Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра ”Высшая математика”

А. С. Кочуров

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(краткий конспект)

Москва 2002 г.

Лекция 1.

1. Некоторые понятия, соглашения и обозначения.

Понятия *множества* и *элемент множества* являются первичными. Первичным понятием является также понятие *пустого множества* ($\emptyset$) (множества, не содержащего элементов).

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ обозначает, что множество (или совокупность) A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$; аналогично, запись $A = \{x_\alpha\}$ обозначает, что совокупность A состоит из элементов x_α, где α — индекс, пробегающий некоторое множество, которое в конкретных случаях всегда указывается (например, $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$).

Запись $A = \{x : \ \ldots\}$ означает, что совокупность A состоит из элементов, обладающих свойством, указанным после двоеточия в фигурных скобках. Так, например, если $a \leqslant b$, то $[a, b] = \{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ – числовой отрезок, если $a < b$, то $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ – интервал (называемый внутренностью отрезка $[a, b]$). Множества $[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x : \ a < x \leqslant b\}$ называют полуотрезками или полуинтервалами. Множества $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) называются также промежутками, точки a и b называются концевыми (или **граничными**), а все их остальные точки – **внутренними** точками. Число $b - a$ называется длиной отрезка $[a, b]$. В случае $a = b$ отрезок $[a, b]$ состоит из одной точки.

Рассматривают также бесконечные промежутки, употребляя для их записи символы бесконечности: $+\infty$ и $-\infty$. При этом считают по определению, что $-\infty < x < +\infty$ для любого действительного числа x:

$$(a, +\infty) = \{x : \ x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x : \ x \geqslant a\}, \quad (-\infty, b) = \{x : \ x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x : \ x \leqslant b\}, \quad (-\infty, +\infty) = \{x : \ -\infty < x < +\infty\}.$$

Эти множества называют бесконечными промежутками.

Пусть теперь заданы пара множеств A и B. Будем использовать обозначения:

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A, $a \notin A$ — элемент a не принадлежит A.

$\rceil A$ (или $\bar{A}$) — отрицание, дополнение множества A, т.е. множество $\{x : \ x \notin A\}$.

$A \subset B$ — A является подмножеством B (т. е. каждый элемент множества A является элементом множества B). При этом не исключается случай $A = B$.

$A \bigcup B$ — объединение (сумма) множеств A и B (т.е. множество $\{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$).

$A \bigcap B$ — пересечение A и B (т.е. множество $\{x : \ x \in A$ и, одновременно, $x \in B\}$). Запись $A \bigcap B = \varnothing$ означает, что множества A и B не пересекаются (или, другими словами, не имеют общих элементов); запись $A \bigcap B \neq \emptyset$ означает, что множества A и B пересекаются (имеют хотя бы один общий элемент).

$A \backslash B$ — разность множеств A и B (т.е. множество $\{x : \ x \in A$ и, одновременно, $x \notin B\}$).

Если задана система множеств A_α, то

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \{x : \ x \in A_\alpha \text{ хотя бы для одного } \alpha\}, \quad \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \{x : \ x \in A_\alpha \text{ для всех } \alpha\}.$$

$\forall$ — для любого, для всех, любой, всякий.

$\exists$ — найдется, существует.

$!$ — единственный.

$\Rightarrow$ — следует, влечет, выполняется.

$\Leftrightarrow$ — равносильно.

Рассмотрим пример применения введенных обозначений.

Пусть A и B — некоторые множества. Тогда $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$:

$\lhd$: Для доказательства требуется установить два факта:

1. $(A \subset B) \Rightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$ (его называют прямым (или необходимым) утверждением и помечают символом $\Rightarrow$),
2. $(A \subset B) \Leftarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$ (его называют обратным (или достаточным) утверждением и помечают символом $\Leftarrow$).

Приступим к доказательству. $\Rightarrow$. Еще раз повторим, прямое утверждение. Дано, что если $a \in A$, то обязательно $a \in B$. Необходимо проверить, что в этом случае из $b \notin B$ (т.е. $b \in \bar{B}$) обязательно вытекает $b \notin A$ (т.е. $b \in \bar{A}$).

Применим метод рассуждения "от противного". Его схема основывается на том, что всегда выполняется в точности одно из двух: или а) $b \in A$, или б) $b \notin A$. Предположение о выполнении а) приводит к противоречию. Поэтому выполняется б). Это и называется методом рассуждения "от противного". Запишем все посылки, которые должны быть выполнены при выполнении а):

– исходное условие: если $a \in A$, то обязательно $a \in B$,

– условие: $b \notin B$,

– предположение а): $b \in A$.

Пользуясь предположением и исходным условием последовательно, получаем $b \in B$ – противоречие с условием $b \notin B$. Т.е. предположение о выполнимости а) привело к противоречию. Значит исходное условие и условие $b \notin B$ обязательно влекут $b \notin A$. Это и требовалось установить при доказательстве прямого утверждения.

Доказательство обратного утверждения проводится аналогично. Запишем его коротко. $\Leftarrow$. Дано: $\bar{B} \subset \bar{A}$, $a \in A$. Предположим $a \notin B$. Тогда по первому условию $a \notin A$ — противоречие со вторым условием. Поэтому предположение неверно, т.е. $\bar{B} \subset \bar{A}$, $a \in A$ влечет $a \in B$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

В дальнейшем оформление доказательства будем записывать по возможности более коротко.

1. Вещественные числа.

Будем обозначать множество натуральных чисел символом $\mathbf{N}$, целые числа — символом $\mathbb{Z}$, рациональные числа — символом $\mathcal{Q}$, вещественные числа — символом $\mathbb{R}$. Приведем еще одно рассуждение, демонстрирующее метод доказательства "от противного": проверим, что корень $x = \sqrt{2}$ уравнения $x^2 - 2 = 0$ не может быть рациональным числом. Предположим обратное $\sqrt{2} = p/q$, где $p, q \in \mathbf{N}$ не имеют общих множителей, и придем к противоречию. Действительно, если $\sqrt{2} = p/q$, то $p^2 = 2q^2 \;\Rightarrow p$ — четно, $p = 2p_1$, $p_1 \in \mathbf{N}$, $(2p_1)^2 = 2q^2$, $2(p_1)^2 = q^2 \;\Rightarrow q$ — четно и противоречие получено, т.к. вопреки предположению p и q имеют общий множитель 2. Значит предположение о возможности представления числа $\sqrt{2}$ рациональным числом неверно.

Множество вещественных чисел обладает следующими свойствами:

1. Свойство упорядоченности. Два любых вещественных числа a и b удовлетворяют одному и только одному из трех соотношений

$$a < b, \; a = b \text{ или } a > b;$$

при этом, если $a < b$, $b < c$, то $a < c$. Запись $a \leqslant b$ означает, что либо $a = b$, либо $a < b$. Соотношения $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$ называются неравенствами. Неравенства $a < b$, $a > b$ называются строгими.

2. Свойства операции сложения.

Для любой пары вещественных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их суммой и обозначаемое $a + b$, так что при этом выполняются

2а. коммутативность сложения: $a + b = b + a$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

2б. ассоциативность сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2в. существование 0: имеется элемент 0, удовлетворяющий равенству $a + 0 = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

2г. существование противоположного элемента: для любого $a \in \mathbb{R}$ имеется $-a$, удовлетворяющий равенству $a + (-a) = 0$.

2д. если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

Для любой пары вещественных чисел a и b величина $a + (-b)$ называется их разностью и обозначается $a - b$.

3. Свойства операции умножения.

Для любой пары вещественных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их произведением и обозначаемое ab, так что при этом выполняются

3а. коммутативность умножения: $ab = ba$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

3б. ассоциативность умножения: $(ab)c = a(bc)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3в. существование 1: имеется элемент 1, удовлетворяющий равенству $a \cdot 1 = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

3г. существование обратного элемента: для любого $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, имеется $1/a$, удовлетворяющий равенству $a \cdot (1/a) = 1$.

3д. если $a < b$, то $ac < bc$ для любого $c > 0$. Если же $c < 0$, то $ac > bc$.

Для любой пары вещественных чисел a и $b \neq 0$ величина $a(1/b)$ называется частным от деления a на b и обозначается a/b.

4. Связь операций сложения и умножения.

Дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$ для любой тройки вещественных чисел a, b, c.

5. Свойство Архимеда.

Для любого $a \in \mathbb{R}$ найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $n > a$.

6. Свойство непрерывности вещественных чисел.

Система числовых отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ называется системой вложенных отрезков, если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

Принцип вложенных отрезков (*принцип непрерывности Кантора*). Для любой системы вложенных отрезков найдется хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

Определение 1. Пусть задана система отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Говорят, что длина отрезков $[a_n, b_n]$ стремится к нулю с возрастанием $n = 1, 2, \ldots$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \;:\; \forall n > n_\varepsilon, n \in \mathbf{N} \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

Теорема 1. $/\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — система вложенных отрезков, по длине стремящихся к нулю/ $\Rightarrow\; \exists! \; x \;:\; x \in [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbf{N}$.

$\triangleleft$: (Принцип вложенных отрезков) $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\; x \in [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbf{N}$. Проверим, что другого такого числа нет. Воспользуемся методом доказательства "от противного". Предположим $\exists y \in \mathbb{R} :\; y \in [a_n, b_n] \; \forall n \in \mathbf{N}$, $y \neq x$ и придем к противоречию. Обозначим $\varepsilon_0 = |x-y| > 0$. Так как $x, y \in [a_n, b_n]$, то

$$\varepsilon_0 = |x-y| \leqslant |b_n - a_n|, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{$*$}$$

По предположению $\varepsilon_0 > 0$, значит, по определению 1) найдется $n_0 \in \mathbf{N}:\ \forall n > n_0,\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon_0$ — противоречит $(*)$:

$$\varepsilon_0 = |x-y| \leqslant |b_n - a_n| < \varepsilon_0,$$

если $n > n_0, n \in \mathbf{N}$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangleright$

Иногда для изображения вещественных чисел используют представления в виде бесконечных десятичных дробей: так, например, $x \in [0,1)$ записывают в виде $(0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots)$, где каждое α_n — одна из цифр 0, 1, ... , 9; при этом имеют в виду, что

$$x \in [c_n, c_n + 1/10^n), \quad c_n = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

при любом $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, c_n — рациональные числа, $n \in \mathbf{N}$, $\{[c_n, c_n + 1/10^n]\}_{n=1}^{\infty}$ – система вложенных отрезков, длина отрезков $[c_n, c_n + 1/10^n]$ стремится к нулю с возрастанием $n = 1, 2, \ldots$.

Понятие функции.

Будем употреблять выражение "пусть $f(x)$ – функция переменного x", подразумевая под этим, что заданы

– множество X, называемое областью определения f. Переменная x принимает свои значения из X; она называется независимой переменной.

– множество Y, называемое областью значений f. Переменная $y = f(x)$ принимает свои значения на Y; она называется зависимой переменной.

– собственно соответствие f, которое каждому $x \in X$ сопоставляет, и причем единственным образом, элемент $y = f(x) \in Y$.

Коротко это записывается так: $f:\ X \to Y$. В качестве X первое время будут выступать либо а) произвольные числовые промежутки (конечные или бесконечные), либо б) конечные объединения числовых промежутков, либо в) натуральные числа. В последнем случае вместо того чтобы сказать, что имеется функция, зависящая от переменного n, принимающего натуральные значения, говорят, что задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если $X_1 \subset X$, $X_1 \neq X$, то запись $f|_{X_1}$ означает ограничение исходной функции f, определенной на X, на подмножество X_1. При этом принято различать функции f и $f|_{X_1}$ и считать, что с заданием f заданы и всевозможные $f|_{X_1}$.

Часто саму функцию обозначают одной буквой f или $f(\cdot)$, а через $f(x)$ — ее значение на элементе x.

Если $Y \subset \mathbb{R}$, то обычно говорят, что задана числовая функция или, соответственно, числовая последовательность. Над числовыми функциями можно производить различные арифметические операции. Так, если функции f и g заданы на одном и том же множестве X, $c \in \mathbb{R}$, то функции cf, $f+g$, fg определяются как числовые функции, заданные на X, и принимающие, соответственно, значения $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ на каждом элементе $x \in X$. Если к тому же $g(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то f/g на каждом элементе $x \in X$ определяется как $f(x)/g(x)$.

Определение 2. Числовая функция f, определенная на X, называется *ограниченной сверху на* X, если

$$\exists A \in \mathbb{R}:\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Если же $\exists A \in \mathbb{R}:\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geqslant A$, то эта функция называется *ограниченной снизу на* X. Числовая функция f ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу называется просто *ограниченной на* X.

Графиком функции $f:\ X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, называется множество

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)):\ x \in X\}$$

точек на плоскости.

Определение 3 (предела функции в точке x_0). Пусть числовая функция f определена на $(a,b) \subset \mathbb{R}$, кроме быть может точки $x_0 \in (a,b)$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это записывается так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4 (предела функции в плюс бесконечности $+\infty$). Пусть $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в бесконечно удаленной точке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, такое что для $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко:

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}\ \forall x:\ x > M\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично дается определение предела функции в минус бесконечности $-\infty$. Дадим еще определение предела последовательности:

Определение 5 (предела последовательности). Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M = M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих условию $n > M$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, и коротко:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbf{N}:\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > M\ \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Определения 3-5 предела функции и последовательности иногда называют определением предела в терминах эпсилон–дельта.

Лекция 2.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Обозначим через $\mathcal{O}'_\delta(x_0)$ — множество $\{x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$, через $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ — множество $\{x \in \mathbb{R}:\ |x - x_0| < \delta\}$. Первое множество называют проколотой δ-окрестностью точки x_0, второе — просто δ-окрестностью x_0. Повторим некоторые из определений предыдущей лекции.

Определение 1 (предела функции в точке x_0). Пусть числовая функция f определена на $(a,b) \subset \mathbb{R}$, кроме, быть может, точки $x_0 \in (a,b)$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это записывается так:

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathcal{O}'_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание. В этом определении условие $\forall\varepsilon > 0$ часто заменяют условием $\forall\varepsilon \in (0,\epsilon_0)$, где $\epsilon_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Например, можно выбрать $\epsilon_0 = 1$ или $\epsilon_0 = 1/3$. Нетрудно проверить, что при этом получаются эквивалентные определения.

Определение 2 (предела функции в плюс бесконечности $+\infty$). Пусть $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f в бесконечно удаленной точке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, такое что для $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко:

$$A = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbb{R}\ \forall x:\ x > M\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично дается определение предела функции в минус бесконечности $-\infty$.

Определение 3 (предела последовательности). Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M = M(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих условию $n > M$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, и коротко:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) \in \mathbf{N}:\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > M\ \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Определения 1-3 предела функции и последовательности иногда называют определением предела в терминах эпсилон–дельта. Нетрудно видеть, что понятие предела, данное в определениях 1)-3) однозначно (т.е. предел, если он имеется, определен однозначно). Проверим это утверждение для предела функции в точке:

Теорема 1 (о единственности предела). $/A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ B \neq A/ \Rightarrow B \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

$\lhd$: Применяем метод доказательства "от противного". Допустим $B = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и придем к противоречию. Возьмем $\varepsilon_0 = |B - A|/3 > 0$. Тогда

– $\exists\delta_1 > 0:\ \forall x \in \mathcal{O}'_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0$,

– $\exists\delta_2 > 0:\ \forall x \in \mathcal{O}'_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon_0$.

Поэтому для $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ и всех $x \in \mathcal{O}'_\delta(x_0)$ неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon_0$, $|f(x) - B| < \varepsilon_0$ выполняются одновременно. Но этого не может быть:

$$|B - A| = |B - f(x) + f(x) - A| \leqslant |f(x) - B| + |f(x) - A| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2/3|B - A|,$$

если $x \in \mathcal{O}'_\delta(x_0)$, – противоречие получено. $\rhd$

Свойства пределов функций.

Теорема 2 (об ограниченной сходимости). $/x_0 \in (a,b),\ f,\varphi,\psi : (a,b)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$. Пусть $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ для $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A/ \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

$\lhd$: Воспользуемся определением предела. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно. По определению 3)

– $\exists\delta_1 > 0:\ \forall x \in \mathcal{O}'_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon$,

– $\exists\delta_2 > 0:\ \forall x \in \mathcal{O}'_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow |\psi(x) - A| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} > 0$. Тогда для всех $x \in \mathcal{O}'_\delta(x_0)$ выполняются неравенства

$$\psi(x) - A < \varepsilon \quad (1) \text{ и } -\varepsilon < \varphi(x) - A \quad (2).$$

Поэтому, из условий теоремы и (1) следует $f(x)-A<\psi(x)-A<\varepsilon$, если $x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$.
Аналогично, если $x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$, из условий теоремы и (2) следует $-\varepsilon<\varphi(x)-A<f(x)-A$. Таким образом, для $x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$

$$-\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon. \quad \triangleright$$

Теорема 3. $/x_0\in(a,b)$, $f,g:(a,b)\backslash\{x_0\}\to\mathbb{R}$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B/\Rightarrow$

а) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$,

б) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=AB$,

в) если $B\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(1/g(x))=1/B$ (**без доказательства**).

$\triangleleft$: Пользуемся определением предела. а) 1) Функция $f+g$ определена на $(a,b)\backslash\{x_0\}$. 2) Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta>0$ так, чтобы одновременно

$\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)\Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon/2$,

$\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)\Rightarrow\ |g(x)-B|<\varepsilon/2$.

Тогда $\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)\Rightarrow$

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

что доказывает а). Доказательство б) повторяет доказательство пункта а): 1) Функция $f\cdot g$ определена на $(a,b)\backslash\{x_0\}$. 2) Зафиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)\Rightarrow\ |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1},\quad |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}. \tag{1}$$

Нам потребуется неравенство, являющееся следствием (1): так как $|f(x)-A|<1$ для $x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$, то $|f(x)|<|A|+1$. Пусть теперь $x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$. Тогда

$$|f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB|\leqslant|f(x)g(x)-f(x)B|+|f(x)B-AB|<$$

$$<\frac{\varepsilon(|A|+1)}{|A|+|B|+1}+\frac{\varepsilon|B|}{|A|+|B|+1}=\varepsilon,$$

что доказывает б).
Докажем в). 1) Проверим, что функция $1/g(x)$ определена на $\mathcal{O}'_{\delta_0}(x_0)$ при некотором $\delta_0>0$. Для этого возьмем $\varepsilon_0=|B|/2>0$ и, согласно определению 3), подберем $\delta_0>0$, чтобы $\forall x\in\mathcal{O}'_{\delta_0}(x_0)\Rightarrow\ |g(x)-B|<\varepsilon_0=|B|/2$. Поскольку $||g(x)|-|B||\leqslant|g(x)-B|$, то

$$||g(x)|-|B||<|B|/2,\quad -|B|/2<|g(x)|-|B|,\quad |B|/2<|g(x)|, \tag{2}$$

если $x\in\mathcal{O}'_{\delta_0}(x_0)$. Это и означает, что $g(x)\neq 0$ для всех $x\in\mathcal{O}'_{\delta_0}(x_0)$. 2) Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta_1>0$ так, чтобы

$$\forall x\in\mathcal{O}'_{\delta_1}(x_0)\Rightarrow\ |g(x)-B|<\frac{\varepsilon B^2}{2}. \tag{3}$$

Пусть $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}>0$. Тогда $\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0)$ неравенства (2) и (3) выполняются одновременно. Поэтому

$$|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}|=\frac{|g(x)-B|}{|g(x)B|}<\frac{\varepsilon B^2}{2}\frac{2}{B^2}=\varepsilon,\quad\forall x\in\mathcal{O}'_\delta(x_0).\quad\triangleright$$

Замечание. Теоремы 1, 2, 3 остаются справедливыми, если в них изменить $\lim\limits_{x\to x_0}$ (из определения 1)) на $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (из определения 2))или на $\lim\limits_{n\to\infty}$ (из определения 3)). В дальнейшем будем применять эти теоремы, для всех перечисленных пределов.

Первый и второй замечательные пределы.

Следствие 1 (1-й замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\triangleleft$: Применяем теоремы 2 и 3. 1) Функция $\frac{\sin x}{x}$ определена на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. 2) Из сравнения площадей двух треугольников и кругового сектора следуют неравенства:

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\sin x}{2\cos x},\qquad x\in(0,\pi/2).$$

Их можно переписать в виде $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ или

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})<\frac{x^2}{2},$$

для $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, а, значит, и для $x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$. Применяем теоремы 2 и 3б) в точке $x_0=0$. $\triangleright$

Определим последовательность отрезков, задав их концы. Пусть $a_n = (1+1/n)^n$, $b_n = (1+1/n)^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Проверим неравенства: $a_{n-1} < a_n$ и $b_n < b_{n-1}$. Действительно,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1}\left(1 - n(1 - \frac{n^2-1}{n^2})\right) = 1,$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} > \frac{n-1}{n}\left(1 + (n+1)(\frac{n^2}{n^2-1} - 1)\right) = 1.$$

Таким образом, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$, т.е. система отрезков $[a_n, b_n]$ – вложенная. Нетрудно проверить, что длина отрезков $[a_n, b_n]$ стремится к нулю с возрастанием $n = 1, 2, \ldots$. По принципу непрерывности Кантора (теореме 1 предыдущей лекции) имеется единственная точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Эта точку обозначают символом $e \approx 2.718281828459045$.

Следствие 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

$\lhd$: Пользуемся определением предела и понятием "длина системы отрезков стремится к 0". Согласно последнему для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ такой, что

$$\forall n > n_\varepsilon, n \in \mathbf{N} \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

По построению $[a_n, e] \subset [a_n, b_n]$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$\forall n > n_\varepsilon, n \in \mathbf{N} \Rightarrow |a_n - e| < |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

что и требовалось проверить. $\rhd$

Следствие 3 (2-й замечательный предел). $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

$\lhd$: Пользуемся определением предела и теоремой 3. По теореме 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ так, чтобы

$\forall n > n_\varepsilon,\ n \in \mathbf{N},\ \Rightarrow |(1+\frac{1}{n+1})^n - e| < \varepsilon, \quad |(1+\frac{1}{n})^{n+1} - e| < \varepsilon.$

Пусть $x > n_\varepsilon + 1$. Выберем $n \in \mathbf{N}$, чтобы $n \leqslant x < n+1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

и, значит,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Поэтому

$$|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$$

для $x > n_\varepsilon + 1$. $\rhd$

Лекция 3.

Определение 1. (одностороннего предела функции). $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. $A = \lim\limits_{x\to+a} f(x)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathcal{O}'_\delta(a),\ x > a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение $\lim\limits_{x\to-b} f(x)$ делается аналогично (сделать самостоятельно).

Определение 2. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если при некотором $\delta > 0$ эта функция определена в окрестности $\mathcal{O}'_\delta(a)$ и

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0.$$

Аналогично определяются бесконечно малая функция при $x \to +a$ и $x \to -a$, а также при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (сделать самостоятельно).

Замечание 1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то по определению предела получим $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$, т.е.

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$. Верно также и обратное: если $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Замечание 2. Функция $\alpha(x) \equiv 0$ является бесконечно малой при $x \to a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Основные теоремы о бесконечно малых являются, в основном, следствиями теорем о свойствах предела функции:

Следствие 1. (теоремы о пределе суммы) Сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Следствие 2. (теоремы о пределе произведения) Произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Эти следствия справедливы также для сумм и произведений любого конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций, для бесконечно малых при $x \to \pm a$ и для бесконечно малых при $x \to \pm\infty$.

Говорят, что функция $f(x)$ ограничена при $x \to a$, если при некотором $\nu > 0$ эта функция определена и ограничена в окрестности $\mathcal{O}_\nu(a)$.

Теорема. /Функция $f(x)$ ограничена, а функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to a$/ $\Rightarrow$ $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно мала при $x \to a$.

$\lhd$: Согласно определению ограниченности выберем $\nu > 0$ и $M > 0$ так, чтобы при $x \in \mathcal{O}'_\nu(a)$ выполнялось условие $|f(x)| < M$.

Далее, по определению предела возьмем $\varepsilon > 0$ произвольно и подберем для него $\delta > 0$ так, чтобы при $x \in \mathcal{O}'_\delta(a)$ выполнялось условие $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$.

Тогда для $\rho = \min\{\delta, \nu\}$ при $x \in \mathcal{O}'_\rho(a)$ выполняются неравенства

$$|\alpha(x)f(x)| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)f(x)) = 0$. $\rhd$

Для обозначения того, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ используют запись: $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ при $x \to a$. Запись $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x))$ при $x \to a$ означает, что $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \bar{o}(1)$ при $x \to a$ (как и выше вместо $x \to a$ может присутствовать односторонний предел или предел в бесконечно удаленной точке).

Знак равенства в этих обозначениях принимает несвойственную ему роль, поскольку слева в них стоит функция $\alpha(x)$, а справа – множество $\bar{o}(1)$ функций. Это проявляется, например, в двух таких примерах:

1. если $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, то $2\alpha(x) = \bar{o}(1)$,
2. можно написать $\alpha(x) = \bar{o}(1)$ и не принято писать $\bar{o}(1) = \alpha(x)$.

Таким образом, знак "$=$" служит в этих обозначениях как заменитель знака "$\in$".

Введенные правила оформления часто помогают значительно сократить выкладки, например, при вычислении пределов. Такова, к примеру, запись

$$\sin x = x + \bar{o}(x)$$

(эквивалентная первому замечательному пределу) и ей подобные. С ее помощью вычисление некоторых пределов может быть организовано следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x + \bar{o}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5 + \bar{o}(1)}{1} = 5.$$

Однако при использовании обозначений $\bar{o}(1)$ необходимо соблюдать определенную осторожность, связанную в основном с возможным появлением неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и других.

Определение 3. (непрерывности функции в точке x_0). Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. На языке ε–δ это выглядит так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 4 (точек разрыва I-го и II-го рода). Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется разрывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если она не является непрерывной в точке x_0. Если x_0 – точка разрыва функции f и существуют конечные пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to -x_0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x\to +x_0} f(x),$$

то x_0 называют точкой разрыва I-го рода. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то x_0 называют точкой устранимого разрыва. Точками разрыва II-го рода называют точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I-го рода.

Теорема 1 (о свойствах функций, непрерывных в точке). /функции f и g непрерывны в точке x_0/ $\Rightarrow$

а) функции $c \cdot f$ (с — константа), $f + g$, $f \cdot g$ непрерывны в точке x_0,

б) если $g(x_0) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке x_0.

$\lhd$: Эта теорема является следствием теоремы о свойствах предела функций. $\rhd$

Пусть $f : [a, b] \to [A, B]$, $g : [A, B] \to \mathbb{R}$. Тогда функцию $h = g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$, определенную правилом $h(x) = g(f(x))$, называют сложной функцией.

Теорема 2 (о непрерывности сложной функции). /функция f непрерывна в точке x_0, функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$/ $\Rightarrow$ сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.
$\lhd$: Дважды воспользуемся определением непрерывности. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\forall y \in \mathcal{O}_\eta(y_0) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

По выбранному η подберем $\delta = \delta(\eta) > 0$ так, чтобы

$$\forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta.$$

Поэтому

$$\forall x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}_\eta(f(x_0)) \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

Замечание. Утверждение этой теоремы можно записать в виде формулы

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big),$$

Совершенно аналогично устанавливается
Теорема 3. /$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, функция g непрерывна в точке y_0/ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.
$\lhd$: Пользуемся определением непрерывности и определением предела. $\rhd$
Определение 5 (непрерывности функции). Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на (a, b), если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a, b)$. Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на (a, b) и

$$f(a) = \lim_{x \to +a} f(x), \quad f(b) = \lim_{x \to -b} f(x),$$

то f называется непрерывной на $[a, b]$.

Символы $C((a, b), \mathbb{R})$ и $C([a, b], \mathbb{R})$ используют для обозначения классов всех таких функций.
Теорема 4. /$f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$, $f(a) \leqslant 0$, $f(b) \geqslant 0$/ $\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] : \ f(x_0) = 0$.
$\lhd$: Применяем метод деления отрезка пополам. По индукции строим последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ отрезков. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c = (a_1 + b_1)/2$. Тогда $f(a_1) \leqslant 0$, $f(b_1) \geqslant 0$. Если $f(c) \leqslant 0$, положим $a_2 = c$, $b_2 = b_1$, если $f(c) > 0$, положим $a_2 = a_1$, $b_2 = c$. В любом случае имеем

$$1)\ [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \quad 2)\ f(a_2) \leqslant 0, f(b_2) \geqslant 0, \quad 3)\ b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2.$$

Предположим отрезок $[a_n, b_n]$, $n \geqslant 2$, со свойствами

$$1)\ [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad 2)\ f(a_n) \leqslant 0, f(b_n) \geqslant 0, \quad 3)\ b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2$$

построен. Положим $c = (a_n + b_n)/2$. Если $f(c) \leqslant 0$, то $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$, если $f(c) > 0$, положим $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c$. Тогда

$$1)\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad 2)\ f(a_{n+1}) \leqslant 0, f(b_{n+1}) \geqslant 0, \quad 3)\ b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2.$$

Последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ построена. Согласно 1) эта последовательность является вложенной; согласно 3) $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^n$, т.е. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ по длине стремится к нулю. По принципу вложенных отрезков найдется точка $x_0 \in \mathbb{R}$, общая всем построенным отрезкам. Методом доказательства "от противного" убедимся, что $f(x_0) = 0$. Предположим, к примеру, $f(x_0) > 0$. Рассуждения будем проводить для случая $x_0 \in (a, b)$, случай $x_0 = a$ и $x_0 = b$ рассматриваются аналогично. Воспользуемся непрерывностью f: по заданному $\varepsilon_0 = f(x_0) > 0$ подберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы

$$\forall x \in \mathcal{O}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0.$$

Так как последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ по длине стремится к нулю, найдется $m \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall n \geqslant m,\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow |b_n - a_n| < \delta_0$. Так как $x_0 \in [a_n, b_n]$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то $|x_0 - a_m| < \delta_0$. Это означает, что $a_m \in \mathcal{O}_{\delta_0}(x_0)$. Воспользуемся условием 2):

$$f(x_0) \leqslant f(x_0) - f(a_m) = |f(x_0) - f(a_m)| < \varepsilon_0 = f(x_0)$$

– противоречие. $\rhd$
Следствие (теорема Коши). /$f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $C \in [A, B]$/ $\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] : \ f(x_0) = C$.
$\lhd$: Функция $g(x) = f(x) - C$ принадлежит $C([a, b], \mathbb{R})$. $\rhd$

Пусть $f(\cdot) \in C(\langle a, b\rangle, \mathbb{R})$, $\langle a, b\rangle$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Можно показать, что образ $\langle a, b\rangle$ при отображении f, совпадающий по теореме Коши с

$$\bigcup_{x \in \langle a, b\rangle} [f(x_0), f(x)] = f(\langle a, b\rangle),$$

также является промежутком на $\mathbb{R}$ (быть может бесконечным). Справедлива следующая

Теорема 5. (теорема Вейерштрасса). (**без доказательства**)$/f \in C([a,b],\mathbb{R})/ \Rightarrow$

$f([a,b]) = [A,B] \subset \mathbb{R}$,

означающая, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ числовая функция ограничена на $[a,b]$ и достигает там своих минимального и максимального значений. Для числовых функций, непрерывных на других промежутках, это, вообще говоря, уже не так.

Определение 6 (строгой монотонности функции). Функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называется строго возрастающей на промежутке $\langle a,b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. f называется строго убывающей, если является строго возрастающей функция $(-f)$. Функции строго возрастающие или строго убывающие называются просто строго монотонными.

Пусть $f : [a,b] \to [A,B]$, $g : [A,B] \to \mathbb{R}$ таковы, что сложная функция $h = g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $h(x) = x$ при любом $x \in [a,b]$. Тогда функцию g называют обратной к f функцией и обозначают f^{-1}.

Теорема 6 (**без доказательства**). $/f \in C([a,b],\mathbb{R})$ — строго возрастает, $f(a) = A$, $f(b) = B/ \Rightarrow f^{-1}$ непрерывна и строго возрастает на $[A,B]$.

$\lhd$: Пользуемся определением строгой монотонности функции. По теореме Коши и определению строгой монотонности $f([a,b]) = [A,B]$. Это означает, что для каждого $y_0 \in [A,B]$ при некотором $x_0 \in [a,b]$

$$f(x_0) = y_0.$$

По определению строгой монотонности, если $x_1 \neq x_0$, то $f(x_1) \neq f(x_0)$, т.е. элемент $x_0 \in [a,b]$ со свойством $f(x_0) = y_0$ определен однозначно. Выберем его в качестве значения $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1} : [A,B] \to \mathbb{R}$.

Если $y_1 < y_2$, $y_1,\ y_2 \in [A,B]$, то для $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ не могут выполняться ни $x_1 = x_2$ (т.к. f — однозначно определенная функция), ни $x_1 > x_2$ (т.к. f — строго возрастающая функция). Поэтому $x_1 < x_2$ и f^{-1} строго возрастает на $[A,B]$.

Остается проверить непрерывность отображения f^{-1}. Пусть $y_0 \in (A,B)$ (случаи $y_0 = A$ и $y_0 = B$ рассматриваются аналогично), $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(x_0) \subset [a,b]$. Тогда, рассуждая как в начале доказательства,

$$y_0 \in f([x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0]) = [f(x_0 - \varepsilon_0), f(x_0 + \varepsilon_0)].$$

Положим

$$\delta_0 = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon_0), f(x_0 + \varepsilon_0) - y_0\} > 0$$

и, значит, $\mathcal{O}_{\delta_0}(y_0) \subset [f(x_0 - \varepsilon_0), f(x_0 + \varepsilon_0)]$. Это включение можно записать в виде

$$f^{-1}\left(\mathcal{O}_{\delta_0}(y_0)\right) \subset f^{-1}\left([f(x_0 - \varepsilon_0), f(x_0 + \varepsilon_0)]\right) \subset [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0],$$

где последний знак "$\subset$" не может, вообще говоря, быть заменен на знак "$=$" пока не обоснована непрерывность f^{-1}. Таким образом, $f^{-1}\left(\mathcal{O}_{\delta_0}(y_0)\right) \subset [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0]$ и, другими словами, $f^{-1}(y) \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0]$ для любого $y \in \mathcal{O}_{\delta_0}(y_0)$. Поэтому, по произвольно выбранному достаточно малому $\varepsilon_0 > 0$ мы построили $\delta_0 > 0$ так, что

$$\forall y \in \mathcal{O}_{\delta_0}(y_0) \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon_0.$$

Это и означает непрерывность отображения $f^{-1}(\cdot)$ в точке y_0. $\rhd$

Совершенно аналогично устанавливается

Теорема 7. $/f \in C((a,b),\mathbb{R})$ — строго возрастает на интервале (a,b) (конечном или бесконечном), $\langle A,B\rangle = f((a,b))$ — образ отображения $f/ \Rightarrow f^{-1}$ определена на интервале (A,B) (быть может бесконечном) и $f^{-1} \in C((A,B),\mathbb{R})$ — строго возрастает.

Непрерывность элементарных функций.

1. Из теоремы о свойствах функций, непрерывных в точке следует, что всякий полином $P(\cdot)$ непрерывен на области определения — $\mathbb{R}$.

2. Из этой же теоремы следует, что всякая рациональная функция $R = P/Q$, P и Q — полиномы, непрерывна на области определения — числовой прямой, из которой удалены точки, где $Q(x) = 0$.

3. Непрерывность показательной функции a^x, $a > 0$, на области определения $\mathbb{R}$ следует из свойств этой функции и доказательства того, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ (самостоятельно): если $x_0 \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} (a^{(x-x_0)} \cdot a^{x_0}) = a^{x_0} \cdot \lim_{x\to 0} a^x = a^{x_0}.$$

4. Функция $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, на области определения $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ является обратной к строго монотонной функции a^y, $y \in \mathbb{R}$. По теореме 7 отсюда следует непрерывность $\log_a x$ на $\mathbb{R}_+$.

5. Степенная функция x^a, $a \in \mathbb{R}$, определена на $\mathbb{R}_+$ и представима в виде $x^a = e^{a\ln x}$. По теореме о непрерывности сложной функции отсюда следует ее непрерывность на $\mathbb{R}_+$.

6. Функция $\sin(\cdot)$ определена на $\mathbb{R}$. Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin(\frac{x - x_0}{2})||\cos(\frac{x + x_0}{2})| \leqslant |x - x_0|.$$

По теореме об ограниченной сходимости отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$. Поэтому $\sin(\cdot) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

7. $\cos(\cdot) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{tg}(\cdot) \in C((-\pi/2,\pi/2),\mathbb{R})$, $\mathrm{ctg}(\cdot) \in C((0,\pi),\mathbb{R})$. Эти утверждения являются следствием определений, свойств функции $\sin(\cdot)$, пункта 6 и теорем 1, 2.

8. Функция $\sin(\cdot) \in C([-\pi/2,\pi/2],\mathbb{R})$ — строго возрастает. По теореме 6 обратная функция $\arcsin(\cdot) \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Точно также

$\arccos(\cdot) \in C([-1,1],\mathbb{R})$, $\mathrm{arctg}(\cdot) \in C((-\infty,\infty),\mathbb{R})$, $\mathrm{arcctg}(\cdot) \in C((-\infty,\infty),\mathbb{R})$.

Лекция 4.

Производная, её геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Как и понятие непрерывности, определение производной функции рассматривается в каждой точке области определения функции независимо. Пусть сначала $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $x_0\in(a,b)$. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то его называют производной функции f в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или $\frac{d}{dx}f(x_0)$. В точках a и b рассматривают так называемые односторонние производные: f имеет одностороннюю производную в точке a, если существует предел

$$\lim_{x\to+a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Его иногда обозначают $f'_+(a)$, желая подчеркнуть, что производная односторонняя, иногда же, когда это не существенно, различия не делают и эту производную также обозначают $f'(a)$. О точках, где функция имеет производную говорят, что в них функция дифференцируема. Пусть

$D(x_0)$ — класс функций дифференцируемых в точке x_0,

$D(a,b)$ — класс функций дифференцируемых в каждой точке $x_0\in(a,b)$,

$D[a,b]$ — класс функций дифференцируемых в каждой точке $x_0\in(a,b)$ и обладающих односторонними производными в точках a и b.

Чтобы понять, в чем состоит геометрический смысл производной, рассмотрим уравнение секущей, проходящей через две точки графика $\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}$ функции f. Одна точка — это $(x_1,f(x_1))$, другая — $(x_0,f(x_0))$. Уравнение секущей имеет вид

$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

В этой формуле коэффициент $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ является тангенсом угла наклона данной секущей. Предельное положение секущей, когда x_1 стремится к x_0, носит название касательной к графику функции f в точке x_0. Как следует из определения, $f'(x_0)$ — ее угловой коэффициент, а

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

— уравнение касательной. Таким образом, геометрический смысл производной состоит в том, что $f'(x_0)$ — тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке x_0. Запишем еще уравнение нормали к функции f в точке x_0. Так называют прямую, проходящую через точку $(x_0,f(x_0))$ и перпендикулярную касательной в этой точке. Перпендикулярность двух прямых означает перпендикулярность их направляющих векторов. Направляющим вектором для касательной будет, например, вектор $(1,f'(x_0))$. Вектор $(-f'(x_0),1)$ ему перпендикулярен, и, значит, его можно считать направляющим вектором нормали. Уравнение нормали, таким образом, имеет вид:

$$(y-f(x_0))\cdot(-f'(x_0))=(x-x_0)\cdot 1\quad\text{или, если } f'(x_0)\neq 0,\quad y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

К понятию производной приводит также задача о вычислении скорости неравномерного движения. Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM=x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t: $x=f(t)$. Это уравнение называют уравнением движения. При этом отношение

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

выражает среднюю скорость изменения абсциссы x на промежутке времени $[t_0,t]$. Предел этой средней скорости при $t\to t_0$ называется скоростью движения в момент времени t_0. Обозначая эту скорость v, получим $v=f'(t_0)$.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Свойства производных. Производная обратной, сложной функции, функции заданной параметрически.

Теорема 1. $/f:[a,b]\to\mathbb{R},\ x_0\in[a,b],\ f\in D(x_0)/\Rightarrow\ f\in C(x_0)$.

$\lhd$: Доказательство этой и следующих теорем следует проводить отдельно для внутренних и граничных точек $[a,b]$. При этом ход рассуждений остается неизменным, меняются лишь используемые обозначения. Поэтому здесь, и в дальнейшем, будем рассматривать только первый случай. Проверим, что $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

по теореме о пределе произведения. $\triangleright$

Следствие. Если функция разрывна в некоторой точке, то в этой точке она не имеет производной.

Пример. Функция $y = |x|$ непрерывна в точке 0, но не является в этой точке дифференцируемой.

Теорема 2. $/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c/ \Rightarrow\ f'(x) = 0.$

$$\triangleleft :\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.\ \triangleright$$

Теорема 3. $/f, g : [a,b] \to \mathbb{R},\ x_0 \in [a,b],\ f, g \in D(x_0)/ \Rightarrow$

а) $(f + g) \in D(x_0)$ и $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

б) $(f \cdot g) \in D(x_0)$ и $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

в) если $g(x_0) \neq 0$, то $(1/g) \in D(x_0)$ и $(1/g)'(x_0) = -g'(x_0)/g^2(x_0)$.

$\triangleleft$: Пользуемся определением производной и основными свойствами предела.

$$a)\ \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$б)\ \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

$$в)\ \lim_{x\to x_0} \frac{(1/g)(x) - (1/g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = -g'(x_0)/g^2(x_0).\ \triangleright$$

Следствия. $/f, g : [a,b] \to \mathbb{R},\ x_0 \in [a,b],\ f, g \in D(x_0),\ g(x_0) \neq 0/ \Rightarrow$

а) $(f(x_0) + c)' = f'(x_0)$,

б) $(c \cdot f(x_0))' = c \cdot f'(x_0)$,

в) $(f/g)'(x_0) = (g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0))/g^2(x_0)$.

Пусть $f : [a,b] \to [A,B]$, $g : [A,B] \to \mathbb{R}$. Тогда функцию $h = g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, определенную правилом $h(x) = g(f(x))$, называют сложной функцией.

Теорема 4. $/f : [a,b] \to [A,B],\ g : [A,B] \to \mathbb{R},\ x_0 \in [a,b],\ y_0 = f(x_0) \in [A,B],\ f \in D(x_0),\ g \in D(y_0)/ \Rightarrow$ $h = g \circ f \in D(x_0)$ и $h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

$\triangleleft$: Доказательство проведем только для случая, когда $f(x) \neq y_0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности $\mathcal{O}'_\delta(x_0)$ точки x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство теоремы в общем случае может быть сделано, например, основываясь на определении предела. $\triangleright$

Пусть $f : [a,b] \to [A,B]$, $g : [A,B] \to \mathbb{R}$ таковы, что сложная функция $h = g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $h(x) = x$ при любом $x \in [a,b]$. Тогда функцию g называют обратной к f функцией.

Теорема 5. $/f \in C([a,b]),\ f : [a,b] \to [A,B],\ g : [A,B] \to \mathbb{R}$ — обратная к f функция, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 = f(x_0) \in [A,B]$, $f \in D(x_0),\ f'(x_0) \neq 0/ \Rightarrow g \in D(y_0)$ и $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

$\triangleleft$: Не ограничивая общности, можно считать, что $f([a,b]) = [A,B]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть $y \in [A,B]$. Тогда, по теореме о промежуточном значении, $f(x) = y$ при некотором значении $x \in [a,b]$. Поэтому

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = 1/f'(x_0),$$

так как, если $y \to y_0$, то и $g(y) \to g(y_0)$ по теореме о непрерывности обратной функции, а, значит, $g(f(x)) \to g(f(x_0))$ и, следовательно, $x \to x_0$. $\triangleright$

Зависимость между переменными x и y иногда удобно задавать двумя уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t — вспомогательная переменная (параметр). Такой способ задания зависимости между x и y, носит название параметрического.

Теорема 6. Если функция y от аргумента x задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная этой функции есть

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таблица производных (вывод самостоятельно).

$$c' = 0, \qquad x' = 1, \qquad (x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Лекция 5.

Логарифмическое дифференцирование.

Пусть $y = \ln z$, $z = \varphi(x)$ — сложная функция. Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$y'_x = (\ln z)'_x = (\ln z)'_z\, z'_x = \frac{1}{z} z'_x.$$

Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* функции.

Дифференциал, его геометрический смысл, применение к приближенным вычислениям. Инвариантность формы I-го дифференциала.

Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in (a, b)$. *Дифференциалом* функции f в точке x называют линейную функцию $df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая числу dx сопоставляет число $f'(x)dx$, являясь, таким образом, оператором умножения на $f'(x)$. Важно подчеркнуть, что x и dx — две различные независимые переменные. Первая, x, принадлежит области определения (a, b) функции f, в ней вычисляется значение производной, вторая, dx, — изменяется на числовой прямой, в этих точках вычисляются значения линейной функции $df(x)$. При этом значение функции $df(x)$ на элементе dx записывают в виде $df(x) = f'(x)dx$, а производную – в виде отношения дифференциалов: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала сводится к геометрическому смыслу производной функции f. Поскольку производная в точке x — это тангенс угла наклона касательной в этой точке, то дифференциал функции f в точке x на элементе dx это приращение ординаты касательной к графику функции в точке x, когда x получает приращение dx.

Для малого значения приращения аргумента Δx функции $f \in D(x)$ в точке x справедлива приближенная формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = f(x) + \frac{df(x)}{dx}(\Delta x).$$

Использование этой формулы есть суть фразы о применении производной или дифференциала в приближенных вычислениях.

Согласно формуле о производной сложной функции, для композиции $h = g \circ f$ отображения $f : (a, b) \to (A, B)$, дифференцируемого в точке $x \in (a, b)$, и $g : (A, B) \to \mathbb{R}$, дифференцируемого в точке $y = f(x) \in (A, B)$,

$$h'(x) = g'(y)f'(x).$$

Поэтому

$$dh(x) = h'(x)dx = g'(y)f'(x)dx = g'(y)df(x) = g'(f(x))df(x).$$

Равенство $dh(x) = h'(x)dx = g'(f(x))df(x)$ выражает собой инвариантность формы I-го дифференциала: дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента, при этом безразлично, будет ли этот аргумент независимой переменной или дифференцируемой функцией от другой независимой переменной.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Теорема 1. (Ферма) $/f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f \in D(x_0)$, $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in (a, b)/ \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

$\lhd$: Если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0,$$

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Используя первое неравенство, получим, что $f'(x_0) \leqslant 0$, второе — что $f'(x_0) \geqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. $\rhd$

Следствие $/f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f \in D(x_0)$, $f(x_0) \geqslant f(x)\ \forall\ x \in (a, b)/ \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Геометрическая смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $x_0 \in (a,b)$ функция принимает наибольшее или наименьшее значение, то касательная к графику функции в этой точке параллельна оси Ox.

Из этой теоремы следует также, что если функция определена на некотором интервале и в какой-то точке этого интервала принимает значение, являющееся наибольшим или наименьшим в некоторой окрестности указанной точки (а не обязательно на всем интервале, на котором рассматривается функция), то производная в этой точке равна нулю, и, следовательно, касательная в соответствующей точке графика функции горизонтальна.

Замечание. Аналогичное утверждение для функций, заданных на отрезке $[a,b]$ вообще говоря неверно. Пример, — функция $f(x) = x$ на отрезке $[0,1]$. (Если эту функцию рассматривать на интервале $(0,1)$, то на нем $f(x)$ не принимает ни минимального, ни максимального значения.)

Теорема 2. (Ролль) $/f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$, $f(a) = f(b)/\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$.

$\lhd$: Теорема Вейерштрасса: $/f \in C([a,b],\mathbb{R})/\Rightarrow f$ достигает на $[a,b]$ своих минимального и максимального значений. Пусть $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$, тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a,b]$. Если $m = M$, то f постоянна, и в качестве x_0 можно взять любую точку (a,b). Если $m \neq M$, то, из-за $f(a) = f(b)$, хотя бы одно из m или M не принимается на концах отрезка $[a,b]$. Пусть, например, для определенности $x_0 \in (a,b)$ таково, что $f(x_0) = M$. По теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. $\rhd$

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на концах этого отрезка одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема 3. (Коши) $/f, g \in C[a,b]$, $f, g \in D(a,b)$, $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)/\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a))} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(отсюда в частности следует, что $g(b) \neq g(a)$).

$\lhd$: То что $g(b) \neq g(a)$, следует из теоремы Ролля. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда $h \in C[a,b]$, $h \in D(a,b)$, $h(a) = h(b) = 0$. По теореме Ролля найдется $x_0 \in (a,b)$, такая что $h'(x_0) = 0$. Это означает, что

$$\begin{vmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = f'(x_0)(g(a) - g(b)) - g'(x_0)(f(a) - f(b)) = 0. \rhd$$

Следствие (теорема Лагранжа) $/f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)/\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Эта теорема показывает, что должна найтись точка x_0 (быть может и не одна), в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Лемма $/f \in C(\langle a,b\rangle)$, $f'(x) = 0$ на $(a,b)/\Rightarrow f(x) = \text{const}$ на $\langle a,b\rangle$.

$\lhd$: Пусть $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$. Тогда по теореме Лагранжа найдется $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0. \rhd$$

Лемма $/f \in C(a,b)$, $c \in (a,b)$, $f \in D(a,c)$, $f \in D(c,b)$, $\exists \lim_{x\to c} f'(x) = A/\Rightarrow f \in D(a,b)$ и $f'(c) = A$.

$\lhd$: Пользуемся теоремой Лагранжа:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(x_0)$$

для некоторого $x_0 \in (x,c)$. Поскольку $x_0 \in (x,c)$, то при $x \to c$ обязательно $x_0 \to c$ и $f'(x_0) \to A$. Поэтому

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \to A$$

при $x \to c$. $\rhd$

Лекция 6.

Правила Лопиталя.
Определение 1. (бесконечного предела функции). $f:(a,b)\backslash x_0 \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ означает, что

$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0:\ \forall x \in \mathcal{O}'_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > M.$$

Теорема 1. (правила Лопиталя $(0/0)$) $/f, g \in D(\mathcal{O}'_\delta(x_0))$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\mathcal{O}'_\delta(x_0)$, существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)/\Rightarrow$

$$1).\ \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad 2).\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\lhd$: Доопределим функции f и g в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. По теореме Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

для некоторого $\xi \in (x, x_0)$, $\xi = \xi(x)$ – некоторая функция аргумента x. Поскольку $\xi(x) \in (x, x_0)$ при любом x близком к x_0, то при $x \to x_0$ обязательно $\xi(x) \to x_0$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi(x)\to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \rhd$$

Теорема 2. (правила Лопиталя (∞/∞)) (**без доказательства**) $/f, g \in D(\mathcal{O}'_\delta(x_0))$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в $\mathcal{O}'_\delta(x_0)$, существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)/\Rightarrow$

$$1).\ \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad 2).\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 1. Теоремы остаются справедливыми также и для случая, когда $x_0 = \infty$. Кроме того они верны также и для односторонних пределов.
Замечание 2. Если предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ не существует, то это не означает, что не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$.
Замечание 3. Иногда правила Лопиталя применяют последовательно несколько раз.

Другие виды неопределенностей: $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (0^0), (∞^0), (1^∞) (последние три перед рассмотрением удобно прологарифмировать), — различными тождественными преобразованиями стараются свести к основным типам $(0/0)$ или (∞/∞).

Бесконечно малые и бесконечно большие функции (напоминание).

Будем рассматривать действительнозначные функции, заданные на интервале (a, b) (конечном или бесконечном), кроме, быть может, точки $x_0 \in [a, b]$.

Функцию f называют бесконечно малой (при $x \to x_0$), если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Функцию $1/f$ называют при этом бесконечно большой (при $x \to x_0$). Запись $f(x) = \bar{o}(1) = o(1)$ означает, что f является бесконечно малой (при $x \to x_0$). Условие (при $x \to x_0$) не входит в оформление $f(x) = o(1)$, оно добавляется если этого требует контекст, но часто этого добавления не требуется вовсе.
Следствие. $/f:(a,b)\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]/\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = A + o(1).$$

Обозначение $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ означает, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) = o(1)$ (при $x \to x_0$).

Следует подчеркнуть, что запись $f(x) = o(1)$ фактически означает принадлежность

$$f \in \{h \mid \lim_{x\to x_0} h(x) = 0\}.$$

Поэтому часто можно встретить записи такого типа $x = 2x + o(1) = x^2 + o(1) = o(1)$. В этой записи первое равенство по существу является заменителем знака " $\in$ ", а последующие выражают совпадение множеств функций.

Лекция 7.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций.

Если функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b), то можно рассмотреть вопрос о существовании производной у новой функции $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. Если такая производная существует в точке $x_0\in(a,b)$, то это обозначают так: $f\in D^2(x_0)$. Обозначение $f\in D^2(a,b)$ используют, если такая производная существует на всем интервале (a,b). Такие производные называют производными порядка 2. Пусть $n\in\mathbf{N}$, $n>1$. По аналогии рассматривают обозначение $f\in D^n(x_0)$ — класс функций $f\in D^{n-1}(a,b)$, у которых $f^{(n-1)}\in D(x_0)$, и обозначение $f\in D^n(a,b)$ — класс функций $f\in D^{n-1}(a,b)$, у которых производная $f^{(n-1)}\in D(a,b)$. Такие производные называют старшими производными или производными порядка n. Будем использовать также обозначение $f\in D^n[a,b]$, отличающееся от $f\in D^n(a,b)$ тем, что в точках a и b существуют все односторонние производные от 1 до порядка n включительно. Кроме того употребляются также обозначение $C^n(a,b)$ — класс функций из $f\in D^n(a,b)$, для которых $f^{(n)}\in C(a,b)$, и, по аналогии, $C^n[a,b]$.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\bar{o}(x-x_0).$$

Запишем это утверждение в виде

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\bar{o}(x-x_0).$$

Имеется следующее обобщение такого представления функций, называемого формулой Тейлора (одной из ее многочисленных вариантов записи).

Теорема 1. (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)$/f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbf{N}$, $x_0\in(a,b)$, $f\in D^{(n-1)}(a,b)$, $f\in D^n(x_0)/\Rightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\bar{o}((x-x_0)^n)$$

при $x\to x_0$.

$\lhd$: Проверим формулу Тейлора для $n=2$. Обозначим

$$r(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Тогда $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=0$ и по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{r'(x)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{r'(x)-r'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{r''(x_0)}{2}=0,$$

т.е. действительно $r(x)=\bar{o}((x-x_0)^2)$. Доказательство в общем случае повторяет эти рассуждения. Пусть

$$r(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Тогда $r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(n)}(x_0)=0$ и по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)}=\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

т.е. действительно $r(x)=\bar{o}((x-x_0)^n)$. $\rhd$

Эта теорема остается справедливой и для функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ при $x_0\in[a,b]$.

Теорема 2. (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)$/f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbf{N}$, $x_0\in(a,b)$, $f\in D^n(a,b)/\Rightarrow$ для $x\in(a,b)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^n,$$

где $\xi=\xi(x)$ – некоторая промежуточная точка интервала x,x_0.

$\lhd$: Рассмотрим функцию $r:(a,b)\to\mathbb{R}$

$$r(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{(n-1)}.$$

По теореме Коши
$$\frac{r(t)}{(x-t)^n} = \frac{r(t)-r(x)}{(x-t)^n-(x-x)^n} = -\frac{r'(\xi)}{n(x-\xi)^{(n-1)}}.$$
Подсчитаем $r'(\xi)$.
$$r'(\xi) = -f'(\xi) - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) - \dots -$$
$$-\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{(n-1)} + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x-\xi)^{(n-2)} = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{(n-1)}.$$
Поэтому
$$\frac{r(t)}{(x-t)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \triangleright$$

Ряд Тейлора.

Пусть $f \in C(a,b)$ обладает производными любого порядка ($f \in C^\infty(a,b)$). Обозначим
$$T_n(f,x,x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
— полином Тейлора порядка $n \in \mathbf{N}$ функции f в точке $x_0 \in (a,b)$. Рядом Тейлора функции f в точке x_0 называют формальный аналог этой конечной суммы для случая бесконечного числа слагаемых:
$$T(f,x,x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$
Этот ряд называется сходящимся в точке $x_1 \in (a,b)$, если при $n \to \infty$ сходится числовая последовательность $T_n(f,x_1,x_0)$. Если же эта последовательность расходится, то и ряд Тейлора в точке x_1 называется расходящимся. Функция f называется аналитической на (a,b), если в каждой точке $x_1 \in (a,b)$ числовая последовательность $T_n(f,x_1,x_0)$ сходится при $n \to \infty$ к $f(x_1)$. Класс аналитических на (a,b) функций обозначают $\mathcal{A}(a,b)$.

Пример. Если $p(x)$ — произвольный полином, то $p \in \mathcal{A}(a,b)$.

Теорема 3. (достаточный признак аналитичности функции) $/f \in C^\infty(a,b)$, для некоторого $M > 0$ выполняется $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ при каждом $x \in (a,b)$ и каждом $n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow f \in \mathcal{A}(a,b)$.

$\triangleleft$: Поскольку $k \cdot (n-k+1) \geqslant n$ при любом $k \in \{1,2,\dots,n\}$, то
$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1) \geqslant n^n.$$
Поэтому $n! \geqslant (\sqrt{n})^n$. Пусть $x \in (a,b)$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
$$f(x) - T_n(f,x,x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^n,$$
где $\xi = \xi(x)$ – некоторая промежуточная точка интервала x, x_0. Значит,
$$|f(x) - T_n(f,x,x_0)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^n\right| \leqslant M\left(\frac{|b-a|}{\sqrt{n}}\right)^n \to 0,$$
когда $n \to \infty$. По теореме об ограниченной сходимости отсюда следует, что при любом фиксированном $x \in (a,b)$ последовательность $f(x) - T_n(f,x,x_0)$ стремится к нулю, и, соответственно, последовательность $T_n(f,x,x_0)$ сходится к $f(x)$. $\triangleright$

Примеры.

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = 1$, $f^{(n)}(x) = e^x$ при $n \in \mathbf{N} \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leqslant M = \max\{e^a, e^b\}$ на (a,b). По достаточному признаку аналитичности функции
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,!}$$
на произвольном конечном интервале (a,b), а значит и на $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sin x$, $f^{(2k)}(0) = 0$ для четных $n = 2k$ и 0, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ для нечетных $n = 2k+1$; кроме того $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ на (a,b). Поэтому
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3) $f(x) = \cos x$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ для четных $n = 2k$ и 0, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ для нечетных $n = 2k+1$; кроме того $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ на (a, b). Поэтому

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6) **(без доказательства)**

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k, \qquad x \in (-1, 1).$$

7) **(без доказательства)**

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Лекция 8.

Исследование функций: возрастание, убывание, экстремумы (необходимые и достаточные условия), наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, асимптоты.

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f возрастает (или убывает) на (a, b), если из $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \leqslant x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (или, соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Будем также говорить, что f строго возрастает (или строго убывает) на (a, b), если из $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (или, соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 1 $/f \in D(a, b)$, $f \in C\langle a, b\rangle/\Rightarrow$

1) если $f'(x) \geqslant 0$ на $(a, b) \Rightarrow f$ возрастает на $\langle a, b\rangle$,
2) если $f'(x) > 0$ на $(a, b) \Rightarrow f$ строго возрастает на $\langle a, b\rangle$,
3) если $f'(x) \leqslant 0$ на $(a, b) \Rightarrow f$ убывает на $\langle a, b\rangle$,
4) если $f'(x) < 0$ на $(a, b) \Rightarrow f$ строго убывает на $\langle a, b\rangle$.

$\lhd$: Доказательства этих 4-х утверждений аналогичны, проверим, например, справедливость 2). Пусть $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. Тогда по формуле Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$ — некоторая промежуточная точка. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$. $\rhd$

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Говорят, что при значении $x_1 \in (a, b)$ аргумента x функция $f(x)$ имеет максимум $f(x_1)$, если в некоторой δ-окрестности $\mathcal{O}_\delta(x_1)$ точки x_1 выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x)$ при всех $x \in \mathcal{O}_\delta(x_1)$. При этом $\delta > 0$ может оказаться весьма маленьким числом. Иногда к слову максимум добавляют слово локальный: локальный максимум. Аналогично определяют локальный минимум: точка x_1 — точка локального минимума f, если $f(x_1) \leqslant f(x)$ при всех $x \in \mathcal{O}_\delta(x_1)$. Максимум или минимум функции называется экстремумом функции, а те значения аргумента, в которых реализуются экстремумы функции, называются ее точками экстремума.

Теорема 2 (следствие теоремы Ферма) $/f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ — точка экстремума f, $f \in D(x_0)/\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Теорема 3 (достаточные условия экстремума) $/f \in D(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, f' меняет знак при переходе через точку $x_0/\Rightarrow x_0$ — точка максимума f, если происходит изменение знака производной с плюса на минус, или точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

$\lhd$: Проверим лишь первую половину утверждения теоремы — вторая проверяется по аналогии. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$f'(x) \geqslant 0$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0]$,
$f'(x) \leqslant 0$ при $x \in [x_0, x_0 + \delta]$.

Тогда по теореме 1 $f(x)$ – возрастающая функция на $[x_0 - \delta, x_0]$, $f(x)$ – убывающая функция на $[x_0, x_0 + \delta]$. Поэтому x_0 — точка локального максимума. $\rhd$

Теорема 4 $/f \in D(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$, f' не меняет знак при переходе через x_0 и не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности $x_0/\Rightarrow$ x_0 не является точкой экстремума f.
$\lhd$: Как и в предыдущей теореме проверим лишь половину утверждения теоремы — другая проверяется по аналогии. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$f'(x) > 0$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0)$,

$f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta]$.

Опять же по теореме 1 $f(x)$ – строго возрастающая функция на $[x_0 - \delta, x_0]$ и $f(x)$ – строго возрастающая функция на $[x_0, x_+\delta 0]$. Поэтому x_0 — не точка экстремума f. $\rhd$
Теорема 5 $/f \in D(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0/\Rightarrow$ x_0 — точка минимума f.
$\lhd$: По определению

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Поэтому, если x близко к x_0, то

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0.$$

Это означает, что производная f' функции f при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Применяя теорему 3, получим утверждение доказываемой теоремы. $\rhd$
Замечание. Аналогично показывается, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума f.

Исходя из рассмотренных теорем, при определении, например, наибольшего из значений, которое может принимать $f \in D[a,b]$ на отрезке $[a,b]$, поступают следующим образом. Сначала находят все точки, где $f'(x) = 0$. Если их количество невелико, то во всех таких точках вычисляют значения функции f и сравнивают между собой. Выбрав самое большое значение, сравнивают его со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Большее из этих трех чисел и есть наибольшее значение, принимаемое функцией f на отрезке $[a,b]$. Согласно теореме Вейерштрасса такое значение обязательно достигается хотя бы в одной точке $[a,b]$. В этом состоит принципиальное отличие этой задачи от задачи поиска, например, наибольшего из значений, которое может принимать $f \in D(a,b)$ на интервале (a,b). Так для функции $f(x) = 1/x$ выполняется $f \in D(0,1)$, но ни в одной точке $(0,1)$ функция f не принимает наибольшего значения, да и самого значения с этим свойством не существует.

Определение 1. Функция $f \in D(\langle a,b\rangle)$ называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$, если в каждой точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$ график функции f лежит не ниже (не выше) касательной к функции в этой точке:

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

при всех $x \in \langle a,b\rangle$ и $x_0 \in \langle a,b\rangle$.
Теорема 6 $/f \in D^2(\langle a,b\rangle)$, $f''(x) \geqslant 0$ на $\langle a,b\rangle/\Rightarrow$ f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$.
$\lhd$: Выберем $x, x_0 \in \langle a,b\rangle$ произвольно. По формуле Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) \geqslant 0,$$

так как $c \in (x_0, x)$ и $f'(x)$ — возрастающая на (x_0, x) функция. $\rhd$

Аналогично показывается, что если $f''(x) \leqslant 0$ на $\langle a,b\rangle$, то f выпукла вверх на $\langle a,b\rangle$.

Определение 2. Точкой перегиба функции $f \in D(\langle a,b\rangle)$ называют точку, в которой происходит изменение выпуклости с выпуклости вниз на выпуклость вверх или обратно.
Теорема 7 $/f \in D^2(\langle a,b\rangle)$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$, f'' меняет знак при переходе через точку $x_0/\Rightarrow$ x_0 — точка перегиба функции f.
$\lhd$: Как и раньше проверим лишь половину утверждения теоремы — другая проверяется по аналогии. Пусть, например, $\delta > 0$ таково, что

$f''(x) \geqslant 0$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0)$,

$f''(x) \leqslant 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta]$.

По теореме 6 функция f выпукла вниз на $[x_0 - \delta, x_0]$ и выпукла вверх на $[x_0, x_0 + \delta]$. $\rhd$
Определение 3. Пусть $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Если для $k, l \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(x) = kx + l + \bar{o}(1)$ при $x \to +\infty$, то прямая $y = kx + l$ называется асимптотой (наклонной) функции f при $x \to +\infty$. Аналогично определяется асимптота функции f при $x \to -\infty$.
Определение 4. Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может и односторонней). Если выполняется хотя бы одно из

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty,$$

то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f.

Для нахождения наклонных асимптот обычно вычисляют пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = l.$$