Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. С. Кочуров

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ

(краткий конспект)

Москва 2002 г.

Лекция 1.

Определение матрицы. Определители второго и третьего порядков, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу). Методы вычисления определителей. Понятие об определителе n-го порядка. Матрица, вектор, определитель квадратной матрицы, свойства определителя.

Матрицей A размера $m \times n$, $m, n \in \mathbf{N}$, называют прямоугольную таблицу действительных чисел $\left(a_{i,j}\right)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, с m строками и n столбцами; числа $a_{i,j}$ называют элементами матрицы A. Часто указание размеров опускают. В качестве примеров и комментариев будем рассматривать случаи $m = 2$, $n = 2$ или $n = 3$, а также $m = 3$, $n = 3$ или $n = 4$. Матрицы A размера $1 \times n$ называют вектор-строками, размера $m \times 1$ — вектор-столбцами (и те и другие также называются просто векторами). Матрицы $A = \left(a_{i,j}\right)$ размера $n \times n$ называют квадратными. Каждой такой матрице соответствует транспонированная матрица $A^* = \left(a^*_{i,j}\right)$, определяемая по правилу $a^*_{i,j} = a_{j,i}$. Для квадратных матриц A определено понятие детерминанта (определителя) $|A|$ и миноров для элементов $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$. Величину $|A|$ можно определить по индукции:

1) если $n = 1$, то $|A| = a_{1,1}$.

2) для $n = 2$, обозначим $A_{i,j}$ — квадратную матрицу размером $(n-1) \times (n-1) = 1 \times 1$, полученную из A, после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, $i, j = 1, 2$. Тогда

$$|A| = a_{1,1} \cdot |A_{1,1}| - a_{1,2} \cdot |A_{1,2}| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

3) точно также для $n = 3$, обозначим $A_{i,j}$ — квадратную матрицу размером $(n-1) \times (n-1) = 2 \times 2$, полученную из A, после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда

$$|A| = a_{1,1} \cdot |A_{1,1}| - a_{1,2} \cdot |A_{1,2}| + a_{1,3} \cdot |A_{1,3}|.$$

Как и в случае $n = 2$, число $|A|$ может выражено через элементы матрицы A, но получающееся выражение будет более громоздким.

4) Общий случай определения $|A|$ подобен 2)-3). Пусть $|B|$ известно для матриц B размера $n \times n$ и A — матрица размера $(n+1) \times (n+1)$. Обозначим $A_{i,j}$ — квадратную матрицу размером $n \times n$, полученную из A, после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$. Тогда

$$|A| = a_{1,1} \cdot |A_{1,1}| - a_{1,2} \cdot |A_{1,2}| + \dots + (-1)^n a_{1,n+1} \cdot |A_{1,n+1}|.$$

Можно показать, что при этом справедливы равенства

$$|A| = (-1)^{i_0+1}\left(a_{i_0,1} \cdot |A_{i_0,1}| - a_{i_0,2} \cdot |A_{i_0,2}| + \dots + (-1)^n a_{i_0,n+1} \cdot |A_{i_0,n+1}|\right), \tag{1}$$

а также

$$|A| = (-1)^{i_0+1}\left(a_{1,i_0} \cdot |A_{1,i_0}| - a_{2,i_0} \cdot |A_{2,i_0}| + \dots + (-1)^n a_{n+1,i_0} \cdot |A_{n+1,i_0}|\right) \tag{1'}$$

при любом фиксированном $i_0 \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Тождества (1), (1′) называют разложением определителя по i_0-ой строке, i_0-ому столбцу. При этом число $|A_{i_0,j_0}|$ называют минором элемента a_{i_0,j_0}, а величину $\Delta_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0}|A_{i_0,j_0}|$ — алгебраическим дополнением этого элемента.

Свойство 0. $|A| = |A^*|$.

Поясним это свойство на примере определителя квадратной матрицы A третьего порядка (для матриц второго порядка это свойство проверяется непосредственно):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся правилами (1) и (1′) разложения определителя: разложим определитель матрицы A по первой строке, определитель матрицы A^* по первому столбцу

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|, \quad |A^*| = a_{11}|(A_{11})^*| - a_{12}|(A_{12})^*| + a_{13}|(A_{13})^*| = |A|.$$

По индукции свойство 0 может быть проверено для квадратных матриц порядка n.

Свойство 1. Если все элементы некоторой фиксированной строки i_0 или некоторого фиксированного столбца i_0 матрицы A умножить на одно и то же число k и полученную при этом матрицу обозначить B, то $|B| = k|A|$.

$\lhd$: Доказательство следует из разложения определителя по i_0-ой строке 1) или по i_0-ому столбцу $1'$) (пояснения для $n = 3$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$|B| = -k \cdot a_{21}|A_{21}| + k \cdot a_{22}|A_{22}| - k \cdot a_{23}|A_{23}| = k|A|. \rhd$$

Следствие. Если матрица A содержит нулевой столбец или нулевую строку, то $|A| = 0$.

Свойство 2. Если матрицы $A = \left(a_{i,j}\right)$, $B = \left(b_{i,j}\right)$ и $C = \left(c_{i,j}\right)$ отличаются между собой лишь элементами некоторого фиксированного столбца (или строки) с индексом j_0, причем $c_{i,j_0} = b_{i,j_0} + a_{i,j_0}$, $i = 1, \ldots, n$, то $|C| = |A| + |B|$.

$\lhd$: Как и выше доказательство свойства 2 следует из разложения определителя по (1) или ($1'$). Для $n = 3$ имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$|C| = -(a_{12} + b_{12})|A_{12}| + (a_{22} + b_{22})|A_{22}| - (a_{32} + b_{32})|A_{32}| = |A| + |B|.$$

Общий случай рассматривается по аналогии. $\rhd$

Свойство 3. Если матрица B получается из матрицы A перестановкой любых двух фиксированных столбцов либо двух фиксированных строк, то $|A| = -|B|$.

$\lhd$: Пусть сначала переставляемые строки (или столбцы) расположены рядом. Для $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы A по первой строке, а определитель матрицы B – по второй:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|, \quad |B| = -a_{11}|A_{11}| + a_{12}|A_{12}| - a_{13}|A_{13}| = -|A|.$$

Точно также рассматривается и общий случай перестановки двух соседних строк (или столбцов). Если же теперь требуется переставить 2 строки матрицы A, между которыми расположены еще k строк (скажем 1-ю и (k+2)-ю), то такую перестановку можно осуществить, переставляя рядом стоящие строки, сначала переместив 1-ю строку за (k+1)-ю, так чтобы получился бы следующий порядок строк: 2-я, 3-я, ... , (k+1)-я, 1-я, (k+2)-я, а затем последовательно переместив (k+2)-ю строку на первое место. Всего при этом нужно выполнить $k + k + 1 = 2k + 1$ перестановок соседних строк. Знак определителя при этом поменяется $2k + 1$ раз и в итоге станет противоположным знаку определителя $|A|$. $\rhd$

Следствие. Если матрица $A = \left(a_{i,j}\right)$ содержит два одинаковых столбца или две одинаковых строки, то $|A| = 0$.

Следствие. Если к элементам некоторой строки (или столбца) матрицы A добавить элементы другой строки (соответственно другого столбца) этой матрицы, умноженные на любой общий множитель, то ее определитель от этого не изменится.

Доказательство этого следствия получается последовательным применением свойств 2, 1 и следствия из свойства 3.

Все перечисленные свойства и их следствия полезно применять при вычислении определителей квадратных матриц.

Лекция 2.

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера.

Линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными называют такие два уравнения:

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = c_2,$$

в которых величины a_{ij}, c_i – некоторые заданные числа $i, j = 1, 2$, x, y – неизвестные, которые требуется найти. Для нахождения решения можно применить метод исключения (Гаусса): умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на $-a_{12}$ и сложим между собой:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}.$$

Точно также получается уравнение для определения переменной y:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}.$$

Для записи решений исходной системы линейных уравнений воспользуемся обозначениями:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

С помощью этих обозначений преобразованная система примет вид:

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y.$$

Если число D (т.е., как нетрудно видеть, определитель матрицы (a_{ij}) исходной системы) не равно нулю, то имеется единственное решение системы уравнений:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \tag{1}$$

(формулы Крамера). Если же $D = 0$, то или же исходная система уравнений вовсе не имеет решений, или, если $D_x = D_y = 0$, таких решений бесконечное число.

Пусть теперь задана система n линейных уравнений с матрицей коэффициентов $(a_{i,j})$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ и правыми частями $c_1, \ldots, c_n$ (для облегчения понимания рекомендуется по мере чтения, как пример, с подробными выкладками разбирать этот метод при $n = 3$ на бумаге):

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Формулы (Крамера), а также метод исключения неизвестных, рассмотренные выше на примере системы двух уравнений, могут быть обобщены для этой системы. Предположим, что коэффициент $a_{1,1} \neq 0$. Исключим x_1 из всех уравнений этой системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению почленно прибавим первое, умноженное на $-a_{2,1}/a_{1,1}$. После этого исходная система заменится эквивалентной

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = c_1,$$

$$a^{(1)}_{i,2}x_2 + \cdots + a^{(1)}_{i,n}x_n = c^{(1)}_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены в последних $(n-1)$ уравнениях определяются формулами:

$$a^{(1)}_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}a_{1,j}, \quad c^{(1)}_i = c_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}c_1, \quad i, j = 2, \ldots, n.$$

Если оказывается, что $a^{(1)}_{2,2} = 0$, то уравнения системы нужно переставить между собой и осуществить переобозначения, так чтобы этот коэффициент оказался бы отличным от нуля. Если при этом оказывается, что $a_{i,2} = 0$ при всех i от 2 до n, то меняем местами неизвестные: например, вместо x_2 пытаемся исключать x_3 (и делаем переобозначения так, чтобы переменная x_3 стала второй, а переменная x_2 – третьей). Предположим, что $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$. Тогда мы можем исключить x_2 из последних $(n-2)$ уравнений новой системы:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= c_1, \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2,n}^{(1)}x_n &= c_2^{(1)}, \\ a_{i,3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{i,n}^{(2)}x_n &= c_i^{(2)}, \quad i = 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Как и выше коэффициенты и правые части вычисляются по формулам

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} a_{2,j}^{(1)}, \quad c_i^{(2)} = c_i^{(1)} - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} c_2^{(1)}, \qquad i, j = 3, \ldots, n.$$

Продолжая это алгоритм, мы приведем исходную систему к треугольной рекуррентной системе

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= c_1, \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2,n}^{(1)}x_n &= c_2^{(1)}, \\ a_{3,3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3,n}^{(2)}x_n &= c_3^{(2)}, \\ \cdots & \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n &= c_n^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Эта часть вычислений называется прямым ходом метода исключения Гаусса. Чтобы найти неизвестные x_i, из преобразованной системы последовательно находят сначала

$$x_n = c_n^{(n-1)} / a_{n,n}^{(n-1)},$$

затем, из предыдущего уравнения

$$x_{n-1} = \left(c_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n \right) / a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$$

и т.д. и, наконец,

$$x_1 = (c_1 - a_{1,2}x_2 - \cdots - a_{1,n}x_n) / a_{1,1}.$$

Эта часть метода Гаусса называют обратным ходом метода. При ее осуществлении может оказаться, что начиная с какого-либо индекса i_0 все коэффициенты $a_{i,j}^{(i_0)} = 0$. В этом случае различают два варианта: все правые части $c_i^{(i_0)} = 0$. Тогда, начиная с (i_0+1)-го номера все уравнения в (2) получают вид тождеств $0 = 0$ – они выполняются при любом выборе неизвестных $x_{i_0+1}, \ldots, x_n$. Исходная система уравнений при этом имеет бесконечное число решений. Чтобы найти какое-нибудь, неизвестные $x_{i_0+1}, \ldots, x_n$ выбирают произвольно, и далее осуществляют обратный ход метода Гаусса, начиная с i_0-го уравнения в (2).

Второй случай состоит в том, что хотя бы один из коэффициентов правой части не равен нулю (например, $c_i^{(i_0)} \neq 0$). Тогда i-е уравнение имеет вид $0 = c_i^{(i_0)} \neq 0$ – противоречие, означающее, что рассматриваемая система линейных уравнений не имеет решений.

Отметим здесь, что необходимым и достаточным условием для однозначного определения неизвестных служит условие (**без доказательства**):

$$|A| = |(a_{ij})| \neq 0.$$

При этом единственное решение исходной системы может быть найдено также по формулам Крамера (**без доказательства**):

$$x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,i_0}}{|A|} \cdot y_j, \quad i_0 = 1, 2, \ldots, n.$$

Если же $|A| = 0$, то решение исходной системы линейных уравнений либо неединственно, либо вовсе невозможно (**без доказательства**).

Лекция 3.

Операции над матрицами, их свойства. Обратная матрица, ее вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение матричных уравнений и линейных систем с помощью обратной матрицы.

Над матрицами размера $m \times n$ можно производить операции умножения на числа и сложения. В отличие от определителей эти операции принято выполнять поэлементно. Так, если $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ — матрицы одного размера, $r \in \mathbb{R}$, то $r \cdot A = (r \cdot a_{i,j})$, $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$.

Если A — квадратная матрица размера $n \times n$, то

$$|r \cdot A| = r^n |A|.$$

Формулы, связывающей определитель суммы двух квадратных матриц с определителями этих матриц в общем случае не существует.

Из определения сложения матриц непосредственно следует, что эта операция обладает переместительным и сочетательным свойствами:

1° $A + B = B + A$, 2° $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Нетрудно видеть, что для операции умножения матриц на число

1° $r(A + B) = rA + rB$, 2° $(r + s)A = rA + sA$, 3° $(rs)A = r(sA)$.

Кроме операций сложения матриц и умножения матрицы на число определена операция умножения двух матриц: если $A = (a_{i,j})$ — матрица размера $m \times n$, $B = (b_{j,l})$ — матрица размера $n \times k$, $m, n, k \in \mathbf{N}$, то матрицу $C = (c_{i,l})$ размера $m \times k$ с элементами

$$c_{i,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot b_{j,l}$$

называют произведением A и B и обозначают $C = A \cdot B$. Таким образом, умножение двух прямоугольных матриц выполнимо лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе совпадает с числом строк во втором. Можно проверить следующие свойства умножения матриц (1° **без доказательства**):

1° $(AB)C = A(BC)$, 2° $C(A + B) = CA + CB$, 3° $(A + B)C = AC + BC$.

При этом в 1° число столбцов в A совпадает с числом строк в B, а число столбцов в B совпадает с числом строк в C; в 2° число столбцов в C совпадает с числом строк в A и B; в 3° число столбцов в A и B совпадает с числом строк в C.

Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то можно образовать две новых матрицы $C_1 = A \cdot B$ и $C_2 = B \cdot A$. Однако в общем случае матрицы C_1, C_2 не совпадают:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теорема (без доказательства) Для произведения двух квадратных матриц выполняется равенство

$$|A \cdot B| = |A||B|.$$

Частные случаи умножения матриц:

1). Умножение матрицы A размера $m \times n$ на вектор-столбец $n \times 1$. Произведение в этом случае имеет размеры $m \times 1$, т.е. является вектор-столбцом $m \times 1$. При этом матрицы B и $A \cdot B$ обозначают малыми буквами, например, $y = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, подчеркивая, тем самым, что они являются векторами.

2) Произведение вектор-строки x размера $1 \times n$ на матрицу A размера $n \times m$: $y = xA$. При этом вектор-строка y имеет размер $1 \times m$.

3) Особую роль при умножении матриц играют единичные матрицы E. Квадратная матрица $(a_{i,j})$ порядка n называется единичной, если $a_{i,j} = \delta_i^j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где δ_i^j — символ Кронекера: $\delta_i^j = 0$, $i \neq j$, $\delta_i^i = 1$. Если A — матрица размера $m \times n$, B — матрица размера $n \times k$, E — единичная матрица размера $n \times n$, то $A \cdot E = A$, $E \cdot B = B$.

4) Пусть $A = (a_{i,j})$ — квадратная матрица порядка n, для которой $|A| \neq 0$. Образуем новую матрицу $B = (b_{i,j})$, где $b_{i,j} = \Delta_{j,i}$ и рассмотрим произведение $A \cdot B = (c_{i,j})$. По определению

$$c_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} (-1)^{k+1} |A_{1,k}| = |A|,$$

$$c_{2,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} b_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} (-1)^{k+1} |A_{1,k}| = 0,$$

так как последняя сумма — определитель матрицы, у которой совпадают 2 первых строки. Точно также $c_{i,1} = 0$, если $i > 2$ и вообще $c_{i,i} = |A|$, $i = 1, \ldots n$, $c_{i,j} = 0$, если $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Поэтому $C = |A|\, E$. Матрицу $B/|A|$ обозначают A^{-1} и называют обратной к матрице A (с ненулевым определителем). Таким образом

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Повторяя проведенные рассуждения для произведения $B \cdot A$, получим $A^{-1} \cdot A = E$.

Согласно сделанным определениям система n линейных уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ и правыми частями $c_1, \ldots, c_n$:

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,n} x_n = c_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

может быть записана в виде

$$Ax = c,$$

где $A = (a_{i,j})$ — квадратная матрица коэффициентов, $x = (x_i)$ — вектор-столбец неизвестных, $c = (c_i)$ — вектор-столбец правых частей. Если $|A| \neq 0$, то это равенство можно умножить на A^{-1} с левой стороны. Тогда

$$x = E \cdot x = A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot c$$

дает решение исходной системы линейных уравнений. Схожим образом решается матричное уравнение

$$A \cdot X = C,$$

где $A = (a_{i,j})$ — квадратная матрица коэффициентов порядка n ($|A| \neq 0$), $X = (x_{j,k})$ — матрица неизвестных размера $n \times m$, $C = (c_{j,k})$ — матрица правых частей размера $n \times m$. После умножения на A^{-1} с левой стороны это равенство будет иметь вид

$$X = E \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C.$$

Лекция 4.

Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы. Совместность систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Структура общего решения однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Пусть $A = (a_{i,j})$ – произвольная матрица размера $m \times n$. Сделаем несколько определений.

Определитель любой квадратной матрицы порядка $k \leqslant \min\{m, n\}$, составленной из элементов матрицы A, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, путем вычеркивания ее строк и столбцов, называют минором A порядка k.

Рангом матрицы A называют максимальный из порядков ненулевых миноров этой матрицы.

Обозначим через $\bar{x}^j$, $j = 1, \ldots, n$, — n вектор-столбцов матрицы A, через $\bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$, — m ее вектор-строк.

О произвольной системе вектор-столбцов $\bar{y}^j$, $j = 1, \ldots, k$, (или вектор-строк) говорят, что она является линейно независимой, если система уравнений

$$a_1 \bar{y}^1 + a_2 \bar{y}^2 + \cdots + a_k \bar{y}^k = \bar{0}$$

относительно неизвестных a_j, $j = 1, \ldots, k$, имеет только одно решение: $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Говорят, что эта система векторов линейно зависима, если она не является линейно независимой.

Теорема 1 (о свойствах ранга матрицы). Ранг матрицы A совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из $\bar{x}^j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$ и совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$ (**без доказательства**).

Так как при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы A ее ранг не меняется, то с самого начала можно считать, что ненулевой минор максимального порядка (это число обозначим k) для A является определителем матрицы расположенной в ее левом верхнем углу, т.е. матрицы $A_1 = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, k$. Покажем, что первые k строк $\bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, k$, и первые k столбцов $\bar{x}^j$, $j = 1, \ldots, k$ являются линейно независимыми. Предположим, они линейно зависимы (например, столбцы):

$$a_1 \bar{x}^1 + a_2 \bar{x}^2 + \cdots + a_k \bar{x}^k = \bar{0}$$

для некоторого не полностью нулевого набора чисел a_j, $j = 1, \ldots, k$. Тогда в определителе квадратной матрицы A_1 можно сложить все столбцы, умноженные на коэффициенты a_j, $j = 1, \ldots, k$. Если, скажем $a_1 \neq 0$, то разместим полученный (нулевой по предположению) столбец вместо первого. Тогда по свойствам определителей, с одной стороны величина определителя умножится на a_1 и, значит, останется ненулевой, а с другой эта же величина определителя должна быть нулем, т.к. получившийся определитель содержит нулевой столбец. Получившееся противоречие говорит о неверности исходного предположения – линейной зависимости первых k столбцов. Точно также линейно независимы первые k строк.

Вторая часть теоремы о том, что если k строк (или столбцов) матрицы A линейно независимы, то ранг этой матрицы больше или равен k, останется без доказательства. Отметим только, что доказательство этого факта можно основывать на применении метода исключения Гаусса.

Для вычисления ранга матрицы можно поступать следующим образом: применим метод исключения Гаусса к системе из m уравнений для неизвестных y_j, $j = 1, \ldots, n$,

$$a_{i,1} y_1 + a_{i,2} y_2 + \cdots + a_{i,n} y_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Метод Гаусса состоит в последовательном выполнении однотипных шагов и в какой-то момент такой шаг будет невозможно выполнить. Этот алгоритм часто (для сокращения записей) выполняют не над указанной системой, а только над ее коэффициентами, т.е. над элементами матрицы A. Число ненулевых строк, оставшихся после выполнения этого алгоритма, и даст ранг A. Это число совпадает также с количеством выполненных шагов в методе Гаусса.

Как уже говорилось, система линейных уравнений в самом общем виде может быть записана как

$$A \bar{y} = \bar{a}. \tag{1}$$

В этой записи $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов размера $m \times n$, $\bar{a} = (a_i)$ – вектор-столбец размера $m \times 1$ – известные объекты, $\bar{y} = (y_j)$ – вектор-столбец размера $n \times 1$ – неизвестный вектор. Система уравнений (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение $\bar{y}$. Если же такого решения нет, то система (1) называется несовместной.

Сформулируем теорему Кронекера-Капелли о возможности решения системы (1):

Теорема 2 (критерий разрешимости системы линейных уравнений). Для того, чтобы система (1) уравнений, была разрешимой необходимо и достаточно, чтобы совпадали ранги матрицы A и расширенной матрицы $\bar{A} = (A, \bar{a})$, получающейся из исходной матрицы путем добавления с правой стороны вектор-столбца $\bar{a}$ свободных членов (**без доказательства**).

Система уравнений (1) называется однородной, если вектор-столбец свободных членов $\bar{a}$ является нулевым вектором. Остальные системы линейных уравнений называются неоднородными. Системы однородных уравнений обладают рядом специфических свойств:

1. Однородная система уравнений всегда совместна, поскольку вместо неизвестного вектора $\bar{z}$ можно подставить нулевой вектор,

2. Если $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$ – два каких-то решения однородной системы линейных уравнений:

$$A \bar{z}^1 = \bar{0}, \quad A \bar{z}^2 = \bar{0},$$

то и их сумма является решением этой системы: $A(\bar{z}^1 + \bar{z}^2) = A\bar{z}^1 + A\bar{z}^2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ согласно правилу умножения матриц.

3. Если $\bar{z}^1$ – какое-либо решение однородной системы линейных уравнений:

$$A \bar{z}^1 = \bar{0}, \quad k \in \mathbb{R},$$

то и вектор-столбец $k \cdot \bar{z}^1$ является решением этой системы: $A(k \cdot \bar{z}^1) = k \cdot A\bar{z}^1 = k \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Обозначим множество всех решений однородного уравнения

$$A\bar{z} = \bar{0}$$

символом $K(A)$. Согласно вышесказанному это – множество вектор-столбцов размера $n \times 1$, среди которых обязательно присутствует нулевой вектор-столбец и для которых вместе с каждым вектором $\bar{z}^1$ присутствуют вектора $k \cdot \bar{z}^1$, $k \in \mathbb{R}$, а вместе с векторами $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$ присутствуют вектор $\bar{z}^1 + \bar{z}^2$.

Пусть теперь $\bar{y}^1$, $\bar{y}^2$ – два решения линейной системы (1): $A(\bar{y}^1) = A(\bar{y}^2) = \bar{a}$. Тогда

$$\bar{0} = \bar{a} - \bar{a} = A(\bar{y}^1) - A(\bar{y}^2) = A(\bar{y}^1 - \bar{y}^2),$$

т.е. $(\bar{y}^1 - \bar{y}^2)$ – вектор из множества $K(A)$. Обратно, пусть $\bar{y}^1$ – какое-нибудь решение линейной системы (1), $\bar{z}^1 \in K(A)$ (это значит $A\bar{z}^1 = \bar{0}$). Тогда

$$A(\bar{y}^1 + \bar{z}^1) = A\bar{y}^1 + A\bar{z}^1 = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

Это означает, что $(\bar{y}^1 + \bar{z}^1)$ также является решением (1). Приведенные рассуждения обосновывают то, что общее решение $\bar{y}^{о.}$ системы (1) может быть записано в виде

$$\bar{y}^{о.} = \bar{z}^{о.,о.} + \bar{y}^{ч.},$$

(здесь $\bar{z}^{о.,о.}$ — общее решение однородной системы, $\bar{y}^{ч.}$ — частное решение системы (1)).

Лекция 5.

Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора. Декартовы координаты векторов. Скалярное произведение векторов, его основные свойства. Векторное и смешанное произведение векторов.

Еще раз перечислим основные свойства совокупности всех вектор-столбцов $\bar{x}$ размера $n \times 1$ (его обозначают $\mathbb{R}^n$): если $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

0° для $\bar{x}$, $\bar{y}$ определены операции сложения $(\bar{x} + \bar{y}) \in \mathbb{R}^n$ и умножения на числа $\alpha\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

1° $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$,

2° $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$,

3° $\exists \bar{0} \in \mathbb{R}^n$: $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{0} + \bar{x} = \bar{0}$,

4° $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\exists(-\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$: $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$,

5° $0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$,

6° $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$,

7° $\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{x}$,

8° $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$,

9° $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$.

Эти свойства выполняются также и для вектор-строк. Для $n = 2$ и $n = 3$ результат сложения двух векторов и результат умножения вектора на число могут быть изображены на чертеже. Иногда для более полного пояснения, о каких именно векторах идет речь, говорят подробнее, например: n-мерная вектор-строка и т.п.

С каждым вектором связан набор чисел $(x_i)_{i=1}^n$, из которых и состоит сам вектор: $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$. Числа x_i при этом называют декартовыми координатами $\bar{x}$, x_1 – первой координатой, x_2 – второй и т.д.

Определение. Скалярным произведением двух n-мерных векторов $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ и $\bar{y} = (y_i)_{i=1}^n$ называют величину

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$,

2) $(\bar{x}, \alpha\bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, α — число и, значит, $(\alpha\bar{x}, \beta\bar{y}) = \alpha\beta(\bar{x}, \bar{y})$

3) $(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = (\bar{x}, \bar{y}_1) + (\bar{x}, \bar{y}_2)$,

4) $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, если $\bar{x} \neq 0$.

Эти свойства являются следствием определения скалярного произведения двух векторов.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: $(\bar{x}, \bar{y})^2 \leqslant (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y})$.

$\lhd$: При всех $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leqslant (\bar{x} + t \cdot \bar{y}, \bar{x} + t \cdot \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + t(\bar{y}, \bar{x}) + t(\bar{x}, \bar{y}) + t^2(\bar{y}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2t(\bar{x}, \bar{y}) + t^2(\bar{y}, \bar{y}).$$

Поэтому дискриминант этого квадратного по переменной t выражения неположителен:

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 - (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leqslant 0. \quad \rhd$$

Величину $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ называют длиной или модулем вектора $\bar{x}$, а отношение (согласно неравенства Коши-Буняковского-Шварца принадлежащее отрезку $[-1, 1]$)

$$\cos\phi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}|\,|\bar{y}|} \in [-1, 1]$$

— косинусом угла между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Эти вектора называют коллинеарными, если $\cos\phi = \pm 1$; их называют ортогональными (перпендикулярными), если $\cos\phi = 0$.

В качестве следствия получаем хорошо известное равенство для скалярного произведения векторов: $(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\cos\phi$.

Определение. Проекцией вектора $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ на вектор $\bar{y} = (y_i)_{i=1}^n$ называют коллинеарный $\bar{y}$ вектор

$$\text{пр}_y \bar{x} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \cdot |\bar{x}| \cos\phi = \bar{y}\frac{(\bar{x}, \bar{y})}{(\bar{y}, \bar{y})}.$$

Следствие. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\text{пр}_y \bar{x}, \bar{y})$.

В качестве примера введенных понятий отметим систему $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ ортогональных векторов, имеющих вид $\bar{e}_i = (\delta_{i,j})$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots \quad , \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Эту систему векторов принято называть стандартным ортогональным базисом пространства $\mathbb{R}^n$. Более общо, ортогональным базисом в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют всякую систему, состоящую из n ненулевых ортогональных друг другу векторов. Нетрудно видеть, что любые два разных вектора $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_j$ ортогональны друг другу, их общее число равно n и что каждый вектор $\bar{e}_i$ имеет единичную длину. Стандартный ортогональный базис обладает еще одним важным и наглядным свойством: каждый вектор $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ однозначным образом записывается в виде

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i.$$

Такое представление вектора $\bar{x}$ называют разложением $\bar{x}$ по базису (в данном случае по базису $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$).

Понятие векторного произведения двух векторов дается в трехмерном пространстве. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — пара векторов в этом пространстве. Векторным произведением $[\bar{x}, \bar{y}]$ называют вектор, который

— равен по длине площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{x}$, $\bar{y}$:

$$|[\bar{x}, \bar{y}]| = |\bar{x}|\,|\bar{y}|\,\sin\phi, \quad \phi \in [0, \pi] \text{ – угол между } \bar{x} \text{ и } \bar{y},$$

— перпендикулярен $\bar{x}$ и $\bar{y}$,

— если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ неколлинеарны, обладает свойством того, что тройка $\bar{x}$, $\bar{y}$, $[\bar{x}, \bar{y}]$ образует правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения

1) $[\bar{y}, \bar{x}] = -[\bar{x}, \bar{y}]$,

2) $[\bar{x}, \bar{x}] = \bar{0}$,

3) $[\lambda\bar{x}, \bar{y}] = [\bar{x}, \lambda\bar{y}] = \lambda[\bar{x}, \bar{y}]$,

4) $[\bar{x}+\bar{y},\bar{z}]=[\bar{x},\bar{z}]+[\bar{y},\bar{z}]$.

Доказательство первых трех свойств является простым следствием определения; доказательство последнего требует проведения аккуратных выкладок. Мы не будем его проводить. Пусть $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, $\bar{x}=x_1\cdot\bar{e}_1+x_2\cdot\bar{e}_2+x_3\cdot\bar{e}_3$, $\bar{y}=y_1\cdot\bar{e}_1+y_2\cdot\bar{e}_2+y_3\cdot\bar{e}_3$. Тогда

$$[\bar{x},\bar{y}]=y_1[\bar{x},\bar{e}_1]+y_2[\bar{x},\bar{e}_2]+y_3[\bar{x},\bar{e}_3]=y_1(x_1[\bar{e}_1,\bar{e}_1]+x_2[\bar{e}_2,\bar{e}_1]+x_3[\bar{e}_3,\bar{e}_1])+y_2[\bar{x},\bar{e}_2]+y_3[\bar{x},\bar{e}_3]=$$

$$=y_1(x_2\cdot(-\bar{e}_3)+x_3\cdot\bar{e}_2)+y_2(x_1\cdot\bar{e}_3+x_3\cdot(-\bar{e}_1))+y_3(x_1\cdot(-\bar{e}_2)+x_2\cdot\bar{e}_1)=\begin{vmatrix}\bar{e}_1&\bar{e}_2&\bar{e}_3\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.$$

Определение. Смешанным произведением $\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle$ векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ называют число $([\bar{x},\bar{y}],\bar{z})$.

Из определения векторного произведения следует, что $[\bar{x},\bar{y}]$ – вектор, по длине равный площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{x}$, $\bar{y}$, и образующего правую тройку векторов в комбинации $\bar{x}$, $\bar{y}$, $[\bar{x},\bar{y}]$. Если считать этот параллелограмм основанием параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, то его объем, таким образом, равен $\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle$, для правой тройки векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, или равен $(-\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle)$ для левой тройки векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Свойства смешанного произведения

$\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle=\langle\bar{y},\bar{z},\bar{x}\rangle=\langle\bar{z},\bar{x},\bar{y}\rangle=-\langle\bar{y},\bar{x},\bar{z}\rangle=-\langle\bar{x},\bar{z},\bar{y}\rangle=-\langle\bar{z},\bar{y},\bar{x}\rangle$.

Если x_1,x_2,x_3, y_1,y_2,y_3, z_1,z_2,z_3 — координаты соответственно векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$, то

$$\langle\bar{x},\bar{y},\bar{z}\rangle=([\bar{x},\bar{y}],\bar{z})=(z_1\cdot\bar{e}_1+z_2\cdot\bar{e}_2+z_3\cdot\bar{e}_3,\begin{vmatrix}\bar{e}_1&\bar{e}_2&\bar{e}_3\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix})=\begin{vmatrix}z_1&z_2&z_3\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}.$$

Лекция 6.

Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Одной из задач, решаемых в курсе алгебры и геометрии, является задача исследования формы, расположения и свойств линий на плоскости и в пространстве, поверхностей в пространстве и т.д. Изучение этих вопросов начнем с рассмотрения понятия линии на плоскости. Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ выбран стандартный базис и (x,y) означает координатную запись векторов в этом пространстве.

Пусть $F:U\to\mathbb{R}$ – некоторая действительнозначная функция, заданная на подмножестве $U\subset\mathbb{R}^2$ точек $(x,y)\in U$. Соотношение $F(x,y)=0$ называется уравнением на U. Будем предполагать, что те пары $(x,y)\in U$, которые ему удовлетворяют, не заполняют целый "кусок плоскости" (не уточняя, что это означает более подробно, отметим, что тождества типа $F(x,y)=(x+y)^2-x^2-2xy-y^2\equiv 0$ обычно считают не уравнениями, а именно тождествами). Линией, задаваемой функцией F (или уравнением $F=0$), называют совокупность

$$\{(x,y)\in U\mid F(x,y)=0\}.$$

Таким образом линия на плоскости – это прежде всего некоторый набор точек плоскости.

Примеры уравнений и линий, задаваемых этими уравнениями.

1. $F(x,y)=x-y-1$, $U=\mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x-y-1=0$ – уравнение линии на плоскости. Эта линия представляет из себя сдвиг биссектрисы первого и третьего координатных углов на одну единицу вниз.

2. $F(x,y)=x^2-y^2$, $U=\mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2-y^2=0$ – уравнение линии на плоскости; оно может быть записано в виде $(x-y)(x+y)=0$. Эта линия представляет из себя, таким образом, объединение двух биссектрис: первого-третьего и второго-четвертого координатных углов.

3. $F(x,y)=x^2+y^2$, $U=\mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2+y^2=0$ – уравнение линии на плоскости; единственная удовлетворяющая ему точка – это начало координат $(x,y)=(0,0)$. Эта линия представляет из себя одну точку. Данное уравнение определяет, как говорят, вырожденную линию.

4. $F(x,y)=x^2+y^2+1$, $U=\mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2+y^2+1=0$ – уравнение на плоскости. Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка, оно не определяет линии.

5. Важным примером линии является график функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для этого случая $F(x, y) = y - f(x)$, $U = [a, b] \times \mathbb{R}$ – полоса, неограниченно продолжающаяся над и под отрезком $[a, b]$ оси Ox. При этом линия, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$:

$$\{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in U \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}.$$

Пусть $\varphi, \psi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – две действительнозначные функции, заданные на промежутке $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Говорят, что система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in \langle a, b\rangle,$$

задает параметрическое представление линии на плоскости. Это задание происходит следующим образом: линией считается совокупность точек

$$\{(\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \langle a, b\rangle\}$$

плоскости.

Примеры линий, задаваемых параметрически.

6. Пусть $r > 0$ фиксировано. Уравнения $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, – параметрическое представление окружности радиуса $r > 0$ с центром в начале координат. Эта же окружность может быть задана также и уравнением $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

7. Уравнения $x = \theta\cos\theta$, $y = \theta\sin\theta$, $\theta \in [0, +\infty)$ задают параметрическое представление спирали Архимеда, уравнения $x = \theta^{-1}\cos\theta$, $y = \theta^{-1}\sin\theta$, $\theta \in (0, +\infty)$ – параметрическое представление гиперболической спирали.

8. Каждый график функции из примера 5 можно представить как параметрическое представление линии $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$.

Алгебраические линии.

Важным классом линий являются линии, задаваемые алгебраическими уравнениями. Это уравнения следующих видов:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0 \tag{3}$$

и т.д. В этих уравнениях $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений. Уравнение (1) называется общим уравнением 1-й степени, если в нем коэффициенты A и B одновременно не обращаются в ноль. Коротко это условие обычно записывают так: $A^2 + B^2 \neq 0$. Уравнение (2) называется общим уравнением 2-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Аналогично, уравнение (3) называется общим уравнением 3-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0$. Уравнения 4-й, 5-й и далее степеней строятся по подобным правилам.

В качестве неалгебраических уравнений можно рассмотреть, к примеру, такие:

$$y - \sin x = 0, \qquad 2^{xy} - x - y = 0.$$

Иногда линия может быть задана описательным образом (как геометрическое место точек, подчиненных заданному условию). При этом одним из первых возникает вопрос о выводе уравнения этой линии (обычного или параметрического). Так, например, единичная окружность с центром в начале координат может задана как геометрическое место точек, лежащих на расстоянии 1 от начала координат.

Прямые линии, или просто прямые, на плоскости.

Алгебраические линии 1-й степени называют прямыми на плоскости. Таким образом, уравнением, задающим прямую на плоскости, является уравнение $Ax + By + C = 0$, A, B и C – фиксированные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$. Производя тождественные преобразования равенства $Ax + By + C = 0$, получают различные формы уравнения, задающего эту прямую.

Одним из таких преобразований является умножение коэффициентов A, B и C уравнения на одно и тоже число $a \neq 0$: понятно, что уравнения

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad (aA)x + (aB)y + (aC) = 0$$

определяют одну и ту же прямую. Поскольку коэффициенты A и B не должны одновременно обращаться в ноль, то исходное уравнение всегда можно привести к одному из двух видов: если $B \neq 0$, то выбрав $a = 1/B$, получим уравнение $y + (A/B)x + (C/B) = 0$ – первый вид, прямые, непараллельные оси Oy. Если же $B = 0$, то $A \neq 0$; выбрав $a = 1/A$, получим уравнение $x + (C/A) = 0$ – второй вид, прямые, параллельные оси Oy.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – две различные точки, лежащие на одной прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$. Тогда

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0.$$

В терминах операции скалярного произведения векторов последнее равенство можно переписать в виде $((A, B), (x_1 - x_2, y_1 - y_2)) = 0$, т.е. вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ перпендикулярен вектору (A, B). Иными словами, вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ пропорционален вектору $(B, -A)$. Для любой пары различных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащих на одной прямой, вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ носит специальное название – направляющего вектора этой прямой. Согласно сказанному выше, все направляющие вектора одной прямой пропорциональны между собой и пропорциональны вектору $(B, -A)$. Верно также и обратное: если точка (x_1, y_1) принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$, а вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ пропорционален вектору $(B, -A)$, то точка (x_2, y_2) принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$:

$$\{Ax_1 + By_1 + C = 0, \quad A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0\} \Rightarrow \quad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Поэтому прямую задают также и в такой форме: прямая – это совокупность пропорциональных векторов $t\bar{v}$ (здесь $\bar{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \neq \bar{0}$, $t \in \mathbb{R}$) плоскости, отложенных от некоторой фиксированной точки $\bar{w} = (x_1, y_1)$ этой плоскости:

$$\{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Согласно сказанному выше, такая совокупность не зависит от выбора конкретных представителей $\bar{v}$ и $\bar{w}$ прямой. Таким образом, если известны 2 различные точки, лежащие на какой-либо прямой, то (4) задает эту прямую (в, по сути дела, параметрической форме).

Как известно, в терминах скалярного произведения определяются углы между векторами и расстояния между точками. Углом между двумя прямыми

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

называют меньший из двух углов, которые образованы парами направляющих векторов этих прямых. Таким образом, угол между прямыми – это меньший из углов: угол между векторами $(B_1, -A_1)$ и $(B_2, -A_2)$ или угол между $(B_1, -A_1)$ и $(-B_2, A_2)$ (и, что тоже самое, угол между векторами (A_1, B_1) и (A_2, B_2) или угол между (A_1, B_1) и $(-A_2, -B_2)$).

Пусть $\{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ – некоторая прямая на плоскости, $\bar{u}$ – некоторая точка этой плоскости. Расстоянием $\operatorname{dist}(\bar{u}, L)$ от точки $\bar{u}$ до прямой $L = \{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ называют минимум

$$\min\{|\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}| \mid t \in \mathbb{R}\}$$

расстояний от точки $\bar{u}$ до различных точек $t\bar{v} + \bar{w}$ прямой. Запишем задачу нахождения этого расстояния в аналитической форме: по сути дела нужно найти минимум функции

$$f(t) = (\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}, \bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w}) - 2t(\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}) + t^2(\bar{v}, \bar{v})$$

по переменной t (точнее – квадратного корня из $f(t)$). Функция $f(t)$ – парабола с ветвями, направленными вверх (т.к. $(\bar{v}, \bar{v}) \neq 0$). Ее минимум достигается в точке τ, где $f'(\tau) = 0$. Поэтому

$$\tau(\bar{v}, \bar{v}) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}), \quad f(\tau) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w}) - \tau(\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}) = \frac{(\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w})(\bar{v}, \bar{v}) - (\bar{u} - \bar{w}, \bar{v})^2}{(\bar{v}, \bar{v})}.$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского $f(\tau) \geqslant 0$, $\mathrm{dist}(\bar{u}, L) = \sqrt{f(\tau)}$.

Приведем еще одну формулу для вычисления расстояния d от точки $M(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Уравнение, задающее прямую на плоскости, называется нормированным, если $A^2 + B^2 = 1$. Легко понять, что уравнение любой прямой можно превратить в нормированное уравнение этой же прямой. Таким образом, чтобы определить расстояние от точки до прямой, нужно в левую часть нормированного уравнения этой прямой подставить координаты данной точки и взять модуль полученного результата.

Лекция 7.

Прямая и плоскость в пространстве. Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ выбран стандартный базис и (x, y, z) с индексами или без них означает координатную запись векторов в этом пространстве. По аналогии с понятием линии на плоскости рассматривается понятие поверхности в пространстве. Также как и для линий, поверхность может задаваться 1) уравнением и 2) параметрически. Рассмотрим примеры поверхностей, заданных уравнением.

1. $F(x, y, z) = x + y + z$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x + y + z = 0$ – уравнение поверхности (точнее – плоскости) в пространстве. Эта плоскость проходит через начало координат, пересекает координатную плоскость Oxy по прямой $x + y = 0$, координатную плоскость Oxz – по прямой $x + z = 0$. Можно привести и другие ее свойства.

2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве; единственная удовлетворяющая ему точка – начало координат $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, – поверхность представляет из себя эту точку. Данное уравнение определяет вырожденную поверхность.

3. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве (сферы радиуса 1). Данная поверхность состоит из точек, удаленных от начала координат на расстояние 1.

4. Является обобщением предыдущих двух примеров. Фиксируем какое-нибудь неотрицательное число r. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве (сферы радиуса r). Данная поверхность состоит из точек, удаленных от начала координат на расстояние r.

5. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ – уравнение в пространстве. Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка, оно не определяет поверхности.

6. Как и для линий, выражения вида $(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2(xy + xz + yz) \equiv 0$ являются тождествами, не являются уравнениями и не задают поверхности.

7. С каждой линией L на плоскости Oxy, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, $F : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, связана так называемая цилиндрическая поверхность или цилиндр над L. Эта поверхность состоит из всевозможных прямых в пространстве, проходящих через точки L параллельно оси Oz.

Пусть $F : U \to \mathbb{R}$ – некоторая действительнозначная функция, заданная на подмножестве $U \subset \mathbb{R}^3$ точек $(x, y, z) \in U$. Соотношение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением на U. Будем предполагать, что те пары $(x, y, z) \in U$, которые ему удовлетворяют, не заполняют целый "кусок пространства". Поверхностью, задаваемой функцией F (или уравнением $F = 0$), называют совокупность

$$\{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Таким образом поверхность в пространстве – это некоторый набор точек пространства.

При обсуждении того как задаются параметрические поверхности используется понятие области $\mathcal{V}$ на плоскости. Оно имеет вполне определенный математический смысл, однако на данный момент давать его не будем. Под областью будем понимать "кусок или несколько кусков плоскости". Примерами областей являются круг, квадрат на плоскости, объединение круга и квадрата, вся плоскость, полуплоскость. В тоже время линия на плоскости областью не является. Пусть $\alpha, \beta, \gamma : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ – три действительнозначные функции, заданные на области $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$. Говорят, что система

$$\begin{cases} x = \alpha(u,v), \\ y = \beta(u,v), \\ z = \gamma(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathcal{V},$$

задает параметрическое представление поверхности в пространстве. Это задание происходит следующим образом: поверхностью считается совокупность точек

$$\{(\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in \mathcal{V}\}$$

пространства.

Примеры задаваемых параметрически поверхностей.

8. Уравнения $x = u$, $y = v$, $z = -u - v$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, задают параметрическое представление плоскости $x + y + z = 0$ из примера 1.

9. Несколько более сложным является параметрическое представление сферы радиуса $r > 0$ из примера 4. Уравнения

$$\begin{cases} x = r \cos u \cos v, \\ y = r \sin u \cos v, \\ z = r \sin v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathcal{V},$$

являются примером такого задания. При этом $\mathcal{V} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ – прямоугольник на плоскости со сторонами длины 2π и π.

Алгебраические поверхности.

Как и для линий на плоскости важным классом поверхностей являются поверхности, задаваемые алгебраическими уравнениями. Это уравнения следующих видов:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{2}$$

и т.д. В этих уравнениях $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений. Уравнение (1) называется общим уравнением 1-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (2) называется общим уравнением 2-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

Плоскость в пространстве.

Алгебраические поверхности 1-й степени называют плоскостями в пространстве. Таким образом, уравнением, задающим плоскость в пространстве, является уравнение $Ax+By+Cz+D = 0$, A, B, C и D – фиксированные числа, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Производя тождественные преобразования равенства $Ax+By+Cz+D = 0$, получают различные формы уравнения, задающего эту плоскость.

Как и для случая прямой на плоскости одним из таких преобразований является умножение коэффициентов A, B, C и D на одно и тоже число $a \neq 0$: уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad (aA)x + (aB)y + (aC)z + (aD) = 0$$

определяют одну и ту же плоскость. Коротко обозначим возможные результаты таких преобразований. Коэффициенты A, B и C не должны одновременно обращаться в ноль. Если $C \neq 0$, то, выбрав $a = 1/C$, получим уравнение плоскости $z + (A/C)x + (B/C)y + (D/C) = 0$. Из него видно, что исходная поверхность может быть задана как график функции $z = f(x,y) = -(A/C)x - (B/C)y - (D/C)$ от переменных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Если же $C = 0$, то такого преобразования выполнить невозможно, исходная плоскость задается уравнением $Ax + By + D = 0$ и является цилиндром над прямой $Ax + By + D = 0$ в плоскости Oxy. Понятно, что такой цилиндр нельзя задать как график некоторой функции $z = f(x,y)$ переменных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Однако ее можно задать как график функции других переменных. А именно, пусть $B \neq 0$, $a = 1/B$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $y + (A/B)x + (D/B) = 0$ и плоскость может быть задана как график функции $y = f(x,z) = -(A/B)x - (D/B)$ от переменных $(x,z) \in \mathbb{R}^2$. Если же помимо $C = 0$ также и $B = 0$, то исходная плоскость является цилиндром как над прямой в плоскости Oxy, так и цилиндром над прямой в плоскости Oxz. Поэтому ее нельзя также задать как график некоторой функции $y = f(x,z)$ переменных $(x,z) \in \mathbb{R}^2$. Но в этом случае обязательно $A \neq 0$ и можно выбрать $a = 1/A$. Получающееся уравнение $x + (D/A) = 0$ задает плоскость, являющуюся графиком функции $x = f(y,z) = -(D/A)$ от переменных $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Аналогичные преобразования и их интерпретация связаны с первоначальным рассмотрением коэффициентов B или A.

Пусть (x_1, y_1, z_1) – точка, лежащая на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Тогда уравнение плоскости может быть записано в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3}$$

В терминах скалярного произведения последнее равенство можно переписать в виде

$$((A,B,C),(x - x_1, y - y_1, z - z_1)) = 0,$$

т.е. вектор $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ перпендикулярен вектору (A,B,C). Запись уравнения плоскости в пространстве вида (3) имеет, таким образом, следующий геометрический смысл: это плоскость, проходящая через точку (x_1, y_1, z_1) перпендикулярно вектору (A,B,C). Вектор (A,B,C) имеет специальное название — нормали к плоскости. Понятно, что все нормали пропорциональны между собой – лежат на одной прямой.

Выпишем уравнение плоскости в пространстве, проходящей через три фиксированные точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), не лежащие на одной прямой. Пусть (x,y,z) – произвольная точка этой плоскости. Тогда таким уравнением будет

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{4}$$

– оно имеет вид (1) и любая из трех точек (x_i, y_i, z_i), $i = 1,2,3$, ему удовлетворяет. Условие – три точки не лежат на одной прямой, означает, что вектора $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ не пропорциональны и, значит, хотя бы один из коэффициентов A, B или C уравнения (4) не равен 0.

Уравнение (4) позволяет задать параметрическое представление плоскости. Введем обозначения $\bar{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq \bar{0}$, $\bar{v} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \neq \bar{0}$, $\bar{w} = (x_1, y_1, z_1)$. Тогда, согласно (4), плоскость – это множество

$$\{s\bar{u} + t\bar{v} + \bar{w} \mid s,t \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

линейных комбинаций векторов $\bar{u}$, $\bar{v}$, отложенных от точки $\bar{w}$ (по теореме о ранге матрицы).

По аналогии с прямыми на плоскости, углом между двумя плоскостями, заданными уравнениями вида (1), называют меньший из двух углов, между нормалями этих плоскостей.

Зафиксируем какую-нибудь точку $M(x_1, y_1, z_1)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Назовем расстоянием h от M до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ длину перпендикуляра, опущенного из точки M на эту плоскость, т.е. длину проекции на нормаль (A,B,C) вектора $\overline{M_0\,M}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$h = |(A,B,C)| \cdot \frac{|((A,B,C),(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0))|}{|(A,B,C)|^2} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, чтобы найти расстояние от точки M до плоскости, нужно в левую часть нормированного уравнения плоскости подставить координаты точки M и взять абсолютную величину полученного результата (как и для уравнения прямой, уравнение, задающее плоскость, называется нормированным, если $A^2 + B^2 + C^2 = 1$).

Под линией в $\mathbb{R}^3$ будем понимать пересечение двух поверхностей, заданных в этом пространстве (при помощи уравнений или параметрическим способом). При этом, как и прежде, предполагается, что это пересечение является "существенным", т.е. не содержит значительных "кусков" поверхностей. В частности, если в качестве двух поверхностей выбрать одну и ту же поверхность, то в пересечении получится она же и получится, – это поверхность, а не линия.

1. Два уравнения

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-14=0 \end{cases}$$

совместно определяют окружность (как пересечение двух сфер). Другим, эквивалентным, способом записать эту систему уравнений можно так

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ 2x+4y+6z-1=0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения, например, переменную z и делая подстановку в первое уравнения, получим

$$\begin{cases} x^2+y^2+(1/6-x/3-2y/3)^2-1=0, \\ z=1/6-x/3-2y/3. \end{cases}$$

В этом представлении к первому уравнению можно относиться как к уравнению линии (эллипса) на плоскости Oxy. Эта линия является проекцией окружности (1) на Oxy. Сама окружность расположена в плоскости $z=1/6-x/3-2y/3$ в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, первое уравнение, $x^2+y^2+(1/6-x/3-2y/3)^2-1=0$, – это в то же время уравнение цилиндрической поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Прямая в пространстве.

Прямые в пространстве обычно задают как пересечение пары плоскостей в пространстве. Таким образом, системой уравнений, задающей прямую в пространстве, является

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – фиксированные числа, $A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq 0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2\neq 0$. Чтобы выписанные уравнения определяли разные плоскости, в данном случае необходимо, чтобы одно уравнение не сводилось к другому. Иными словами, необходимо, чтобы вектора (A_1,B_1,C_1,D_1) и (A_2,B_2,C_2,D_2) не были бы пропорциональны. При выполнении этого условия выписанные уравнения определяют две разные плоскости в пространстве. Чтобы они имели общие точки, необходимо, чтобы они не были бы параллельны, т.е. чтобы их нормали (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) не были бы пропорциональны. В этом случае, производя тождественные преобразования можно получить различные формы системы уравнений, задающей эту прямую. Если (x_0,y_0,z_0) – произвольная точка, расположенная на прямой, то рассматриваемая система может быть записана в виде

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0. \end{cases}$$

Представляя эти уравнения в виде скалярных произведений, находим, что общее решение этой системы состоит из набора векторов, перпендикулярных векторам $\bar{a}=(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{b}=(A_2,B_2,C_2)$. Обозначим $(l,m,n)=[\bar{a},\bar{b}]$ – координаты векторного произведения. Каждый из ненулевых векторов, пропорциональных вектору (l,m,n) принято называть направляющим вектором прямой (2). Согласно сказанному, уравнения прямой в пространстве записываются в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \qquad t\in\mathbb{R}, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$

– прямая, проходящая через (x_0, y_0, z_0) в направлении (l, m, n). Иногда из этой записи исключают t и используют такую, называемую канонической, форму записи:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Эту форму и параметрическое представление удобно применять для поиска прямой, проходящей через две заданные точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) из $\mathbb{R}^3$. В этом случае в качестве (l, m, n) можно выбрать вектор $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

По аналогии с прямыми на плоскости, углом между двумя прямыми, называют меньший из углов, которые образуют между собой направляющие этих прямых.

Обсудим вопрос о том, как определить угол между прямой и плоскостью в пространстве $\mathbb{R}^3$. Задавая прямую, будем иметь дело с ее направляющими (l, m, n), задавая плоскость, будем иметь дело с ее нормалями (A, B, C). Используя понятие скалярного произведения легко подсчитать модуль b косинуса угла между этими векторами. Углом же между прямой и плоскостью естественно считать угол α в промежутке $[0, \pi/2)$, удовлетворяющий равенству $\sin \alpha = b$.

Лекция 8.

Линейные преобразования координат. Собственные вектора и собственные значения. Характеристический многочлен.

Напомним, что систему векторов $\bar{y}^j$, $j = 1, \ldots, k$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют линейно независимой, если система уравнений

$$a_1 \bar{y}^1 + a_2 \bar{y}^2 + \cdots + a_k \bar{y}^k = \bar{0} \tag{1}$$

относительно неизвестных a_j, $j = 1, \ldots, k$, имеет только одно решение: $a_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Говорят, что эта система векторов линейно зависима, если она не является линейно независимой.

Теорема (о свойствах ранга матрицы. Напоминание.) Ранг матрицы A совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из $\bar{x}^j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$ и совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов из $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$ (здесь $\bar{x}^j$ и $\bar{x}_i$ – столбцы и строки матрицы A).

Базисом в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют всякую линейно независимую систему из n векторов $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Из-за линейной независимости этой системы сразу следует, что ни один из векторов $\bar{y}^j$ не является нулевым (если, например, $\bar{y}^1 = \bar{0}$, то $(a, 0, \ldots, 0)$ – решение (1) при любом $a \in \mathbb{R}$). В качестве примера базиса в $\mathbb{R}^n$ мы уже рассматривали стандартный ортогональный базис $\mathbb{R}^n$ и, более обще, произвольную систему из n ненулевых и ортогональных друг другу векторов.

Пусть $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ – произвольный базис в $\mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$. В силу теоремы о свойствах ранга матрица, столбцами которой являются вектор-столбцы $\bar{y}, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n$, имеет размер $n \times (n + 1)$ и, значит, ее ранг равен n. Поэтому система уравнений

$$a_0 \bar{y} + a_1 \bar{y}^1 + a_2 \bar{y}^2 + \cdots + a_n \bar{y}^n = \bar{0}$$

относительно неизвестных a_j, $j = 0, \ldots, n$, имеет такое решение a_j, $j = 0, \ldots, n$, для которого хотя бы один из a_j не равен нулю. При этом коэффициент a_0 не может равняться нулю (т.к. иначе система $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ оказалась бы линейно зависимой), т.е.

$$\bar{y} = -\frac{a_1}{a_0} \bar{y}^1 - \frac{a_2}{a_0} \bar{y}^2 - \cdots - \frac{a_n}{a_0} \bar{y}^n.$$

Числа $b_i = -\frac{a_i}{a_0}$ в этом равенстве называются коэффициентами разложения вектора $\bar{y}$ по базису $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ (или координатами вектора $\bar{y}$ относительно базиса $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$). Они определяются однозначно, т.к. если $\bar{y} = c_1 \bar{y}^1 + c_2 \bar{y}^2 + \cdots + c_n \bar{y}^n$ для еще одного набора чисел, то

$$\bar{0} = (c_1 - b_1) \bar{y}^1 + (c_2 - b_2) \bar{y}^2 + \cdots + (c_n - b_n) \bar{y}^n$$

и, значит, $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, ..., $c_n = b_n$ из-за линейной независимости системы $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Нетрудно понять, что определенные раньше координаты вектора $\bar{y}$ в действительности являются координатами вектора $\bar{y}$ относительно стандартного базиса $\{\bar{e}^j\}_{j=1}^n$.

Пусть A – матраца размера $n \times n$. Отображение, сопоставляющее каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ вектор $A(\bar{x}) = A\bar{x} =\in \mathbb{R}^n$ называется линейным отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Если определитель матрицы A не равен нулю, то такое отображение называют преобразованием пространства $\mathbb{R}^n$. Как следует из определения линейные отображения обладают следующим (характеристическим) свойством:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y}), \quad A(\alpha\bar{x}) = \alpha A(\bar{x}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Проверим, что при линейных преобразованиях A любой базис пространства $\mathbb{R}^n$ переходит в базис: пусть вектора $\{\bar{x}^j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ линейно независимы. Нужно доказать, что вектора $\{A(\bar{x}^j)\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ также линейно независимы.

$\lhd$: По теореме о ранге матрицы определитель матрицы X, столбцами которой являются вектор-столбцы $\bar{x}^j$, не равен нулю ($|X| \neq 0$). По правилу умножения матриц столбцами матрицы $A \cdot X$ являются вектор-столбцы $A(\bar{x}^j)$. Поэтому, опять же по теореме о ранге матрицы, для доказательства того, что вектора $\{A(\bar{x}^j)\}_{j=1}^n$ линейно независимы достаточно проверить утверждение: $|A \cdot X| \neq 0$. Из свойств определителей матриц следует, что $|A \cdot X| = |A|\,|X| \neq 0$, т.к. $|A| \neq 0$ (A – линейное преобразование). $\rhd$

Отметим еще раз, что рассмотренное линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляет каждому вектор-столбцу $\bar{x}$ вектор-столбец $A \cdot \bar{x}$. При этом и вектор $\bar{x}$ и его образ $A \cdot \bar{x}$ рассматриваются в стандартном базисе, а само отображение, по сути, координатам вектора $\bar{x}$ в стандартном базисе сопоставляет координаты образа $A \cdot \bar{x}$ опять же в стандартном базисе. Зададимся вопросом, как изменяются координаты вектора $\bar{x}$ в произвольном базисе при отображении A?

Пусть $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ – произвольный базис в $\mathbb{R}^n$, $\{\bar{e}^j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, Y – матрица, столбцами которой являются вектор-столбцы $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Как уже отмечалось выше $|Y| \neq 0$ и, значит,

$$Y \cdot Y^{-1} = E \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = E \cdot \bar{x} = Y \cdot Y^{-1} \cdot \bar{x} = Y \cdot \bar{b} = b_1\bar{y}^1 + b_2\bar{y}^2 + \cdots + b_n\bar{y}^n,$$

где Y^{-1} – обратная к Y матрица, E – единичная матрица, $\bar{b} = Y^{-1} \cdot \bar{x}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – координаты вектора $\bar{b}$ относительно стандартного базиса. Полученное равенство $\bar{x} = b_1\bar{y}^1 + b_2\bar{y}^2 + \cdots + b_n\bar{y}^n$ показывает, что координаты вектора $\bar{b}$ относительно стандартного базиса являются также и координатами вектора $\bar{x}$ относительно базиса $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Воспользуемся этим правилом для ответа на поставленный выше вопрос: координаты вектора $Y^{-1} \cdot A\bar{x}$ относительно стандартного базиса совпадают с координатами вектора $A\bar{x}$ относительно базиса $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Но вектор $\bar{x}$ мы также должны задать не стандартными координатами, а координатами в базисе $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$:

$$Y^{-1} \cdot A\bar{x} = Y^{-1} \cdot A \cdot Y \cdot Y^{-1} \cdot \bar{x}.$$

Таким образом, умножению вектора $\bar{x}$ на матрицу A в стандартном базисе соответствует умножение вектора из координат $\bar{x}$ относительно базиса $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ на матрицу $Y^{-1} \cdot A \cdot Y$. Результат умножения представляет из себя вектор-столбец, координаты которого надо воспринимать как координаты вектора $A\bar{x}$ относительно базиса $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$. Иными словами, в любом базисе оператор A следующим образом действует на координаты векторов относительно этого базиса: он вектор-столбец, составленный из этих координат, умножает слева на матрицу $Y^{-1} \cdot A \cdot Y$. Для стандартного базиса, очевидно, $Y = E$.

Пусть A линейное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ называют собственным вектором оператора A, если $A(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Число λ называют собственным значением оператора A.

Определение. Определитель матрицы $(A - tE)$ называют характеристическим многочленом оператора A.

Теорема. а) Характеристический многочлен $P(t)$ оператора A не зависит от выбора базиса, в котором представлена его матрица. б) Любое собственное значение оператора A является корнем $P(t)$ и обратно любой корень $P(t)$ является собственным значением оператора A.

$\lhd$: Коротко доказательство а) является следствием такой выкладки:

$$|Y^{-1}AY - tE| = |Y^{-1}(A - tE)Y| = |Y^{-1}||(A - tE)||Y| = |(A - tE)|.$$

б) если λ — корень $P(t)$, то по теореме о ранге матрицы линейная система n уравнений $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ относительно n неизвестных координат вектора $\bar{x}$ имеет ненулевое решение. Тогда этот ненулевой вектор

$\bar{x}$ и есть собственный вектор, соответствующий собственному числу λ. Обратно: $A(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \Rightarrow (A-\lambda E)\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow |A-\lambda E| = 0$. $\triangleright$
Лемма. Если $\bar{x}$, $\bar{y}$ – собственные вектора оператора A, соответствующие одному собственному значению λ, $c \in \mathbb{R}$, то $\bar{x} + c\,\bar{y}$ – также собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ.
$\triangleleft$: $A(\bar{x}+c\,\bar{y}) = A(\bar{x}) + c\,A(\bar{y}) = \lambda\bar{x} + c\,\lambda\bar{y} = \lambda(\bar{x}+c\,\bar{y})$. $\triangleright$
Лемма. Собственные вектора оператора A, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы.
$\triangleleft$: Предположим $A(\bar{x}_1) = \lambda_1\bar{x}_1$, $A(\bar{x}_2) = \lambda_2\bar{x}_2$, $A(\bar{x}_3) = \lambda_3\bar{x}_3$, все λ_i — различные числа, $\bar{x}_i \neq \bar{0}$, $i = 1, 2, 3$,

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + c_3\bar{x}_3 = \bar{0}$$

и, например, $c_1 \neq 0$. Тогда, применив оператор A к обеим частям этого равенства, получим

$$c_1\lambda_1\bar{x}_1 + c_2\lambda_2\bar{x}_2 + c_3\lambda_3\bar{x}_3 = \bar{0}, \quad c_1(\lambda_1-\lambda_3)\bar{x}_1 + c_2(\lambda_2-\lambda_3)\bar{x}_2 = \bar{0}.$$

Таким образом, вектора $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ пропорциональны — противоречие. Случай большего числа векторов рассматривается аналогично. $\triangleright$

Таким образом, если оператор A, заданный в n-мерном пространстве, имеет n различных собственных значений, то он имеет базис, состоящий из n собственных векторов. Поскольку в любом базисе действие оператора A состоит в умножении вектора координат (относительно этого базиса) на некоторую матрицу, то в базисе из собственных векторов эта матрица обязательно должна иметь диагональный вид (т.е. образом первого базисного вектора должен быть пропорциональный ему вектор, образом второго базисного вектора опять будет пропорциональный ему вектор и т.д.).

Лекция 9.

Квадратичные формы, их связь с симметричными матрицами. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Пусть A – линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Определение. Квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$ называют отображение $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$q(\bar{x}) = (\bar{x}, A(\bar{x})),$$

а отображение A – линейным отображением, задающим эту форму. Форма q называется невырожденной, если $q(\bar{x}) \neq 0$ для $\bar{x} \neq \bar{0}$.

Пусть $\bar{x} = (x_i)$ – столбец координат вектора $\bar{x}$, $a_{i,j}$ – элементы матрицы A.
Замечание. Для любых вектор-столбцов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

$$(\bar{x}, A(\bar{y})) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j}\right) y_j = (\bar{y}, A^*(\bar{x})) = (A^*(\bar{x}), \bar{y}).$$

В частности, $q(\bar{x}) = (\bar{x}, A(\bar{x})) = (\bar{x}, A^*(\bar{x}))$. Таким образом, представление любой квадратичной формы в виде $q(\bar{x}) = (\bar{x}, A(\bar{x}))$ неоднозначно: можно привести много примеров матриц T, для которых $q(\bar{x}) = (\bar{x}, A(\bar{x})) = (\bar{x}, T(\bar{x}))$. Среди всех таких представлений одно играет особую роль. Это представление, в котором матрица T является симметричной.
Определение. Матрица T называется симметричной, если $T = T^*$.
Теорема. Всякая квадратичная форма q может быть задана в виде $q(\bar{x}) = (\bar{x}, T(\bar{x}))$ с симметричной матрицей T; при этом матрица T по форме q определяется единственным образом.

$\triangleleft$: Пусть $q(\bar{x}) = (\bar{x}, A(\bar{x}))$. Тогда, как отмечено выше, $q(\bar{x}) = (\bar{x}, A^*(\bar{x})) = ((\bar{x}, A(\bar{x})) + (\bar{x}, A^*(\bar{x})))/2$. Возьмем $T = (A + A^*)/2$. Получим, $q(\bar{x}) = (\bar{x}, T(\bar{x}))$ и T – симметричная матрица. Предположим $q(\bar{x}) = (\bar{x}, U(\bar{x}))$ – еще одно представление формы q с симметричной матрицей U. Тогда $(\bar{x}, (T-U)\bar{x}) = 0$ для любого $\bar{x}$ и, значит,

$$0 = (\bar{x}+\bar{y}, (T-U)(\bar{x}+\bar{y})) = (\bar{y}, (T-U)(\bar{x})) + (\bar{x}, (T-U)(\bar{y})) = 2(\bar{x}, (T-U)(\bar{y}))$$

из-за симметрии матрицы $T-U$. Если в этом равенстве взять $\bar{x}=(T-U)(\bar{y})$, то получится, что $(T-U)(\bar{y})=\bar{0}$ – нулевой вектор-столбец. Поэтому $T(\bar{y})=U(\bar{y})$ при любом $\bar{y}$. $\triangleright$

В дальнейшем будем рассматривать только такие представления квадратичной формы, в которых A – симметричная матрица.

Теорема. Всякая квадратичная форма q в некотором подходящем базисе может быть задана в виде $q(\bar{x})=(\bar{x},T(\bar{x}))$ с диагональной матрицей T. Такой вид задания называется каноническим (или диагональным) видом задания квадратичной формы.

$\triangleleft$: Доказательство проведем для случая $n=3$, (x_1,x_2,x_3) – координаты вектора $\bar{x}$; общий случай рассматривается по аналогии. Разберем два возможных варианта. Как и прежде $a_{i,j}$ – элементы матрицы A.

1) $a_{i,i}\neq 0$ хотя бы для одного $i\in\{1,2,3\}$. Пусть, скажем, $a_{1,1}\neq 0$. Имеем

$$q(\bar{x})=(\bar{x},A(\bar{x}))=a_{1,1}x_1^2+2x_1(a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3)+a_{2,2}x_2^2+2x_2a_{2,3}x_3+a_{3,3}x_3^2.$$

В этом представлении выделим полный квадрат

$$q(x)=a_{1,1}(x_1+\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2+\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}x_3)^2+g((x_2,x_3)),$$

обозначив $g((x_2,x_3))$ — оставшиеся после этого слагаемые. Они представляют из себя квадратичную форму на двумерных векторах (x_2,x_3). Вводим новые переменные (y_1,y_2,y_3) по правилу $y_1=x_1+a_{1,1}^{-1}(a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3)$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$. В этих переменных $q(\bar{y})=a_{1,1}y_1^2+g((y_2,y_3))$.

2) $a_{i,i}=0$ для $i\in\{1,2,3\}$; если $q(\bar{x})=0$ при всех $\bar{x}$, то $q(\bar{x})=0x_1^2+0x_2^2+0x_3^2$. Пусть $q(\bar{x})\neq 0$ при каком-либо $\bar{x}$. Предположим, например, $a_{1,2}\neq 0$ и

$$q(\bar{x})=2x_1a_{1,2}x_2+2x_1a_{1,3}x_3+2x_2a_{2,3}x_3.$$

Пусть $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $y_3=x_3$. В новых переменных

$$q(\bar{y})=2a_{1,2}(y_1^2-y_2^2)+(2(y_1+y_2)a_{1,3}+2(y_1-y_2)a_{2,3})y_3$$

квадратичная форма $q(\bar{y})$ содержит слагаемые с y_1^2, y_2^2 с ненулевыми коэффициентами. Поэтому к ней можно применить рассуждения варианта 1) и перейти к рассмотрению квадратичной формы с $n=2$. $\triangleright$

Теорема (**без доказательства**). Для всякого линейного оператора A с симметричной матрицей ($A=A^*$) в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется ортогональный базис из n собственных векторов этого оператора.

Следствие. Пусть $q(\bar{x})=(\bar{x},A(\bar{x}))$ с симметричной матрицей A, $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ – ортогональный базис из n собственных векторов оператора A. Тогда в базисе $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$ квадратичная форма $q(\bar{x})$ имеет диагональный вид.

$\triangleleft$: Пусть $\bar{x}=b_1\bar{y}^1+b_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\bar{y}^n$. Тогда

$$q(\bar{x})=(\bar{x},A(\bar{x}))=(b_1\bar{y}^1+b_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\bar{y}^n,A(b_1\bar{y}^1+b_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\bar{y}^n))=$$

$$=(b_1\bar{y}^1+b_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\bar{y}^n,b_1A(\bar{y}^1)+b_2A(\bar{y}^2)+\cdots+b_nA(\bar{y}^n))=$$

$$=(b_1\bar{y}^1+b_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\bar{y}^n,b_1\lambda_1\bar{y}^1+b_2\lambda_2\bar{y}^2+\cdots+b_n\lambda_n\bar{y}^n)=$$

$$=b_1^2\lambda_1(\bar{y}^1,\bar{y}^1)+b_2^2\lambda_2(\bar{y}^2,\bar{y}^2)+\cdots+b_n^2\lambda_n(\bar{y}^n,\bar{y}^n)=b_1^2\lambda_1\cdot|\bar{y}^1|^2+b_2^2\lambda_2\cdot|\bar{y}^2|^2+\cdots+b_n^2\lambda_n\cdot|\bar{y}^n|^2,$$

где $(b_1,\ldots,b_n)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{y}^j\}_{j=1}^n$, $|\bar{y}^j|^2$ – квадрат длины собственного вектора $\bar{y}^j$, λ_j – собственное значение, соответствующее $\bar{y}^j$: $A\bar{y}^j=\lambda_j\bar{y}^j$. $\triangleright$

Лекция 10.

Кривые второго порядка: эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения. Классификация кривых второго порядка на плоскости.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.

Для вывода уравнения эллипса будем считать, что его фокусы – F_1, F_2, расположены на оси Ox и имеют координаты $(-c, 0)^*$, $(c, 0)^*$ соответственно. Пусть M – произвольная точка эллипса. Тогда $F_1M + F_2M = const = 2a > 0$. Если $M = (x, y)^*$, то

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{1}$$

Преобразуем это уравнение

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx, \tag{3}$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{4}$$

Если обозначить $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ и учесть, что $a > c > 0$, то (4) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Проверим, что (5) эквивалентно (1). Мы уже установили, что (1) $\Rightarrow$ (5). Докажем обратное. Если x, y удовлетворяют (5), то $|x| \leqslant a$ и $|cx| \leqslant a^2$. Поэтому выполнено (4), (3) и (2),

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}).$$

Имеем, $|(x-c)^2 + y^2| \leqslant x^2 + 2|cx| + c^2 + y^2 \leqslant a^2 + 2a^2 + c^2 + b^2 = 4a^2$. Поэтому верно (1).

Уравнение (5) называется каноническим уравнением эллипса. Таким образом, мы установили, что эллипс является линией второго порядка. Как следует из (5) эта линия симметрична относительно осей координат. Поэтому, чтобы изобразить эту линию на плоскости, достаточно нарисовать график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, и отразить его относительно осей координат. График этой функции – выпуклая вверх монотонно убывающая линия, проходящая через точки $(0, b)^*$, $(a, 0)^*$. Производная в нуле равна нулю, производная в точке a равна минус бесконечности. На интервале $(0, a)$ эта функция является бесконечно дифференцируемой.

Оси симметрии эллипса называют его осями, их пересечение – центром эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его вершинами, длины $2a$, $2b$ также иногда называют осями эллипса (большой и малой), а длины a, b – его полуосями. Величина $\varepsilon = c/a < 1$ называется эксцентриситетом эллипса. Он может быть найден по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}.$$

С его помощью легко вычисляется расстояние между фокусами: $2c = 2\varepsilon a$.

Иногда оказывается полезным параметрическое представление эллипса:

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi].$$

В его справедливости предлагается убедиться самостоятельно. Частным случаем эллипса является окружность радиуса a: $x^2 + y^2 = a^2$.

Другой линией второго порядка является гипербола. Рассмотрим набор свойств, касающихся этой линии в том же объеме, как и для эллипса. При этом выяснится их полное, в определенном смысле, соответствие друг другу.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина. При этом требуется, чтобы эта разность была бы меньше расстояния между фокусами и не равнялась бы нулю.

Для вывода уравнения гиперболы будем считать, что его фокусы – F_1, F_2, расположены на оси Ox и имеют координаты $(-c, 0)^*$, $(c, 0)^*$ соответственно. Пусть M – произвольная точка гиперболы. Тогда $F_1M - F_2M = \pm 2a$. Если $M = (x, y)^*$, то

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{6}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2, \tag{7}$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2, \tag{8}$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{9}$$

Если обозначить $b = \sqrt{c^2-a^2}$ и учесть, что $c > a > 0$, то (9) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Также как и для эллипса, можно проверить, что (10) эквивалентно (6). Уравнение (10) называется каноническим уравнением гиперболы. Таким образом, мы установили, что гипербола является линией второго порядка. Как следует из (10) она симметрична относительно осей координат. Поэтому, чтобы изобразить эту линию, достаточно нарисовать график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x \geqslant a$, и отразить его относительно осей координат. График этой функции – выпуклая вверх монотонно возрастающая линия, проходящая через точку $(a, 0)^*$. Производная в точке a равна плюс бесконечности. На интервале (a, ∞) эта функция является бесконечно дифференцируемой. Прямая $y = \frac{b}{a}\,x$ является асимптотой функции $y(x)$ при $x \to +\infty$.

Оси симметрии гиперболы называют его осями, их пересечение – центром гиперболы. Точки, в которых гипербола пересекает свои оси, называются его вершинами, длины $2a$, $2b$ также иногда называют осями гиперболы, а длины a, b – его полуосями. Величина $\varepsilon = c/a > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Он может быть найден по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{1+(b/a)^2}.$$

С его помощью легко вычисляется расстояние между фокусами: $2c = 2\varepsilon a$.

Иногда оказывается полезным параметрическое представление гиперболы:

$$x = \pm a\,\mathrm{ch}\,t,\ \ y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

В его справедливости предлагается убедиться самостоятельно.

Еще одной линией второго порядка является парабола. Так называется геометрическое место точек, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой плоскости, называемой директрисой. При этом предполагается, что эта прямая не проходит через фокус.

Для вывода уравнения параболы будем считать, что его фокус F, и директриса имеют вид $F = (p/2, 0)^*$, $x = -p/2$ соответственно. Пусть $M = (x, y)^*$ – произвольная точка параболы. Тогда $FM = x + p/2$. Поэтому

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = x + p/2. \tag{11}$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4, \tag{12}$$

$$y^2 = 2px, \tag{13}$$

Легко показать, что (13) эквивалентно (11). Уравнение (13) называется каноническим уравнением параболы. Как следует из (13) парабола симметрична относительно оси координат Ox. Поэтому, чтобы изобразить эту линию, достаточно нарисовать график функции $y = \sqrt{2px}$, $x \geqslant 0$, и отразить его относительно оси Ox. График этой функции – выпуклая вверх монотонно возрастающая линия, проходящая через точку $(0, 0)^*$. Производная в точке 0 равна плюс бесконечности. На интервале $(0, \infty)$ эта функция является бесконечно дифференцируемой.

Прежде мы уже рассмотрели вопрос о том, как устроены алгебраические кривые 1-го порядка. Перейдем к рассмотрению вопроса о том, какими бывают алгебраические кривые 2-го порядка. Сделанные определения позволяют уравнение любой алгебраической кривой второго порядка записать в виде

$$0 = q(\bar{x}) + (\bar{a}, \bar{x}) + b = (\bar{x}, A(\bar{x})) + (\bar{a}, \bar{x}) + b,$$

где $q(\bar{x})$ – квадратичная форма (ненулевая), A – задающий ее линейный оператор из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ с симметричной матрицей, $\bar{a}$ – фиксированный вектор в $\mathbb{R}^2$, $(\bar{x}, A(\bar{x}))$, $(\bar{a}, \bar{x})$ – скалярные произведения векторов, b – фиксированное число. Как уже отмечалось линейный оператор A, задаваемый симметричной матрицей, обладает ортогональным базисом из собственных векторов $\{\bar{y}^1, \bar{y}^2\}$ и относительно этого базиса значение квадратичной формы $q(\bar{x})$ записывается в виде

$$q(\bar{x}) = z_1^2\mu_1 + z_2^2\mu_2$$

(здесь (z_1, z_2) – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{y}^1, \bar{y}^2\}$, а μ_1, μ_2 – фиксированные числа (такой переход от координат в одном базисе к координатам в другом базисе называют иногда заменой переменных). Таким образом, в базисе $\{\bar{y}^1, \bar{y}^2\}$ уравнение кривой второго порядка записывается в виде

$$z_1^2\mu_1 + z_2^2\mu_2 + z_1c_1 + z_2c_2 + b = 0.$$

Значит, уравнение кривой 2-го порядка путем перехода к новой системе координат и параллельного переноса может быть преобразовано к одному из 9 канонических видов:
нераспадающиеся линии:
- эллипсы $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$,
- гиперболы $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$,
- параболы $y^2 = 2px$,
- мнимые эллипсы $(x/a)^2 + (y/b)^2 = -1$,

распадающиеся линии:
- пара мнимых пересекающихся прямых $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 0$,
- пара действительных пересекающихся прямых $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 0$,
- пара действительных параллельных прямых $x^2 - a^2 = 0$,
- пара мнимых параллельных прямых $x^2 + a^2 = 0$,
- пара действительных совпадающих прямых $x^2 = 0$.

Лекция 11.

Поверхности второго порядка. Канонические уравнения основных поверхностей второго порядка: эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Понятие о классификации поверхностей второго порядка.

Поверхности второго порядка задаются уравнениями

$$a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz + 2a_{1,4}x + 2a_{2,4}y + 2a_{3,4}z + a_{4,4} = 0.$$

При классификации этих поверхностей важную роль играют коэффициенты характеристического полинома матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$: $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Также как и для линий 2-го порядка, уравнения поверхностей 2-го порядка можно привести к одному из следующих 17 канонических видов:
нераспадающиеся поверхности:

Центральные поверхности $\delta \neq 0$

$\delta S > 0$, $T > 0$

– эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, $\Delta < 0$,
– мнимый эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = -1$, $\Delta > 0$,
– мнимый конус $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 0$, $\Delta = 0$,

$\delta S \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$

– однополостный гиперболоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 1$, $\Delta > 0$,
– двуполостный гиперболоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = -1$, $\Delta < 0$,
– действительный конус $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 0$, $\Delta = 0$,

Нецентральные поверхности $\delta = 0$

– эллиптический параболоид $x^2/p + y^2/q = 2z$, $\Delta < 0$,
– гиперболический параболоид $x^2/p - y^2/q = 2z$, $\Delta > 0$,

Цилиндрические и распадающиеся поверхности $\delta = 0$, $\Delta = 0$ (их вид определяется вычислением полуинвариантов – величин, не зависящих от поворота):

$T > 0$

– действительный эллиптический цилиндр $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$,
– мнимый эллиптический цилиндр $(x/a)^2 + (y/b)^2 = -1$,
– пара мнимых пересекающихся плоскостей $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 0$,

$T < 0$

– гиперболический цилиндр $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$,
– пара пересекающихся плоскостей $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 0$,

$T = 0$

– параболический цилиндр $y^2 = 2px$,
– пара мнимых параллельных плоскостей $x^2 + a^2 = 0$,
– пара действительных параллельных плоскостей $x^2 - a^2 = 0$,
– пара действительных совпадающих плоскостей $x^2 = 0$.