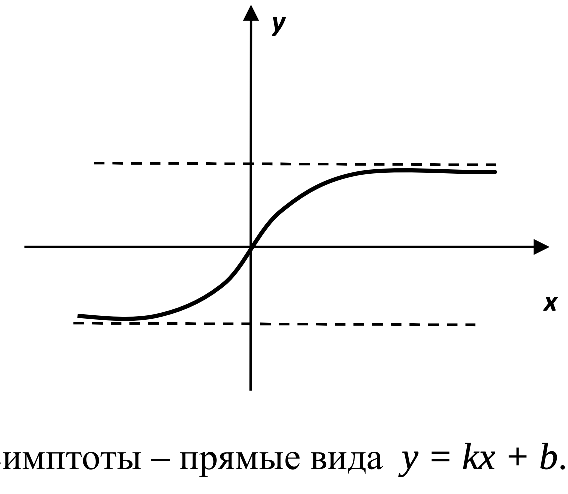


2. Горизонтальные асимптоты – прямые вида $y = a$. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ конечен, т.е.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a.$$

Пример 12.
Горизонтальными асимптотами функции y = arctg x являются

$$y = \frac{p}{2} \quad (\text{при} \quad x \to +\infty) \quad u \quad y = -\frac{p}{2} \quad (\text{при} \quad x \to -\infty).$$



3. Наклонные асимптоты – прямые вида $y = kx + b$. Найдем k и b. Поскольку

$$\textit{при} \quad x \to \infty \quad f(x) \approx kx + b, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

если этот предел существует, конечен и не равен нулю. Однако даже при выполнении этих условий наклонная асимптота может не существовать. Для ее существования требуется, чтобы имелся конечный предел при $x \to \infty$ разности $f(x) - kx$. Этот предел будет равен b, так как

$$\boldsymbol{при} \quad \boldsymbol{x \to \infty} \quad \boldsymbol{f(x) - kx \approx b}.$$

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Пример 13.

Функция $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 1$, то есть $x = 1$ – вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, поэтому горизонтальных асимптот график не имеет. Проверим наличие наклонных асимптот. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1 = k.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 = b.$

Заметим, что оба предела не зависят от знака бесконечности, поэтому прямая $y = x + 1$ является асимптотой графика на обоих концах оси Ox.

Пример 14.

Найдем функцию, имеющую две вертикальные асимптоты: $x = -2$ и $x = 1$ и наклонную асимптоту $y = x - 3$ при $x \to \pm\infty$.

Очевидно, что этим условиям будет удовлетворять функция

$$y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + x - 3 = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + x - 3 = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^2+x-2}.$$

9. Примеры полного исследования функции и построения графика в декартовых и полярных координатах

Применим полученную информацию для исследования конкретной функции. При проведении исследования советуем вам рисовать предварительные эскизы графика, а затем уточнять его вид после получения очередных данных.

Пример 15.

Исследуем функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построим ее график.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Поведение на границах:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty.$$

2.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x-1}\neq\pm f(x),$$

следовательно, функция не является четной или нечетной (в этом случае говорят, что рассматриваемая функция общего типа). Функция не является периодической, так как периодическая функция, не равная константе, не может иметь предела на бесконечности.

3. Так как функция является элементарной, она непрерывна во всей области определения, т.е. промежутки непрерывности $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Из ответа на первый вопрос следует, что $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода (так как односторонние пределы в этой точке бесконечны).

4. $f(x)\neq 0$ ни при каких значениях x (следовательно, график функции не пересекает ось Ox). $f(x) < 0$ при $x < 1$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

5. Для ответа на этот вопрос найдем производную данной функции.

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=0 \quad \text{при} \quad x=1\pm\sqrt{2}.$$

$$f'(x)<0 \quad \text{при} \quad x\in(1-\sqrt{2};1)\cup(1;1+\sqrt{2})\,-$$

интервалы убывания функции;

$$f'(x)>0 \quad \text{при} \quad x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\in(1+\sqrt{2};+\infty)\,-$$

интервалы возрастания функции. При $x=1-\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x=1-\sqrt{2}$ - точка максимума. При $x=1+\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x=1+\sqrt{2}$ - точка минимума.

6. $$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}\neq 0$$

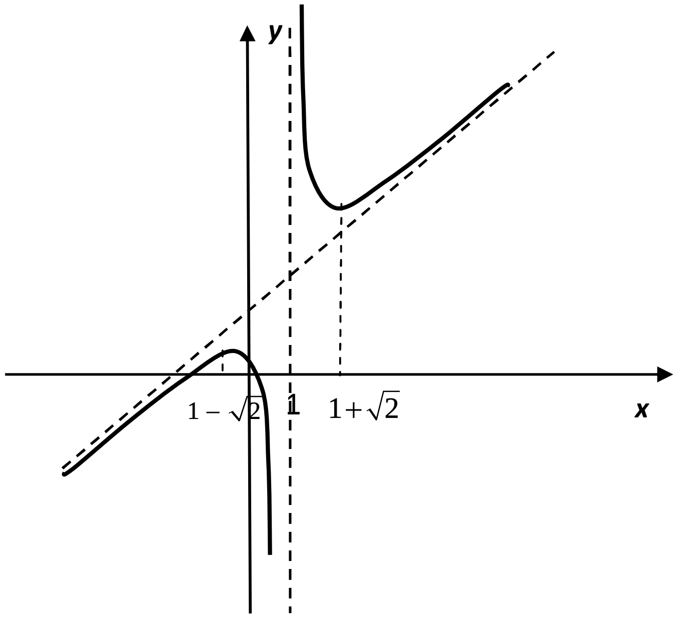
ни при каких значениях x. Следовательно, функция не имеет точек перегиба.

$$f''(x)<0 \quad \text{при} \quad x<1, \qquad f''(x)>0 \quad \text{при} \quad x>1,$$

поэтому на интервале $(-\infty;1)$ функция вогнута, а на интервале $(1;+\infty)$ - выпукла.

7. При ответе на первый вопрос показано, что $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции. Там же выяснено, что при $x\to\infty$ функция не имеет конечного предела, следовательно, не имеет и горизонтальных асимптот. Наклонная асимптота $y = x + 1$ найдена в примере 12.

Построим график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ на основе результатов проведенного исследования.



Обычно графики функций, заданных в полярной системе координат, строят по точкам, не проводя полного исследования, подобного тому, которое проводится в декартовой системе координат.

Напомним определение полярных координат: координатная система состоит из точки O (полюса) и выходящего из него луча (полярной оси). Координатами точки M в этой системе являются длина отрезка MO – полярный радиус r и угол φ между MO и полярной осью: $M(r,\varphi)$.Связь между полярными и декартовыми координатами точки M можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью. Тогда $x=r\cos\varphi$, $y= r\sin\varphi$.

Отсюда $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$.

Пример 16.

Построим в полярных координатах график функции $r=\cos 3\varphi$. Областью определения функции будут значения φ от $-\pi$ до π, при которых $\cos 3\varphi\geq 0$.

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},$$

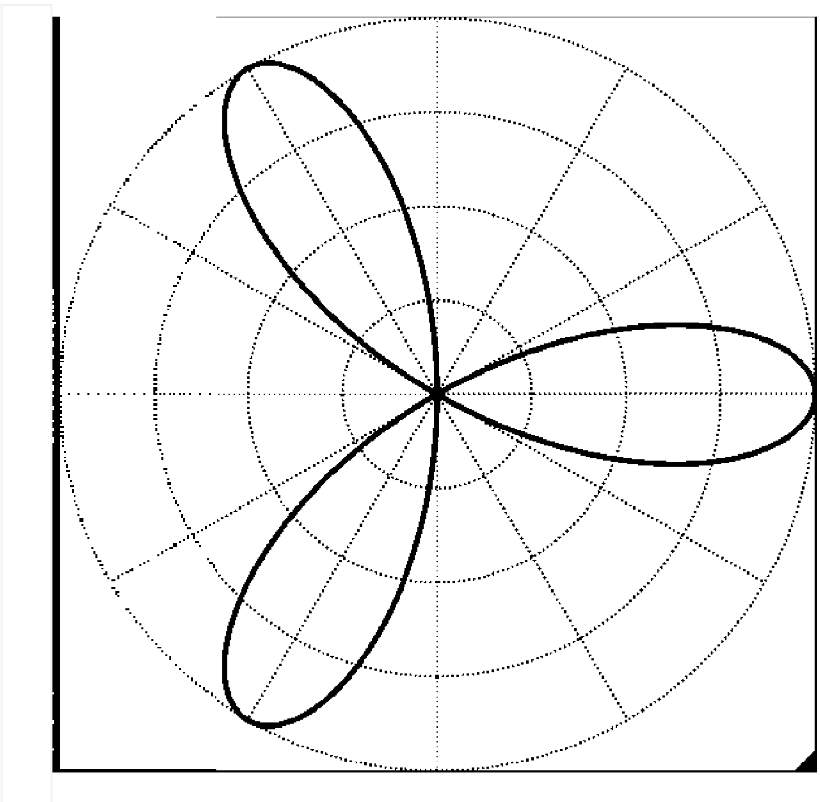
$$\varphi\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right].$$

Таким образом, график будет состоять из трех ветвей, причем в силу периодичности косинуса форма каждой ветви будет одинаковой, поэтому достаточно построить по точкам одну из них, например, на промежутке

$\left[-\frac{p}{6};\frac{p}{6}\right]$. Кроме того, косинус - четная функция, поэтому эта ветвь графика будет симметричной относительно полярной оси. Поэтому найдем точки графика на промежутке $\left[0;\frac{p}{6}\right]$.

φ	ρ
0	1
$\frac{p}{18}$	0,9
$\frac{p}{12}$	0,7
$\frac{p}{9}$	0,5
$\frac{p}{6}$	0

Построим по найденным точкам половину первой ветви графика, отразим ее от полярной оси и построим остальные две ветви.



Пример 17.

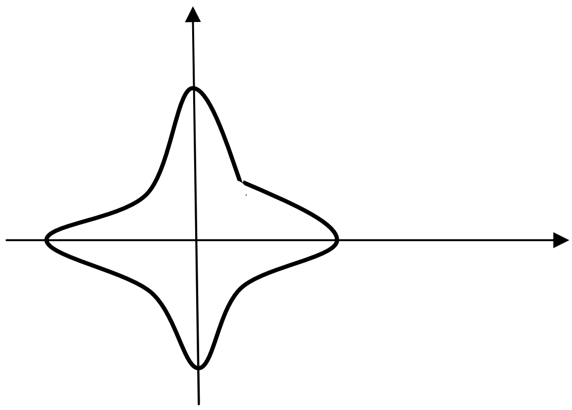
Для построения линии, заданной уравнением $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$, удобно перейти к полярным координатам.

$$r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi = r^2, \quad r^2\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = 1,$$

$$\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4\varphi) = \frac{3 + \cos 4\varphi}{4},$$

$$r = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = \frac{4}{3 + \cos 4\varphi}.$$

Эта функция определена при любом φ, ее график симметричен относительно обеих координатных осей, при $\varphi = 0$ $r = 1$, при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $r = \frac{1}{2}$, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $r = 1$. Исходя из этого, построим качественный график.



10. Наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[ab]$. Тогда она непрерывна на нем, и по свойству функции, непрерывной на отрезке, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если $f(x)$ имеет на $[ab]$ конечное число критических точек, то ее наибольшее значение будет либо одним из ее максимумов (а именно, наибольшим максимумом), либо будет достигаться в одной из конечных точек отрезка. То же можно сказать и о наименьшем значении. Из сказанного следует, что поиск наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке можно проводить по следующей схеме:

1) найти критические точки функции, принадлежащие данному отрезку;
2) вычислить значения функции в точках a и b, а также в найденных критических точках. Наименьшее из полученных чисел будет наименьшим значением функции на данном отрезке, а наибольшее – ее наибольшим значением на нем.

Пример 18.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 15$ на отрезке [-4, 4]. $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0$ при $x = -3$ и $x = 1$. При этом обе найденные критические точки принадлежат данному отрезку. Вычислим значения функции при $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$ и $x = 4$.

x	-4	-3	1	4
y	5	12	**-20**	**61**

Таким образом, наибольшее значение функции на рассматриваемом отрезке равно 61 и принимается на его правой границе, а наименьшее равно –20 и достигается в точке минимума внутри отрезка.

Варианты заданий для курсовой работы содержат 13 задач. В задаче 1 требуется найти наибольшее и наименьшее значение данной функции на заданном отрезке. В задаче 2 нужно простроить качественный график функции **только** по результатам пунктов 1-4 схемы исследования. В задаче 3 требуется найти интервалы монотонности и экстремумы функции, в задаче 4 - интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба, в задаче 5 - асимптоты, в задаче 6 - исследовать поведение функции в окрестности заданной точки с помощью производных высших порядков. В задачах 7-11 нужно провести полное исследование функции и построить ее график в декартовых координатах, в задаче 12 - построить график в полярных координатах.

Варианты заданий

Вариант 1

1. $y = 2\sqrt{x-3} - x + 5, \quad [3;7]$

2. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

3. $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 8$

4. $y = \dfrac{\sqrt{e}}{x} \ln \dfrac{x}{\sqrt{e}}$

5. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

6. $y = \sin^2(x+3) + 2 - 6x - x^2, \quad x_0 = -3$

7. $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x-2}$ 8. $y=(x+3)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y=\dfrac{1}{e^{2x}-2}$

10. $y=\ln\left(5x^2-2x-2\right)$ 11. $y=3x-4\operatorname{arctg}3x$ 12. $r=1+\cos 2j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=x+2$ при $x\to+\infty$ и $y=-x+2$ при $x\to-\infty$.

Вариант 2

1. $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$, $[0;4]$ 2. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

3. $y=(x+2)^2(x-2)^2$ 4. $y=x^2+\cos 2x$

5. $y=x\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}$ 6. $y=x^2-6x-(x-3)\ln(x-2)$, $x_0=3$

7. $y=\dfrac{x^3}{x-2}$ 8. $y=\sqrt[5]{(x+3)^2}$ 9. $y=e^{\frac{1}{x-5}}$

10. $y=x-2\ln x$ 11. $y=x+\sin x$ 12. $r=\cos 3j$

13. Привести пример функции, имеющей точку перегиба, в которой производная 2-го порядка не существует.

Вариант 3

1. $y=\sqrt{25-x^2}$, $[-3;4]$ 2. $y=(x+3)^2(x-1)^2$

3. $y=\left(x^2-3\right)e^x$ 4. $y=\ln\left(16+x^2\right)$

5. $y=\dfrac{x^3-x+5}{x^2-2x-3}$ 6. $y=e^{x^3}-1-x^3$, $x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-2}$ 8. $y=\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-3}$ 9. $y=\dfrac{e^{x-2}}{x-2}$

10. $y = 2\ln\dfrac{x+1}{x} - 4$ 11. $y = \cos x - \ln\cos x$ 12. $\left(x^2 + y^2 - x\right)^2 = x^2 + y^2$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y = x + 2$ при $x \to +\infty$ и $y = x - 2$ при $x \to -\infty$.

Вариант 4

1. $y = 7 + 2x - x^2 - \dfrac{16}{x-1}$, $[2;5]$ 2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

3. $y = 2x^2 - \ln x$ 4. $y = x\sqrt{3 - 2x^2}$

5. $y = \dfrac{1}{\ln x - 3}$ 6. $y = \sin^6 x$, $x_0 = 0$

7. $y = \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^2$ 8. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$ 9. $y = \left(x^2 - 3\right)e^x$

10. $y = \ln x - \ln(x+1) + 3$ 11. $y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$ 12. $r = 2\operatorname{tg} j$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x = -3$ и $y = x + 2$ при $x \to \pm\infty$.

Вариант 5

1. $y = \sin 2x - x$, $\left[0; \dfrac{p}{4}\right]$ 2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9x + 8}$

3. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$ 4. $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5x - 7$

5. $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 6. $y = x - \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$

7. $y = 2x^2\left(x^2 - 1\right)^3$ 8. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-3)^2}$ 9. $y = (x+3)e^{-x}$

10. $y = x + \dfrac{2\ln x}{x}$ 11. $y = e^x \cdot \cos x$ 12. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2 y^2$

13. Нарисовать график функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$, если $f'(a) < 0,\ f''(a) < 0.$

Вариант 6

1. $y = 2\sqrt{x+4} - x - 2,\quad [-4;0]$ 2. $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$

3. $y = 2x^3 + 18x^2 + 48x - 5$ 4. $y = (x-2)e^{-x}$

5. $y = \dfrac{\ln(x^2 + 10x + 21)}{x}$ 6. $y = \sin^2(x-2) + 4x - x^2,\quad x_0 = 2$

7. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+1}$ 8. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y = \dfrac{x+1}{e^x}$

10. $y = \ln\left(x^2 - x - 2\right)$ 11. $y = x + 2\,\mathrm{arctg}\,3x$ 12. $r = 1 - \sin 3j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y = 2x + 1$ при $x \to +\infty$ и $y = -2x + 1$ при $x \to -\infty$.

Вариант 7

1. $y = \dfrac{7x}{4 + x^2},\quad [0;5]$ 2. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

3. $y = (x+3)^2 (x-1)^2$ 4. $y = x^2 - 4\sin x$

5. $y = x\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$ 6. $y = x^2 + 6x - (x+3)\ln(x+4),\quad x_0 = -3$

7. $y=\dfrac{x^3-1}{x+2}$ 8. $y=\sqrt[5]{(x-2)^4}$ 9. $y=e^{\frac{1}{x+3}}$

10. $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 11. $y=x+\cos x$ 12. $r=\sin 2j$

13. Привести пример функции, имеющей точку минимума, в которой производная 1-го порядка не существует.

Вариант 8

1. $y=\sqrt{169-x^2}$, $[-12;5]$ 2. $y=x^2(x-2)^2$

3. $y=(x^2+15)e^{-x}$ 4. $y=\ln(25+x^2)$

5. $y=\dfrac{x^3-x+1}{x^2+x-6}$ 6. $y=e^{\operatorname{tg} x}-e^x$, $x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$ 8. $y=\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x}$ 9. $y=\dfrac{e^{x+4}}{x+4}$

10. $y=\ln\dfrac{x+4}{x-2}-5$ 11. $y=\sin x-\ln\sin x$ 12. $(x^2+y^2-2y)^2=x^2+y^2$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=x+3$ при $x\to+\infty$ и $y=x-3$ при $x\to-\infty$.

Вариант 9

1. $y=x^2-2x-3-\dfrac{8}{x-2}$, $[-2;1]$ 2. $y=\dfrac{x^2-9}{x}$

3. $y=x^2-2\ln x$ 4. $y=x\sqrt{2-5x^2}$

5. $y=\dfrac{1}{\ln x-2}$ 6. $y=\sin^4 x$, $x_0=0$

7. $y=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$ 8. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$ 9. $y=\left(x^2+4\right)e^{-x}$

10. $y=\ln x-\ln\left(2x+1\right)+2$ 11. $y=5\sin 2x+2\cos 5x$ 12. $r=\mathrm{tg}2j$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x=-5$ и $y=x+3$ при $x\to\pm\infty$.

Вариант 10

1. $y=\sin 2x+x,\quad \left[\dfrac{p}{4};\dfrac{p}{2}\right]$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-x-6}$

3. $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$ 4. $y=x^4-10x^3+24x^2-3x+11$

5. $y=\sqrt{x^2+x-12}$ 6. $y=e^{\mathrm{tg}\,x}-e^x,\quad x_0=0$

7. $y=x^2\left(x^2-4\right)^3$ 8. $y=\sqrt[3]{\left(x+1\right)\left(x-5\right)^2}$ 9. $y=\left(2x-1\right)e^{3x}$

10. $y=3x+\dfrac{\ln x}{x}$ 11. $y=e^{-x}\cdot\cos x$ 12. $\left(x^2+y^2\right)^3=36x^2y^2$

13. Нарисовать график функции $y=f\left(x\right)$ в окрестности точки x = a, если $f'\left(a\right)>0,\ f''\left(a\right)=0.$

Вариант 11

1. $y=2\sqrt{x-5}-x+1,\quad \left[5;9\right]$ 2. $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$

3. $y=x^4-8x^2+2$ 4. $y=\left(x+3\right)e^{2x}$

5. $y=\dfrac{\ln(x^2+5x+6)}{x}$ 6. $y=\sin^2\left(x+5\right)+8-10x-x^2,\quad x_0=-5$

7. $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x-1}$ 8. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-3)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y=\dfrac{e^x}{x-3}$

10. $y=\ln\left(x^2-2x-3\right)$ 11. $y=2x-\operatorname{arctg}x$ 12. $r=2+\cos j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=x-3$ при $x\to+\infty$ и $y=-x-3$ при $x\to-\infty$.

Вариант 12

1. $y=\dfrac{5x}{9+x^2}$, $[-5;-1]$ 2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

3. $y=(x+1)^2(x-4)^2$ 4. $y=x^2-\sin 2x$

5. $y=\dfrac{x^3-6x+2}{x^2-4x+3}$ 6. $y=x^2+8x-3-(x+4)\ln(x+5)$, $x_0=-4$

7. $y=\dfrac{x^3-x}{x-4}$ 8. $y=\sqrt[5]{(x-1)^2}$ 9. $y=e^{\frac{1}{x-2}}$

10. $y=x^2-2\ln x$ 11. $y=x\cdot\sin x$ 12. $r=\sin 4j$

13. Привести пример функции, имеющей точку максимума, в которой производная 1-го порядка не существует.

Вариант 13

1. $y=\sqrt{289-x^2}$, $[-8;15]$ 2. $y=(x+4)^2(x-3)^2$

3. $y=\left(x^2-8\right)e^x$ 4. $y=\ln\left(18+2x^2\right)$

5. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$ 6. $y=e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1$, $x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$ 8. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-5}$ 9. $y=\dfrac{e^{2x-3}}{2x-3}$

10. $y=3\ln\dfrac{x}{x-2}+1$ 11. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ 12. $\left(x^2+y^2-2x\right)^2=x^2+y^2$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=2x+1$ при $x\to+\infty$ и $y=2x-1$ при $x\to-\infty$.

Вариант 14

1. $y=3-4x-x^2-\dfrac{16}{x+2}$, $[-1;5]$ 2. $y=\dfrac{x^2-1}{2x}$

3. $y=18x^2-\ln x$ 4. $y=x\sqrt{1-4x^2}$

5. $y=\dfrac{1}{3\ln x-2}$ 6. $y=\cos^6 x$, $x_0=\dfrac{p}{2}$

7. $y=\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^2$ 8. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ 9. $y=\left(x^2-8\right)e^x$

10. $y=\ln(x+1)-\ln\left(2x+1\right)+4$ 11. $y=3\sin 2x+2\cos 3x$ 12. $r=1+\operatorname{tg} j$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x=-2$ и $y=x+5$ при $x\to\pm\infty$.

Вариант 15

1. $y=\cos 2x-x$, $\left[0;\dfrac{p}{4}\right]$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$

3. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x+2}$ 4. $y=x^4-2x^3-12x^2+8x+9$

5. $y=\sqrt{x^2-6x+8}$ 6. $y=\sin x-\operatorname{tg} x$, $x_0=0$

7. $y=\left(x^2-9\right)^3$ 8. $y=\sqrt[3]{x(x-4)^2}$ 9. $y=(x-5)e^{-2x}$

10. $y=3x-\frac{2\ln x}{x}$ 11. $y=e^x\cdot\sin x$ 12. $\left(x^2+y^2\right)x=4y$

13. Нарисовать график функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x = a$, если $f'(a)>0$, $f''(a)<0$.

Вариант 16

1. $y=2\sqrt{x-7}-x-3$, $[7;16]$ 2. $y=\frac{x-3}{x^2-1}$

3. $y=x^3-x^2-56x-7$ 4. $y=(2x-5)e^{-x}$

5. $y=\frac{\ln(x^2-x-2)}{x}$ 6. $y=\sin^2(x-4)+7+8x-x^2$, $x_0=4$

7. $y=\frac{x^2-x-2}{x-3}$ 8. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-4)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y=\frac{1}{e^x-5}$

10. $y=\ln\left(x^2-3x+2\right)$ 11. $y=x+\operatorname{arcctg}2x$ 12. $r=2-\sin 2j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=2x-3$ при $x\to+\infty$ и $y=-2x-3$ при $x\to-\infty$.

Вариант 17

1. $y=\frac{7x}{25+x^2}$, $[-6;-2]$ 2. $y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$

3. $y=(x+4)^2(x-3)^2$ 4. $y=x^2+2\sin x$

5. $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ 6. $y=4x-x^2-2\ln x$, $x_0=1$

7. $y=\dfrac{x^3+2x^2}{x-3}$ 8. $y=\sqrt[5]{(x+2)^4}$ 9. $y=e^{\frac{1}{x+4}}$

10. $y=\ln x-3x$ 11. $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 12. $r=\cos 2j$

13. Привести пример функции, у которой критическая точка не является точкой экстремума.

Вариант 18

1. $y=\sqrt{100-x^2}$, $[-8;6]$ 2. $y=x^2(x+3)^2$

3. $y=(x^2+24)e^{-x}$ 4. $y=\ln(8+2x^2)$

5. $y=\dfrac{x^3-7}{x^2-5x+4}$ 6. $y=\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^4$, $x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4x+4}$ 8. $y=\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-2}$ 9. $y=\dfrac{e^{3x+2}}{3x+2}$

10. $y=\ln\dfrac{x}{x-5}+4$ 11. $y=2x-\arcsin x$ 12. $(x^2+y^2-y)^2=4(x^2+y^2)$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=x-1$ при $x\to+\infty$ и $y=x+1$ при $x\to-\infty$.

Вариант 19

1. $y=1+2x-x^2-\dfrac{2}{x-1}$, $[2;6]$ 2. $y=\dfrac{x^2-16}{x}$

3. $y=x^2-\dfrac{1}{18}\ln x$ 4. $y=x\sqrt{3-5x^2}$

5. $y=\dfrac{1}{2\ln x-6}$ 6. $y=\cos^4 x$, $x_0=-\dfrac{p}{2}$

7. $y=\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^2$ 8. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-7}}$ 9. $y=\left(x^2+8\right)e^{-x}$

10. $y=\ln(2x)-\ln\left(x+1\right)-5$ 11. $y=3\sin 4x+4\cos 3x$ 12. $r=1+\mathrm{tg}2j$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x=1$ и $y=2x+3$ при $x\to\pm\infty$.

Вариант 20

1. $y=\cos 2x+x,\quad \left[-\dfrac{p}{4};0\right]$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-x-6}$

3. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}$ 4. $y=x^4+12x^3+48x^2-13x+1$

5. $y=\sqrt{x^2+6x+5}$ 6. $y=x-\mathrm{tg}\,x,\quad x_0=0$

7. $y=\dfrac{\left(x-2\right)^2}{\left(x+2\right)^3}$ 8. $y=\sqrt[3]{\left(x+3\right)x^2}$ 9. $y=\left(2x+3\right)e^x$

10. $y=4x-\dfrac{\ln x}{x}$ 11. $y=e^{-x}\cdot\sin x$ 12. $\left(x^2+y^2\right)x=9y$

13. Нарисовать график функции $y=f\left(x\right)$ в окрестности точки $x = a$, если $f'\left(a\right)>0,\ f''\left(a\right)>0.$

Вариант 21

1. $y=2\sqrt{x+1}-x+8,\quad [-1;8]$ 2. $y=\dfrac{x}{x^2-x-2}$

3. $y=x^4-4x^2+2$ 4. $y=\dfrac{e^2}{x}\ln\dfrac{x}{e^2}$

5. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$ 6. $y = \sin^2(x-1) + x - x^2, \quad x_0 = 1$

7. $y = \dfrac{x^2 + x + 6}{x - 4}$ 8. $y = (x+4)^{\frac{2}{3}} + (x-3)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y = \dfrac{e^x}{x+2}$

10. $y = \ln\left(x^2 - 3x - 4\right)$ 11. $y = 3x - \operatorname{arctg} 2x$ 12. $r = 1 + 2\cos j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y = -x + 1$ при $x \to +\infty$ и $y = x + 1$ при $x \to -\infty$.

Вариант 22

1. $y = \dfrac{5x}{36 + x^2}, \quad [0;10]$ 2. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

3. $y = (x+1)^2 (x-4)^2$ 4. $y = x^2 - \cos 2x$

5. $y = x\sqrt{\dfrac{x-7}{x}}$ 6. $y = 2x - x^2 - 2\ln(x+1), \quad x_0 = 0$

7. $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x - 3}$ 8. $y = \sqrt[5]{(x-2)^4}$ 9. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$

10. $y = \dfrac{x-3}{\ln x}$ 11. $y = x \cdot \cos x$ 12. $r = \sin 3j$

13. Привести пример функции, не имеющей в точке x = 3 ни первой, ни второй производной.

Вариант 23

1. $y = \sqrt{400 - x^2}, \quad [-12;16]$ 2. $y = (x-1)^2 (x+1)^2$

3. $y = \left(2x^2 - 1\right)e^x$ 4. $y = \ln\left(9 + x^2\right)$

5. $y=\dfrac{x^3-5x}{x^2-3x-4}$ 6. $y=6\sin x-6x+x^3, \quad x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-8}$ 8. $y=\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x-3}$ 9. $y=\dfrac{e^{2x-1}}{2x-1}$

10. $y=2\ln\dfrac{x+1}{x}-3$ 11. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$ 12. $\left(x^2+y^2-x\right)^2=4(x^2+y^2)$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=3x+2$ при $x\to+\infty$ и $y=3x-2$ при $x\to-\infty$.

Вариант 24

1. $y=x^2+6x-3+\dfrac{16}{x+3}, \quad [-2;3]$ 2. $y=\dfrac{2x^2-9}{x}$

3. $y=x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$ 4. $y=x\sqrt{7-4x^2}$

5. $y=\dfrac{1}{3\ln x+5}$ 6. $y=\sin^8 x, \quad x_0=0$

7. $y=\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^2$ 8. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ 9. $y=\left(x^2-12\right)e^x$

10. $y=\ln x-\ln(3x-2)+4$ 11. $y=3\sin 4x-4\cos 3x$ 12. $r=2(1+\operatorname{tg} j)$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x=3$ и $y=x-5$ при $x\to\pm\infty$.

Вариант 25

1. $y=\sin x-\dfrac{1}{2}x, \quad \left[0;\dfrac{p}{2}\right]$ 2. $y=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$

3. $y=\dfrac{x^2-9x+18}{x+1}$ 4. $y=x^4-10x^3-36x^2+x+22$

5. $y=\sqrt{x^2+x-20}$ 6. $y=x-\arcsin x,\quad x_0=0$

7. $y=\dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$ 8. $y=\sqrt[3]{(x+5)(x-1)^2}$ 9. $y=(4x+7)e^{-x}$

10. $y=2x-\dfrac{5\ln x}{x}$ 11. $y=e^{|x|}\cdot\cos x$ 12. $\left(x^2+y^2\right)^3=16x^2y^2$

13. Нарисовать график функции $y=f(x)$ в окрестности точки x = a, если $f'(a)<0,\ f''(a)=0.$

Вариант 26

1. $y=2\sqrt{x-8}-x-12,\quad [8;12]$ 2. $y=\dfrac{x}{x^2-16}$

3. $y=4+39x+2x^2-x^3$ 4. $y=(x-4)e^{3x}$

5. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 6. $y=\sin^2 x-x^2-5,\quad x_0=0$

7. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+3}$ 8. $y=(x+5)^{\frac{2}{3}}-(x-3)^{\frac{2}{3}}$ 9. $y=\dfrac{1}{e^{3x}-4}$

10. $y=\ln\left(x^2-x-6\right)$ 11. $y=2x+3\operatorname{arctg}x$ 12. $r=1-2\sin j$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=-2x+2$ при $x\to+\infty$ и $y=2x+2$ при $x\to-\infty$.

Вариант 27

1. $y=\frac{7x}{4+x^2}$, $[-5;0]$ 2. $y=\frac{x^2+1}{x^2-16}$

3. $y=(x+5)^2(x-3)^2$ 4. $y=x^2-4\cos x$

5. $y=x\sqrt{\frac{x}{x+7}}$ 6. $y=5-x^2-2\ln(x+2)$, $x_0=-1$

7. $y=\frac{x^3-x}{x+4}$ 8. $y=\sqrt[5]{(x-4)^2}$ 9. $y=e^{\frac{1}{x+6}}$

10. $y=(x-2)\ln x$ 11. $y=\frac{\cos x}{x}$ 12. $r=\cos 4j$

13. Привести пример функции, у которой в точке x = 4 существует первая производная, но не существует вторая.

Вариант 28

1. $y=\sqrt{841-x^2}$, $[-21;20]$ 2. $y=x^2(x+1)^2$

3. $y=(2x^2+1)e^{-x}$ 4. $y=\ln(4+x^2)$

5. $y=\frac{x^3-4x+2}{x^2-7x+12}$ 6. $y=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$, $x_0=0$

7. $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+1}$ 8. $y=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-2}$ 9. $y=\frac{e^{x-6}}{x-6}$

10. $y=\ln\frac{x+2}{x-3}+2$ 11. $y=\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x$ 12. $(x^2+y^2-y)^2=x^2+y^2$

13. Привести пример функции, имеющей наклонные асимптоты $y=4x-1$ при $x\to+\infty$ и $y=4x+1$ при $x\to-\infty$.

Вариант 29

1. $y = 3 + 6x - x^2 - \frac{54}{x-3}$, $[4;7]$ 2. $y = \frac{9x^2 - 4}{x}$

3. $y = 2x^2 - \frac{1}{9}\ln x$ 4. $y = x\sqrt{9 - x^2}$

5. $y = \frac{1}{\ln x + 4}$ 6. $y = \cos^8 x$, $x_0 = \frac{p}{2}$

7. $y = \left(\frac{x-6}{x+1}\right)^2$ 8. $y = x\sqrt{\frac{x}{x-8}}$ 9. $y = \left(x^2 + 12\right)e^{-x}$

10. $y = \ln(3x) - \ln\left(x-1\right) + 2$ 11. $y = 5\sin 2x - 2\cos 5x$ 12. $r = 2(1 + \mathrm{tg}\, 2j)$

13. Привести пример функции, имеющей асимптоты $x = 5$ и $y = 2x - 7$ при $x \to \pm\infty$.

Вариант 30

1. $y = \cos x - \frac{1}{2}x$, $\left[0; \frac{p}{2}\right]$ 2. $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 24}$

3. $y = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 7}$ 4. $y = x^4 - 6x^3 - 30x^2 - x - 17$

5. $y = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$ 6. $y = e^x - e^{-x} - 2x$, $x_0 = 0$

7. $y = 8x^2\left(x^2 - 4\right)^3$ 8. $y = \sqrt[3]{\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2}$ 9. $y = \left(3x+1\right)e^{4x}$

10. $y = x - \frac{\ln x}{2x}$ 11. $y = e^{|x|} \cdot \sin x$ 12. $\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)^2 = 4x^2y^2$

13. Нарисовать график функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$, если $f'(a) < 0$, $f''(a) > 0$.