Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра ”Высшая математика”

А. С. Кочуров

РЯДЫ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

(краткий конспект)

Москва 2003 г.

Лекция 1.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Примеры. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Остаток ряда. Ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости.

Пусть имеется некоторая последовательность действительных чисел, соединенных между собой знаком плюс:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad \text{или более коротко} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Такое выражение называется бесконечным числовым рядом, или просто числовым рядом. При этом слагаемые $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами этого ряда, а слагаемое, стоящее на n-ом месте – общим членом этого ряда. Ряд считается заданным, если известен общий член его, выраженный как функция номера n.

Считая, что задан некоторый ряд, можно образовать частичные суммы этого ряда:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Итак, частичной суммой ряда S_n (порядка n) называют сумму членов ряда от первого u_1 до u_n. Таким образом, с каждым рядом связана последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим два случая:

1. Пусть при неограниченном возрастании номера n частичная сумма S_n стремится к конечному пределу S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Тогда говорят, что исходный ряд сходится и число S называют суммой этого ряда. Сам числовой ряд при этом называется сходящимся.

2. Пусть при неограниченном возрастании номера n частичная сумма S_n не стремится ни к какому конечному пределу. Тогда говорят, что исходный ряд расходится и суммы не имеет. Числовой ряд при этом называется расходящимся.

Примеры рядов:

1. $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots,$
2. $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$
3. $1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} + \dots,$
4. $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots,$
5. $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots.$

В примере 1 $S_n = 0$, в примере 2 $S_n = n$, в примере 3 $S_n = (1-(-1)^n)/2$, в примере 4 $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} (1-(-1)^n)/2 \text{ не существует},$$

то из первых трех примеров рядов сходящимся является лишь первый. В четвертом примере $\lim_{n\to\infty} S_n$ зависит от величины q. Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = 1/(1-q)$ – то есть ряд из примера 4 в этом случае сходится. Если же $|q| > 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n$ или равен $+\infty$ (если $q > 1$), или вовсе не существует (если $q < -1$). Поэтому ряд из примера 4 для $|q| > 1$ расходится. Ряд из примера 5 носит специальное название. Его называют гармоническим. Проверим, что он является расходящимся рядом. Для этого рассмотрим следующие его части:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 + u_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad u_5 + u_6 + u_5 + u_6 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

и т.д. Одной из частей предполагается, например, взять сумму

$$u_{2^{m-1}+1} + \dots + u_{2^m} > 2^{m-1}/2^m = 1/2.$$

Таким образом, частичная сумма S_{2^m} разбивается на $m+1$ часть, каждая из которых больше $1/2$. Поэтому $S_{2^m} > (m+1)/2$. Тем самым, как нетрудно понять, мы показали, что для 5-го примера $\lim S_n = +\infty$ – ряд расходится.

Для числовых рядов определены арифметические операции сложения и умножения на число:

1). Суммой двух числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$,

2). Результатом умножения ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на число $c \in \mathbb{R}$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot u_n)$.

Теорема 1. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящийся ряд, S – его сумма, $c \in \mathbb{R}/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot u_n) = c \cdot S$.

Доказательство. Если S_n – n-ая частичная сумма исходного ряда, то, согласно определению, $c \cdot S_n$ – n-ая частичная сумма ряда, полученного после умножения на c. По арифметическим свойствам предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S,$$

что и требовалось проверить. Аналогично устанавливается

Теорема 2. $/S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два сходящихся ряда$/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = S + T$.
Доказательство. Если S_n и T_n – n-ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ соответственно, то, согласно определению, $S_n + T_n$ – n-ая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$. По арифметическим свойствам предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S + T,$$

что и требовалось проверить.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – некоторый ряд. При любом $k \in \mathbf{N}$ ряд $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ называется остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Теорема 3. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – некоторый ряд, $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ – его остаток$/ \Rightarrow$ 1). если сходится ряд, то сходится и его остаток, 2). если сходится остаток ряда, то сходится и сам ряд.

Доказательство основано на теоремах 1, 2 и состоит в том, что, например, для проверки 1) достаточно заметить, что остаток ряда может быть получен как разность двух сходящихся рядов: исходного и ряда $u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + 0 + 0 + \cdots + 0 + \ldots$. Аналогично устанавливается пункт 2) теоремы.

Теорема 4 (необходимое условие сходимости ряда). $/S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящийся ряд$/ \Rightarrow \lim u_n = 0$.

Доказательство. Так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то по арифметическим свойствам предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие. Если n-ый член ряда при неограниченном возрастании его номера n не стремится к нулю, то этот ряд расходится.

Применяя это следствие к примерам рядов 2 и 3 (см. выше), получаем их расходимость. В тоже время гармонический ряд, как было показано прежде, расходится, но для него $u_n = 1/n \to 0$, когда $n \to \infty$.

Следующая теорема относится к рядам, все члены которых являются неотрицательными числами.

Теорема 5. /Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд с неотрицательными членами: $u_n \geqslant 0$, S_n – его частичные суммы$/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится $\Leftrightarrow$ последовательность S_n – ограничена.

Доказательство. $\Rightarrow$: если ряд сходится, то сходится последовательность S_n частичных сумм. Поэтому она является ограниченной (по свойствам сходящихся последовательностей). $\Leftarrow$: Как показывает пример 3 ряда в общем случае из ограниченности частичных сумм S_n не следует их сходимость. Однако, ряд из примера 3 не является рядом с неотрицательными членами. Если мы имеем ряд с неотрицательными членами, то последовательность частичных сумм этого ряда $S_n = S_{n-1} + u_n \geqslant S_{n-1}$ неубывает. Кроме того, согласно предположению, она ограничена сверху. Как известно, в этом случае последовательность S_n имеет предел, что и требовалось установить.

Лекция 2.

Сходимость числовых рядов: признаки сравнения, интегральный признак, признак Даламбера, признак Коши.

Напоминание: Теорема. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – числовой ряд, $u_n \geqslant 0$, S_n – его частичные суммы$/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится $\Leftrightarrow$ последовательность S_n – ограничена.

Следующие два утверждения являются ее следствием:

Теорема 1. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два ряда, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, $n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow$

а). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

б). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Доказательство. а). Пусть S_n и T_n – n-ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ соответственно. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то, по предыдущей теореме, последовательность T_n ограничена сверху, скажем, числом T. Из условий теоремы $S_n \leqslant T_n$ и, значит, последовательность S_n ограничена сверху тем же числом T. Поэтому, по предыдущей теореме, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

б). Это утверждение теоремы является следствием первого. Оно устанавливается методом доказательства "от противного". Нам дано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Предположим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Тогда, по первой части, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится – противоречие с исходными данными. Поэтому предположение неверно – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Теорема 2. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два ряда, $0 \leqslant u_n$, $0 < v_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c < \infty/ \Rightarrow$

а). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

б). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Доказательство. По условию теоремы существует конечный предел последовательности $\frac{u_n}{v_n}$ и, значит, эта последовательность ограничена сверху некоторым числом a: $\frac{u_n}{v_n} < a$ при всех n. Поэтому $u_n < a \cdot v_n$. Применяя теорему 1 к рядам $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot v_n$ и пользуясь правилом умножения числового ряда на число, получаем утверждения теоремы 2.

Следующая теорема позволяет сводить исследование сходимости числового ряда к исследованию сходимости несобственного интеграла

Теорема 3 (интегральный признак сходимости). $/f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная невозрастающая функция, $u_n = f(n)/ \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Вначале проверим, что из сходимости интеграла следует сходимость ряда. Сходимость интеграла означает, что существует конечный неотрицательный предел величин $\int_1^x f(t)\,dt$. Это означает, в частности, ограниченность сверху этих величин: $\int_1^x f(t)\,dt < T$ для некоторого $T > 0$ и любого $x \in [1, \infty)$. Заметим теперь, что, из-за монотонности f, для всех $n \geqslant 2$ $u_n = f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,dt$ (для $n = 1$ такого неравенства вообще говоря написать нельзя). Поэтому, если T_n – n-ая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n$, то

$$T_n \leqslant u_1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t)\,dt = u_1 + \int_1^n f(t)\,dt \leqslant u_1 + T.$$

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n$ ограничены числом u_1+T. Значит, ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n$ сходится, поскольку $u_n \geqslant 0$.

Доказательство того, что из сходимости ряда следует сходимость интеграла повторяет сделанные рассуждения: пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n$ сходится. Тогда его частичные суммы ограничены некоторым числом $T > 0$. Из-за монотонности f выполняется $\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) = u_n$ для $n \in \mathbf{N}$. Поэтому для $S_n = \int_1^n f(t)\,dt$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant T.$$

Получили, что неубывающая последовательность S_n ограничена сверху числом $T > 0$. Значит, она имеет предел (не обязательно совпадающий с T):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \quad (\text{т.е. } \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n-1} f(t)\,dt = S), \tag{1}$$

рассматриваемый по натуральным значениям n. Нам же требуется установить существование этого предела по действительным значениям аргумента:

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,dt = S\,? \tag{2}$$

Нетрудно понять, что такой предел действительно существует и равен S. Основным условием для этого является монотонность f: если $x \in [n-1, n)$, то

$$S_{n-1} \leqslant \int_1^x f(t)\,dt \leqslant S_n.$$

Совмещая эти неравенства с (1), получаем (2).

Оставшаяся часть утверждений теоремы связана с утверждениями о расходимости. Они являются следствием первой части и доказываются методом "от противного". Схема рассуждений уже была приведена в теореме 1: пусть расходится ряд. Тогда, по первой части, интеграл сходится не может (в противном случае сходился бы и ряд). Обратно, пусть расходится интеграл. Тогда расходится и ряд (так как предположение о его сходимости, по первой части, влечет сходимость интеграла – противоречие).

Следствие. Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$, $p \in \mathbb{R}$, сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Доказательство. Если $p \leqslant 0$, то n^{-p} не стремится к нулю, когда $n \to \infty$, – не выполняется необходимый признак сходимости ряда, ряд Дирихле расходится. Пусть $p > 0$. По теореме 3 ряд Дирихле сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^\infty t^{-p}\,dt$. Изучение сходимости этого интеграла состоит в изучении выражения $x^{1-p}/(1-p)$, $p \neq 1$, ($\ln x$, $p = 1$) при $x \to \infty$. Этот предел конечен, если $p > 1$ – ряд Дирихле сходится. Если $p \leqslant 1$, этот предел равен бесконечности – ряд Дирихле расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера). /$\sum_{n=1}^\infty u_n$ – числовой ряд, $u_n > 0$. Пусть существует $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, равный числу $q \in \mathbb{R}$ или бесконечности/ $\Rightarrow$

а) ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n$ сходится в случае $q < 1$, б) ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n$ расходится в случае $q > 1$ или $q = \infty$,

в) в случае $q = 1$ для ответа на вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n$ требуется дополнительное исследование.

Доказательство. а). Будем сравнивать ряд $\sum u_n$ с суммой геометрической прогрессии. Для этого вспомним определение предела: число q является пределом последовательности $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n = n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что для всякого $k \geqslant n$ выполняется неравенство $|q - \frac{u_{k+1}}{u_k}| < \varepsilon$. Пользуясь этим определением и условием $q < 1$ возьмем какое-нибудь $\epsilon > 0$ так, чтобы $q + \epsilon$ было бы все еще меньше 1 и подберем для этого ϵ натуральное n, чтобы для всякого $k \geqslant n$ выполнялось бы $|q - \frac{u_{k+1}}{u_k}| < \epsilon$. Снимем знак модуля:

$$q - \frac{u_{k+1}}{u_k} > -\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} < q + \epsilon,$$

если $k \geqslant n$. Таким образом, для $k \geqslant n$

$$u_{k+1} < (q+\epsilon)^1 u_k < (q+\epsilon)^2 u_{k-1} < \cdots < (q+\epsilon)^{k-n+1} u_n$$

и, значит, остаток $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ исходного ряда можно сравнить с остатком $\sum_{k=n}^{\infty} u_n \cdot (q+\epsilon)^k$ сходящегося (т.к. $q+\epsilon<1$) ряда. По теореме 1 остаток $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ сходится, значит, сходится и сам ряд.
б) доказательство этого пункта, в основных моментах, повторяет доказательство а). Рассмотрим его для случая $q<\infty$. Нам дано, что $q>1$. Возьмем какое-нибудь $\epsilon>0$ так, чтобы $q-\epsilon$ было бы все еще больше 1 и подберем для этого ϵ натуральное n, чтобы для всякого $k \geqslant n$ выполнялось $|q-\frac{u_{k+1}}{u_k}|<\epsilon$. Снимем знак модуля:

$$q-\frac{u_{k+1}}{u_k}<\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{k+1}}{u_k}>q-\epsilon>1,$$

если $k \geqslant n$. Таким образом, для $k \geqslant n$

$$u_{k+1}>(q-\epsilon)^1 u_k>(q-\epsilon)^2 u_{k-1}>\cdots>(q-\epsilon)^{k-n+1} u_n>u_n.$$

Из этих неравенств видно, что не выполняется необходимое условие сходимости ряда – общий член не стремится к нулю. В случае $q=\infty$ точно также устанавливается, что общий член ряда u_n также не стремится к нулю.
в) Два ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ показывают, что если $q=1$, то изучаемый ряд может расходиться (первый случай) и может сходиться (второй случай).

В завершение рассмотрим еще один признак сходимости рядов с неотрицательными членами. Его доказательство повторяет доказательство теоремы 4.

Теорема 5 (признак Коши, без доказательства). $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – числовой ряд, $u_n \geqslant 0$. Пусть существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, равный числу $q \in \mathbb{R}$ или бесконечности$/ \Rightarrow$
а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится в случае $q<1$, б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится в случае $q>1$ или $q=\infty$,
в) в случае $q=1$ для ответа на вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ требуется дополнительное исследование.
Доказательство. а). Сравниваем ряд $\sum u_n$ с суммой геометрической прогрессии. Число q является пределом последовательности $\sqrt[n]{u_n}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $n=n(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ такое, что для всякого $k \geqslant n$ выполняется неравенство $|q-\sqrt[k]{u_k}|<\varepsilon$. Пользуясь условием $q<1$ выбираем $\epsilon>0$ так, что $q+\epsilon$ все еще меньше 1 и натуральное n, чтобы для всякого $k \geqslant n$ выполняется $|q-\sqrt[k]{u_k}|<\epsilon$. Снимаем знак модуля:

$$q-\sqrt[k]{u_k}>-\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k]{u_k}<q+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad u_k<(q+\epsilon)^k,$$

если $k \geqslant n$. Значит, остаток $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ исходного ряда можно сравнить с остатком $\sum_{k=n}^{\infty}(q+\epsilon)^k$ сходящегося (т.к. $q+\epsilon<1$) ряда. По теореме 1 остаток $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ сходится, значит сходится и сам ряд.
б) (случай $q<\infty$) Нам дано, что $q>1$. Возьмем $\epsilon>0$ так, что $q-\epsilon$ все еще больше 1 и подберем для этого ϵ натуральное n, чтобы для всякого $k \geqslant n$ выполнялось $|q-\sqrt[k]{u_k}|<\epsilon$. Снимем знак модуля:

$$q-\sqrt[k]{u_k}<\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k]{u_k}>q-\epsilon>1,$$

если $k \geqslant n$. Из этих неравенств видно, что не выполняется необходимое условие сходимости ряда – общий член не стремится к нулю.

в) Два ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ показывают, что если $q=1$, то изучаемый ряд может расходиться (первый случай) и может сходиться (второй случай).

Лекция 3.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

До сих пор мы, в основном, изучали ряды, составленные из неотрицательных слагаемых. Рассмотрим теперь общие ряды, часть которых состоит из положительных слагаемых, а другая – из отрицательных. Такие ряды называют знакопеременными.
Теорема 1. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – числовой ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – сходящийся ряд$/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится.
Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+|u_n|). \tag{1}$$

Для его членов выполнены неравенства $0 \leqslant (u_n+|u_n|) \leqslant 2|u_n|$. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|)$ сходится. Поэтому, по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами, сходится и ряд (1). Исходный же ряд может, таким образом, быть записан в виде разности сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n+|u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

и, следовательно, есть ряд сходящийся.
Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно. Так, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ является сходящимся. Позже мы еще вернемся к вопросу о сходимости последнего ряда.

Определение. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из модулей его членов. Ряд называется условно сходящимся, если сходится сам ряд, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.
Примером абсолютно сходящегося ряда является ряд

$$1-1/2+1/4-1/8+1/16-1/32+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{-n}.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, для которого $u_n \geqslant 0$, называется знакочередующимся. Таким образом, для знакочередующегося ряда стоящие рядом слагаемые имеют противоположные знаки.
Теорема 2 (признак Лейбница). $/\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ – знакочередующийся $(0 \leqslant u_n)$ ряд, $u_{n+1} \leqslant u_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0/ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ – сходится.
Доказательство. Рассмотрим частичные суммы S_{2m} ряда четного порядка и запишем равенство:

$$S_{2m} = S_{2m-2} + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

По условиям теоремы $u_{2m-1} - u_{2m} \geqslant 0$, т.е. последовательность S_{2m} неубывает: $S_{2m-2} \leqslant S_{2m}$. Кроме того,

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leqslant u_1,$$

т.е. последовательность S_{2m} ограничена: $S_{2m} \leqslant u_1$. Поэтому она имеет предел: $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Тем самым, мы показали, что $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ – ряд сходится.
Пример: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, значит, является сходящимся.
Перечислим некоторые из свойств абсолютно сходящихся рядов:
Теорема 3. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – абсолютно сходящийся ряд, c – число/ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ – абсолютно сходящийся ряд.
Для доказательства необходимо проверить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|c \cdot u_n|$, которая эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. Последний же ряд сходится по условию теоремы.
Теорема 4. $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – два абсолютно сходящихся ряда/ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ – абсолютно сходящийся ряд.
Доказательство. Проверим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n + v_n|$. Согласно критерию сходимости неотрицательного ряда для этого достаточно проверить ограниченность его частичных сумм. Напишем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}(|u_k| + |v_k|) = S_n + T_n,$$

где S_n, T_n – n-ые частичные суммы сходящихся по условию теоремы рядов $\sum_{k=1}^{n}|u_k|$ и $\sum_{k=1}^{n}|v_k|$. Согласно тому же критерию сходимости, S_n ограничены некоторым числом S, T_n – некоторым числом T. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k + v_k| \leqslant S + T,$$

что и доказывает теорему.

Приведем без доказательства еще несколько свойств сходящихся рядов.
1. Ряд, состоящий из нулевых членов, безусловно является сходящимся и даже абсолютно. Он может быть представлен в виде

$$0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

Если в этом представлении опустить скобки, то получится расходящийся ряд

$$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

Таким образом, для произвольных рядов в выражении

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$$

вообще говоря опустить скобки нельзя. Однако, если хотя бы один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то скобки можно опустить.
2. Мы уже знаем, что ряд

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots + (-1)^{n-1}/n + \dots = \ln 2 \tag{2}$$

является сходящимся. Переставим его члены так, чтобы за двумя положительными шел один отрицательный (при этом порядок положительных членов остается прежним, то же для отрицательных):

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + 1/13 + 1/15 - 1/8 + \dots \tag{3}$$

Этот ряд можно получить, сложив ряд (2) и сходящийся ряд

$$(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots)/2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 + \dots$$

Таким образом, ряд (3) сходится к $\frac{3}{2}\ln 2$ и составлен из тех же слагаемых, что и ряд (2), взятых в измененном порядке. Это означает, что в общем случае осуществлять бесконечную перестановку членов произвольного ряда нельзя – такая операция может изменить сумму ряда. В то же время, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то любая перестановка членов ряда допустима – сумма переставленного ряда такая же, как и исходного.
3. Рассмотрим операцию умножения рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ будем называть их произведением, если

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_{n+1-k}.$$

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и S, T – их суммы, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ также абсолютно сходится и $S \cdot T$ – его сумма.

Лекция 4.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование.
От изучения свойств числовых рядов перейдем к рядам, членами которых являются не числа, а функции переменного x, или как еще их называют – функциональным рядам. Пусть нам задана последовательность действительнозначных функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, определенных на некотором, одном и том же для всех $u_n(x)$, отрезке $[a, b]$ или интервале (a, b). В последнем случае этот интервал быть может бесконечным в одну или обе стороны, (a, ∞) например. Будем обозначать эту область определения функций $u_n(x)$ символом T. Коротко это записывается так $u_n : T \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Функциональным рядом (на T) называют ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \;\; x \in T. \tag{1}$$

При каждом фиксированном $x \in T$ это обычный числовой ряд, а функциональный ряд, таким образом, это множество числовых рядов, в котором каждый элемент – ряд имеет свое индивидуальное имя x. Иногда это имя называют параметром ряда, но чаще, также как и для функций u_n, переменной ряда (1). Чтобы отличать числовой ряд от функционального, условимся, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2}$$

– это числовой ряд, значение функционального ряда в точке x. Сам же функциональный ряд будем записывать так

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot), \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \;\; x \in T, \tag{3}$$

с разной степенью подробности. Как и для числовых рядов, определяются частичные суммы

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x), \;\; x \in T,$$

ряда (3) и его остатки

$$\sum_{n=k}^{\infty} u_n(x), \;\; x \in T.$$

Точки множества T естественным образом подразделяются на две части. К первой относят те $x \in T$, для которых ряд (2) сходится. Ее называют областью сходимости функционального ряда (3). Ко второй части относят все оставшиеся точки $x \in T$. Для каждой из них ряд (2) не является сходящимся. Эту область называют областью расходимости ряда (3). Суммой $S(x)$ функционального ряда на области сходимости называют зависимость суммы ряда (2) от переменной x.

Однако такого разделения точек оказывается недостаточно для получения свойств наследования. Так ряд из непрерывных функций может вести себя по разному: он может сходиться к непрерывной функции, а может к разрывной:

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для которого все u_n – нулевые функции, т.е. функции в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ принимающие значение 0. Понятно, что тогда сумма ряда – нулевая функция. В этом случае все члены ряда (3) и его сумма – непрерывные функции.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = x^2/(1+x^2)^n$, $x \in \mathbb{R}$. При $x = 0$ все $u_n(0)$ равны нулю. Поэтому ряд (2) в этом случае сходится к нулю. Если же $x \neq 0$, то (2) представляет из себя сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/(1 + x^2) < 1$. Его сумма легко подсчитывается и равна

$$\frac{x^2}{1-q} - x^2 = 1 + x^2 - x^2 = 1.$$

Таким образом сумма ряда (3) из непрерывных функций u_n оказалась разрывной в точке 0: в нуле она равна нулю, а вне нуля она принимает значение 1.

Чтобы обеспечить распространение свойств членов функционального ряда (непрерывность, дифференцируемость и др.) на его сумму используют понятие равномерной сходимости. Напомним понятие сходимости. Пусть x – точка из области сходимости. Число $S(x)$ называют суммой ряда (2), если для любого $\epsilon > 0$ найдется $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $k > n_0$ выполняется неравенство $|S_k(x) - S(x)| < \epsilon$. Это означает, что как бы близко к $S(x)$ мы ни задали границы, найдется n_0, после которого ($k > n_0$) все числа $S_k(x)$ лежат в этих границах. Но для разных x из области сходимости эти n_0 вообще говоря разные. Пусть теперь $[c, d]$ – некоторый отрезок, лежащий внутри области сходимости ряда (3). Будем говорить, что (3) сходится на $[c, d]$ равномерно, если число n_0 всякий раз можно выбрать единым для всех $x \in [c, d]$:
ряд (3) сходится на $[c, d]$ равномерно, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что для всех $k > n_0$ и всех $x \in [c, d]$ выполняется неравенство $|S_k(x) - S(x)| < \epsilon$. Подобным образом дается определение равномерной сходимости для других подмножеств из области сходимости ряда.

Обычно для иллюстрации понятия равномерной сходимости используют чертеж, на котором изображают отрезок $[c, d]$, сумму $S(x)$ на $[c, d]$, ϵ-трубку вокруг $S(x)$ на $[c, d]$. Неравномерной сходимости соответствует, например, постоянное вылезание элементов $S_k(x)$ на $[c, d]$ за пределы этой трубки каким бы большим k мы ни задались. Равномерной же сходимости, наоборот, соответствует случай, когда для любой сколь угодно малой ϵ-трубки вокруг $S(x)$ на $[c, d]$ можно подобрать n_0, начиная с которого все $S_k(x)$ на $[c, d]$ находятся внутри этой трубки.

Сходимость ряда (3) изображают одной стрелкой $S_n \to S$ на $[c, d]$, равномерную сходимость – двумя $S_n \rightrightarrows S$ на $[c, d]$.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in T$, – функциональный ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходящийся неотрицательный числовой ряд, $|u_n(x)| \leqslant v_n$ при $x \in T$, $n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot)$ сходится на T равномерно.

Доказательство. Напоминание:

Теорема. $/\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два ряда, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, $n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow$ Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пользуясь этой теоремой, заключаем, что при всех $x \in T$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится. Поэтому при $x \in T$ сходится также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Пусть $S(x)$ – его сумма на T. Далее пользуемся определением равномерной сходимости (*) и сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (**). По заданному $\epsilon > 0$ выбираем, согласно (**), n_0 так, чтобы $\sum_{n=k}^{\infty} v_n < \epsilon$ при любом $k > n_0$. Проверим, что это n_0 – одно из возможных для выполнения (*). Действительно, пусть $k > n_0$ – любое. Тогда

$$|S_k(x) - S(x)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n(x)| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} |u_n(x)| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} v_n < \epsilon.$$

Таким образом мы проверили выполнение требований определения равномерной сходимости.

Теорема 2. $/u_n \in C(T)$, $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in T$, – функциональный ряд, равномерно сходящийся к $S(x)$ на $T/ \Rightarrow S(\cdot) \in C(T)$.

Проверим определение непрерывности $S(\cdot)$ в точке $x_0 \in T$. Зададимся величиной $\epsilon > 0$ и подберем (из-за равномерной сходимости) n_0 так, чтобы $|S_k(x) - S(x)| < \epsilon/4$ при всех $k > n_0$ и всех $x \in T$. Пусть $k = n_0 + 1$. По условию функция S_k, как конечная сумма непрерывных, непрерывна в точке x_0. Значит, найдется $\delta > 0$ такое, что $|S_k(x) - S_k(x_0)| < \epsilon/2$ едва лишь $|x - x_0| < \delta$ и $x \in T$. Все подготовительные действия выполнены, остается произвести последнюю оценку, из которой следует непрерывность в точке x_0 (а, значит, и на T):

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_k(x)| + |S_k(x) - S_k(x_0)| + |S_k(x_0) - S(x_0)| < \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon$$

едва лишь $|x-x_0|<\delta$ и $x\in T$.
Замечание. В примере 2 ряд из непрерывных функций сходится к функции разрывной. Поэтому он сходится неравномерно.

Рассмотрим теперь вопросы почленного интегрирования и дифференцирования рядов.
Теорема 3. $/u_n\in C[a,b]$, $n\in\mathbf{N}$, $c\in[a,b]$, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $x\in[a,b]$, – равномерно сходящийся функциональный ряд, $v_n(x)=\int_c^x u_n(t)\,dt$, $x\in[a,b]$, $n\in\mathbf{N}/\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$, $x\in[a,b]$, – равномерно сходящийся функциональный ряд, для которого $\int_c^x S(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$. Последнее равенство иногда записывают в виде

$$\int_c^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt.$$

Сформулированное утверждение называют теоремой о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов.
Замечание. Если функциональный ряд из теоремы 3 сходится, но условие равномерной сходимости отсутствует, то утверждение теоремы 3 может выполняться и может не выполняться.
Теорема 4 (следствие теоремы 3). $/v_n\in C^1[a,b]$, $n\in\mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(x)$, $x\in[a,b]$, – равномерно сходящийся функциональный ряд/ $\Rightarrow$
если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c\in[a,b]$, то он сходится равномерно на $[a,b]$, его сумма $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(x).$$

Это утверждение называют теоремой о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов.
Замечание. Полезным дополнением к теореме 4 будет пример функционального ряда вида (3), у которого $v_n(x)=1$ при всех x и n. Это всюду расходящийся ряд, для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(x)$ является нулевым и, значит, равномерно сходящимся.

Лекция 5.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Основные свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность и бесконечная дифференцируемость суммы. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Одним из наиболее известных и изученных представителей функциональных рядов являются так называемые степенные ряды. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где a_n, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная, называется степенным рядом, числа a_n, $n\in\mathbf{N}$, – коэффициентами этого ряда. Вопрос о сходимости ряда (1) обычно сводят к исследованию ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$.
Теорема 1 (Абель). $/\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ сходится при $z=z_0/\Rightarrow$ он сходится абсолютно $\forall z$: $|z|<|z_0|$.
Доказательство. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z_0^n$ – сходящийся ряд, то по необходимому признаку сходимости общий член этого ряда должен стремиться к нулю с ростом n:

$$\lim_{n\to\infty}a_n z_0^n=0.$$

Отсюда следует, в частности, что последовательность $\{a_n z_0^n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, скажем некоторым числом $M>0$:

$$|a_n z_0^n|<M,\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{2}$$

Проверим, что из (2) следует утверждение теоремы: пусть $|z|<|z_0|$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \tag{3}$$

Сделанное преобразование показывает, что при исследовании сходимости неотрицательного ряда (3) удобно воспользоваться признаком сравнения и рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Этот ряд сходится, т.к. $|\frac{z}{z_0}| < 1$. Поэтому, пользуясь (2), заключаем, что ряд (3) сходится.
Следствие 1. $/\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ расходится при $z = z_0/ \Rightarrow$ он расходится $\forall z\colon |z| > |z_0|$.
Доказательство следствия проводится методом "от противного": предположение о сходимости ряда (3) при каком-нибудь $|z| > |z_0|$ немедленно приводит к противоречию по теореме 1.
Полученные утверждения делают естественным следующее определение круга и радиуса сходимости: Величина $R \geqslant 0$ (число или символ $+\infty$) такая, что при всех z, у которых $|z| < R$), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

сходится, а при всех z, у которых $|z| > R$) – расходится, называется радиусом сходимости (4). Множество точек z, у которых $|z| < R$, называется кругом сходимости ряда (4).
Замечание. Обычно степенные ряды (4) рассматривают для всех комплексных чисел z. При этом все сделанные нами прежде утверждения и проведенные доказательства или вовсе без изменений, или с незначительными поправками распространяются на эти числа. Для комплексных чисел множество $|z| < R$ представляет из круг. Для действительных чисел множество $|z| < R$ это, конечно, интервал $(-R, R)$, но мы все-таки будем, по аналогии, называть его кругом сходимости ряда (4).

Теорема 2. $/\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд/ $\Rightarrow$ он обладает своим радиусом сходимости R. При этом в каждой точке из круга сходимости этот ряд сходится абсолютно. Если $0 < r < R$, то на $[-r, r]$ степенной ряд сходится равномерно.
Доказательство. Первая часть теоремы интуитивно понятна и является следствием теоремы 1: если степенной ряд сходится в точке z_0, то в каждой точке $|z| < |z_0|$ он сходится абсолютно. Поэтому R можно воспринимать, как самое большое из $|z_0|$, для которых исходный ряд сходится. При этом может оказаться, что $R = 0$ (т.е. наш степенной ряд сходится при $z = 0$, а во всех остальных точках расходится). Может оказаться, что $R = +\infty$, что означает абсолютную сходимость степенного ряда в каждой точке z. И может случиться, что $0 < R < +\infty$. Это означает абсолютную сходимость степенного ряда в каждой точке $|z| < R$ и расходимость степенного ряда для $|z| > R$. Формальное доказательство первой половины теоремы требует более аккуратного рассмотрения, – мы не будем его приводить. Пусть теперь $R > 0$ и $0 < r < R$.

Напоминание: Теорема $/\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in T$, – функциональный ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходящийся числовой ряд, $|u_n(x)| \leqslant v_n$ при $x \in T$, $n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot)$ сходится на T равномерно.
Как было установлено, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. Применяя сформулированную теорему к функциональному ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in [-r, r] \tag{5}$$

и ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$, получим равномерную сходимость ряда (5) на $[-r, r]$.
Следствие 2. $/S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд, $R > 0$ – его радиус сходимости, $0 < r < R/ \Rightarrow S(\cdot) \in C[-r, r]$.
Доказательство этого утверждения следует из теоремы 2 и теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных слагаемых.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

не является абсолютно сходящимся ни в одной точке $z \neq 0$ (по признаку Даламбера). Поэтому он не может сходиться ни в одной точке $z \neq 0$ (по теореме 1). Значит, для этого ряда $R = 0$.

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится при любом $z \in \mathbb{R}$ (по признаку Даламбера). Для этого ряда $R = \infty$.

Пример 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geqslant 1$. Для этого ряда $R = 1$.

Пример 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

сходится при $|z| \leqslant 1$ (из-за сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$) и расходится при $|z| > 1$ (по признаку Даламбера). Для этого ряда $R = 1$.

Пример 5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$ (по признаку Даламбера). Кроме того, он сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$. Для этого ряда $R = 1$.

Последние три примера демонстрируют варианты поведения свойства сходимости для разных степенных рядов на границе круга сходимости. Вычисление радиуса сходимости, в некоторых случаях, может произведено с помощью признаков Даламбера и Коши:

Теорема 3. $/\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = q/ \Rightarrow R = 1/q$.
Доказательство. Применяем признак Даламбера к изучению сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n|$:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}| = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |z \cdot q|,$$

что означает абсолютную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ при $|z \cdot q| < 1$ и его расходимость при $|z \cdot q| > 1$.

Теорема 4. $/\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q/ \Rightarrow R = 1/q$.
Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 3.

Рассмотрим вопрос о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов. При его изучении оказывается полезным следующее замечание: при почленном дифференцировании или интегрировании степенных рядов радиус сходимости не изменяется: ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n z^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(n+1)) z^{n+1}$$

обладают одним и тем же радиусом сходимости R. Обозначим доказательство следующими рассуждениями: пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $0 < |z| < r < R$. Как и прежде из-за сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ следует, что последовательность $\{a_n r^n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена некоторым числом $M > 0$: $|a_n r^n| < M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot n z^{n-1}| = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| n \left|\frac{z}{r}\right|^{n-1} < \frac{M}{r} \sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{z}{r}\right|^{n-1}.$$

Последний ряд сходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n z^{n-1}$ абсолютно сходится. И, аналогично, абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(n+1)) z^{n+1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(a_n/(n+1)) z^{n+1}| = r \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| \frac{1}{n+1} \left|\frac{z}{r}\right|^{n+1} < Mr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left|\frac{z}{r}\right|^{n+1}.$$

Значит, при почленном интегрировании и дифференцировании ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ его радиус сходимости неубывает (т.е. может лишь возрасти). Но реально он увеличиться не может по только что проведенным рассуждениям: если он стал больше, например, при почленном интегрировании, то, дифференцируя почленно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/(n+1)) z^{n+1}$, получим что не R, а какое-то большее число является радиусом сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

Напоминание: Теорема $/v_n \in C^1[a,b]$, $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x)$, $x \in [a,b]$, равномерно сходится$/ \Rightarrow$ если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c \in [a,b]$, то он сходится равномерно на $[a,b]$, его сумма $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x).$$

Следствие 3. $/S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд, $R > 0$ – его радиус сходимости$/ \Rightarrow S(\cdot) \in C^1(-R,R)$ и $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot n) z^{n-1}$ для любого $z \in (-R,R)$.

Замечание. Применяя следствие 3 повторно, получают бесконечную дифференцируемость $S(\cdot)$ на $(-R,R)$ и всевозможные формулы для производных. Например,

$$S^{(2)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot n(n-1)) z^{n-2}, \quad z \in (-R,R).$$

Точно также (как следствие теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов из непрерывных функций) запишем

Следствие 4. $/S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ – степенной ряд, $R>0$ – его радиус сходимости/ $\Rightarrow$

$$\int_0^z S(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(n+1))z^{n+1},\quad z\in(-R,R).$$

Все полученные утверждения непосредственно распространяются на ряды вида (1). Запишем, например, как выглядит аналог теоремы 1:
Теорема 1′. $/\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_1)^n$ сходится при $z=z_0/ \Rightarrow$ он сходится абсолютно $\forall z$: $|z-z_1|<|z_0-z_1|$.

Лекция 6.

Разложение функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Применение степенных рядов.
Будем обозначать через $D^n(a,b)$ класс функций, которые в каждой точке интервала (a,b) обладают всеми производными порядка от 1 до n включительно. Напоминание.
Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)$/f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbf{N}$, $x_0\in(a,b)$, $f\in D^n(a,b)/\Rightarrow$ значение $f(x)$, $x\in(a,b)$, может быть представлено в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где ξ – некоторая промежуточная точка интервала (a,b).
Ряд Тейлора. Пусть $f\in C(a,b)$ обладает производными любого порядка ($f\in C^\infty(a,b)$). Обозначим

$$T_n(f,x,x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

– полином Тейлора порядка $n\in\mathbf{N}$ функции f в точке $x_0\in(a,b)$. Рядом Тейлора функции f в точке x_0 называют ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Этот ряд при $x_0=0$ иногда называют рядом Маклорена. Функция f называется аналитической на (a,b), если в каждой точке $x\in(a,b)$ числовая последовательность $T_n(f,x,x_0)$ сходится при $n\to\infty$ к $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Класс аналитических на (a,b) функций обозначают $\mathcal{A}(a,b)$.
Пример. Если $p(x)$ — произвольный полином, то $p\in\mathcal{A}(a,b)$.
Теорема 1. (достаточный признак аналитичности функции) $/f\in C^\infty(a,b)$, для некоторого $M>0$ выполняется $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ при каждом $x\in(a,b)$ и каждом $n\in\mathbf{N}/\Rightarrow f\in\mathcal{A}(a,b)$.
Доказательство. Установим предварительно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \tag{1}$$

при любом фиксированном $a\in\mathbb{R}$. Действительно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$$

сходится по признаку Даламбера при любом $a\in\mathbb{R}$ и, значит, по необходимому признаку сходимости этого ряда выполнено (1). Для проверки аналитичности $f(\cdot)$ требуется установить, что

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-T_n(f,x,x_0))=0.$$

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа,

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-T_n(f,x,x_0)|=\lim_{n\to\infty}|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n|\leqslant M\lim_{n\to\infty}|\frac{(x-x_0)^n}{n!}|=0,$$

что и требовалось проверить.
Примеры.

1) $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $f^{(n)}(0)=1$, $f^{(n)}(x)=e^x$ при $n\in\mathbf{N}\Rightarrow|f^{(n)}(x)|\leqslant M=\max\{e^a,e^b\}$ на (a,b). По достаточному признаку аналитичности функции

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k\,!}$$

на произвольном конечном интервале (a,b), а, значит, и на $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\sin x$, $f^{(2k)}(0)=0$ для четных $n=2k$ и 0, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ для нечетных $n=2k+1$; кроме того $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ на (a,b). Поэтому

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

3) $f(x)=\cos x$, $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ для четных $n=2k$ и 0, $f^{(2k+1)}(0)=0$ для нечетных $n=2k+1$; кроме того $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ на (a,b). Поэтому

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

4)

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

5)

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

6) пусть $a\in\mathbb{R}$ – фиксировано. Тогда

$$(1+x)^a=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}x^k\,,\qquad x\in(-1,1).$$

Для разложения аналитических функций в степенные ряды применяются также теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов. Напоминание.
Теорема. $/R>0$ – радиус сходимости ряда $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n/\Rightarrow S(\cdot)\in C^1(-R,R)$ и

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot n)z^{n-1},\quad\int_0^z S(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(n+1))z^{n+1},\quad z\in(-R,R).$$

7)

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\,,\qquad x\in(-1,1),$$

т.к.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^k x^k+\dots\,,\qquad x\in(-1,1).$$

8) Найдем разложение функции arcsin в ряд. Для этого заметим, что $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}$. Поэтому

$$(\arcsin x)'=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k k!}x^{2k}\,,\qquad x\in(-1,1),$$

$$\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k k!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad x\in(-1,1).$$

9) Аналогично, пользуясь равенством $(\arctan x)'=(1+x^2)^{-1}$, найдем

$$\arctan x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,\qquad x\in(-1,1).$$

Для исследования представлений функций степенными рядами оказывается полезной теорема о единственности такого представления:

Теорема 2. $/\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R$, $R>0/ \Rightarrow a_n = b_n$, $n=0,1,2,\ldots$.
Доказательство. По условиям теоремы

$$a_0 - b_0 = (x-x_0)\cdot f(x),$$

где $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)(x-x_0)^{n-1}$ – непрерывная на (x_0-R, x_0+R) функция. Поэтому

$$a_0 - b_0 = \lim_{x\to x_0}(a_0-b_0) = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot f(x) = 0,$$

$a_0=b_0$. Далее, опять же из условий теоремы следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}, \quad |x-x_0|<R.$$

Поэтому, по аналогичной причине, $a_1=b_1$ и, повторяя рассуждения, $a_n=b_n$, $n=0,1,2,\ldots$.

Степенные ряды находят широкое применение в разных направлениях. В качестве примеров следует прежде всего выделить их использование для приближенных вычислений. Например, чтобы приближенно найти $\sin 1$ можно воспользоваться рядом

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots.$$

Вычисляя какую-нибудь частичную сумму этого ряда, получают то или иное приближенное значение для $\sin 1$. Однако часто непосредственное использование рядов Тейлора в этих целях неэффективно – предварительно требуются некоторые дополнительные действия. Так, чтобы приближенно вычислить $\sqrt[3]{9}$ записывают

$$\sqrt[3]{9} = 2(1+1/8)^{1/3}$$

и потом пользуются рядом из примера 6). В качестве еще одного примера приведем возможность вычисления определенных интегралов от "неберущихся интегралов":

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots)\,dx = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots$$

Лекция 7.

Двойной интеграл и его свойства. Геометрический смысл двойного интеграла.
Для того, чтобы говорить о двойных, тройных (в общем случае, – кратных) интегралах, необходимо условиться о некоторых обстоятельствах, при которых эти интегралы будут изучаться. Всякий раз, говоря о кратном интеграле, в первую очередь имеют в виду, что заданы два объекта. Первый объект – действительнозначная функция $f(\cdot)$, которую надлежит интегрировать. Для двойных интегралов – это функция, зависящая от двух переменных (x, y). Второй объект – область интегрирования или область, по которой вычисляется интеграл от $f(\cdot)$. Для двойных интегралов – это некоторое подмножество S точек плоскости $\mathbb{R}^2$. При этом предполагается, что при всех, или при почти всех значениях $(x,y)\in S$ функция $f(x,y)$ определена. Самый общий случай определения кратных интегралов мы рассматривать не будем.

Для случая двойных интегралов его определение начнем с конкретизации областей интегрирования. Одним из простейших видов этих областей является совокупность точек плоскости

$$Y(\varphi_1,\varphi_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}, \tag{1}$$

где $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ – две непрерывные на $[a,b]$ функции, удовлетворяющие неравенству $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$ при каждом $x\in[a,b]$.
Внутренними точками такой области будем называть множество

$$\widehat{Y}(\varphi_1,\varphi_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(a,b),\ \varphi_1(x)< y<\varphi_2(x)\}.$$

По аналогии будем рассматривать также множества

$$X(\phi_1,\phi_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ \phi_1(y)\leqslant x\leqslant\phi_2(y)\}, \tag{2}$$

где $\phi_1(\cdot)$, $\phi_2(\cdot)$ – две непрерывные на $[c,d]$ функции, удовлетворяющие неравенству $\phi_1(y)\leqslant\phi_2(y)$ при каждом $y\in[c,d]$ и $\widehat{X}(\phi_1,\phi_2)$.

Пусть теперь $f(\cdot)$ – непрерывная на области, например, вида (1) функция двух переменных. Определим, что является интегралом от f по $Y=Y(\varphi_1,\varphi_2)$. Для этого зададимся натуральным $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим сумму

$$S_n(f,Y) = n^{-2}\sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\in Y} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right), \tag{3}$$

где суммирование в (3) распространяется на все целые значения индексов i и j, для которых $i/n \in [a,b]$ и, одновременно, $\varphi_1(i/n) \leqslant j/n \leqslant \varphi_2(i/n)$. Коротко последние два условия записаны в (3) в виде $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \in Y$. Можно показать, что с увеличением n суммы $S_n(f,Y)$ стремятся к некоторому числу:
Теорема 1 (без доказательства). $/f \in C(Y),\, Y = Y(\varphi_1, \varphi_2)/ \Rightarrow$

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(f,Y).$$

Это число и называется двойным интегралом от f по Y:

$$\iint_Y f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} S_n(f,Y).$$

Точно также определяется интеграл от функции f непрерывной на области вида (2).

Последний шаг, который мы сделаем для определения двойных интегралов – распространим сделанное определение интеграла на несколько областей вида (1) или (2). Именно, пусть задано конечное семейство областей $\{T_k\}_{k=1}^n$ вида (1) или (2), не имеющих общих внутренних точек: $\widehat{T}_k \cap \widehat{T}_m = \emptyset$, если $k \neq m$. Будем обозначать, для краткости, совокупность множеств $T \subset \mathbb{R}^2$, допускающих разложение $T = \cup_{k=1}^n T_k$ рассмотренного вида, символом $\mathcal{T}_2$. Кроме того, внутренними точками $\widehat{T}$ множества T, по определению, будем называть те $(x,y) \in T$, которые попадают в $\cup_{k=1}^n \widehat{T}_k$ хотя бы для одного разложения $T = \cup_{k=1}^n T_k$, где каждое T_k вида (1) или вида (2) независимо друг от друга. Пусть f непрерывна на $T = \cup_{k=1}^n T_k$. Класс всех таких функций будем обозначать $C(T)$. По определению

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^n \iint_{T_k} f_k(x,y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Одним из основных вопросов, который требуется решить при таком подходе к определению двойного интеграла, – это вопрос о независимости (4) от способа дробления области $T = \cup_{k=1}^n T_k$ на составляющие $\{T_k\}_{k=1}^n$. Несложно понять, что это дробление неоднозначно, и можно привести множество примеров разложения $T = \cup_{k=1}^{n'} T'_k$. Мы не будем доказывать утверждение о независимости правой части (4) от выбора $\{T_k\}_{k=1}^n$ в полном объеме, а установим его в некотором весьма частном случае, который, тем не менее, показывает как следует поступать в общем случае. Итак, пусть $f(\cdot) \in C(Y)$, где $Y = Y(\varphi_1, \varphi_2)$ – область вида (1), $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$. Пусть, кроме того, дана функция $\varphi_3 \in C[a,b]$, такая что $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_3(x) \leqslant \varphi_2(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Тогда, помимо Y, имеются еще две области вида (1) – $Y_1 = Y(\varphi_1, \varphi_3)$ и $Y_1 = Y(\varphi_3, \varphi_2)$. Для этих областей $Y = Y_1 \cup Y_2$, $\widehat{Y}_1 \cap \widehat{Y}_2 = \emptyset$. Проверим, что

$$\iint_Y f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{Y_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{Y_2} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

Действительно, пусть $M = \max |f(x,y)|$ по всем $(x,y) \in Y$ (при сделанных предположениях такая величина меньше бесконечности по теореме Вейерштрасса), $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$S_n(f,Y_1) + S_n(f,Y_2) - M \cdot \frac{n+1}{b-a} \cdot n^{-2} \leqslant S_n(f,Y) \leqslant S_n(f,Y_1) + S_n(f,Y_2).$$

С увеличением n (по теореме 1) левая и правая части в этой строке стремятся к общему пределу, что и доказывает (5). Равенство (5) справедливо также и в более общей ситуации, когда Y_1, Y_2 – произвольные подмножества из $\mathbb{R}^2$ класса $\mathcal{T}_2$, не имеющие общих внутренних точек. В этом случае (5) называется аддитивностью интеграла по множествам:
Теорема 2. $/T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2,\, \widehat{T}_1 \cap \widehat{T}_2 = \emptyset,\, f \in C(T_1 \cup T_2)/ \Rightarrow$

$$\iint_{T_1 \cup T_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{T_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Доказательство теоремы 2 является простым следствием (5). Проведем его на примере, когда $T_1 = T_{1,1} \cup T_{1,2}$ и $T_2 = T_{2,1} \cup T_{2,2}$ – разложения T_1, T_2 на пару множеств вида (1) или (2),

$$\widehat{T}_{1,1} \cap \widehat{T}_{1,2} = \emptyset, \quad \widehat{T}_{2,1} \cap \widehat{T}_{2,2} = \emptyset,$$

причем из-за $\widehat{T}_1 \cap \widehat{T}_2 = \emptyset$, дополнительно считаем

$$\widehat{T}_{1,1} \cap \widehat{T}_2 = \emptyset, \quad \widehat{T}_{1,2} \cap \widehat{T}_2 = \emptyset.$$

Тогда

$$T_1 \cup T_2 = T_{1,1} \cup T_{1,2} \cup T_{2,1} \cup T_{2,2}$$

– разложение $T_1 \cup T_2$ на четыре множества вида (1) или (2), не имеющих общих внутренних точек. Из (4) следует тогда, что

$$\iint_{T_1\cup T_2} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\iint_{T_{1,1}} + \iint_{T_{1,2}} + \iint_{T_{2,1}} + \iint_{T_{2,2}}\right) f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\iint_{T_1} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\iint_{T_{1,1}} + \iint_{T_{1,2}}\right) f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\iint_{T_2} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\iint_{T_{2,1}} + \iint_{T_{2,2}}\right) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Сравнивая полученные равенства получаем утверждение теоремы для рассмотренных T_1, T_2. Общий случай устанавливается по аналогии.

Перечислим некоторые определения и простые свойства двойных интегралов. Возьмем f тождественно равной единице всюду на T. Это непрерывная на T функция. Интеграл от f по T называется площадью T. Будем обозначать эту величину $S(T)$:

$$S(T) = \iint_T dx\,dy.$$

Теорема 3 (линейность интеграла). $/T \in \mathcal{T}_2,\ f_1, f_2 \in C(T)$ и $a, b \in \mathbb{R}/ \Rightarrow$

$$\iint_T (af_1(x,y) + bf_2(x,y))\,dx\,dy = a\iint_T f_1(x,y)\,dx\,dy + b\iint_T f_2(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Доказательство (6) начинают с рассмотрения области интегрирования вида (1) или (2). Для таких областей T и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$S_n(af_1 + bf_2, T) = n^{-2} \sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\in T} (af_1\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) + bf_2\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)) = aS_n(f_1,T) + bS_n(f_2,T).$$

Переходя к пределу по $n \to \infty$ и пользуясь теоремой 1, получаем (6) для областей вида (1), (2). Пусть теперь $T = T_1 \cup T_2$, $\widehat{T_1} \cap \widehat{T_2} = \emptyset$, и каждое из T_1, T_2 имеет вид (1) или (2). Тогда

$$\iint_T (af_1(x,y) + bf_2(x,y))\,dx\,dy = (\iint_{T_1} + \iint_{T_2})(af_1(x,y) + bf_2(x,y))\,dx\,dy =$$

$$a\iint_{T_1} f_1(x,y)\,dx\,dy + b\iint_{T_1} f_2(x,y)\,dx\,dy + a\iint_{T_2} f_1(x,y)\,dx\,dy + b\iint_{T_2} f_2(x,y)\,dx\,dy =$$

$$a\iint_T f_1(x,y)\,dx\,dy + b\iint_T f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Первое из приведенных равенств – это определение (4), второе – равенство (6) для областей специального вида (1) и (2), третье – определение (4). Точно также равенство (6) устанавливается в общем случае, когда $T = \cup_{k=1}^n T_k$. Доказательство закончено.

Теорема 4 (монотонность или положительность интеграла). $/T \in \mathcal{T}_2,\ f_1, f_2 \in C(T)$ и $f_1(x,y) \leqslant f_2(x,y)$ для всех $(x,y) \in T/ \Rightarrow$

$$\iint_T f_1(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint_T f_2(x,y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть область T имеет вид (1) или (2), $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$S_n(f_1,T) = n^{-2} \sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\in T} f_1\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) \leqslant n^{-2} \sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\in T} f_2\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right) = S_n(f_2,T).$$

Переходя к пределу по $n \to \infty$ и пользуясь теоремой 1, получаем (7) для областей вида (1), (2). Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения теоремы 3, не будем их приводить. Доказательство закончено.

Так как $f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$ и $-f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$ для всех $(x,y) \in T$, из последних двух теорем следует неравенство

$$\left|\iint_T f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint_T |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Еще одним следствием (7) являются неравенства

$$S(T)\cdot m \leqslant \iint_T f(x,y)\,dx\,dy \leqslant S(T)\cdot M,$$

выполняющиеся если $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ при всех $(x,y)\in T$.

В заключение скажем несколько слов о геометрическом смысле двойного интеграла. Пусть $T\in\mathcal{T}_2$, $f\in C(T)$, $f(x,y)\geqslant 0$ при $(x,y)\in T$. Тогда естественно считать, что двойной интеграл (4) представляет собой объем прямого цилиндроида, построенного на области T как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$. Это и называется геометрическим смыслом двойного интеграла.

Лекция 8.

Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

Для непрерывных функций $f\in C(T)$, заданных на множествах $T\subset\mathbb{R}^2$ вида $Y(\varphi_1,\varphi_2)$ или $X(\phi_1,\phi_2)$, имеется формула, позволяющая свести вычисление двойного интеграла от $f(\cdot)$ по T к вычислению однократных интегралов. Пусть $\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot)\in C[a,b]$

$$Y(\varphi_1,\varphi_2)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\},$$

$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$ при каждом $x\in[a,b]$. Тогда

$$\iint_Y f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}S_n(f,Y),\quad \text{где } S_n(f,Y)=n^{-2}\sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\in Y} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right).$$

Теорема 1 (без доказательства). $/\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$, $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$, $x\in[a,b]$, $f\in C(Y(\varphi_1,\varphi_2))/\Rightarrow$

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\in C[a,b].$$

Напомним одно из возможных определений однократного интеграла от непрерывной функции $g\in C[a,b]$ по отрезку $[a,b]$:

$$\int_a^b g(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n(g,[a,b]),\quad S_n(g,[a,b])=n^{-1}\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b]} g\left(\frac{i}{n}\right).$$

Преобразуем выражение для $S_n(f,Y)$:

$$S_n(f,Y)=n^{-1}\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b]}\left(n^{-1}\sum_{\frac{j}{n}\in[\varphi_1(\frac{i}{n}),\varphi_2(\frac{i}{n})]} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\right). \tag{1}$$

Внутренняя сумма в (1) при каждом i, удовлетворяющим условию $\frac{i}{n}\in[a,b]$, совпадает с $S_n(f(\frac{i}{n},\cdot),[\varphi_1(\frac{i}{n}),\varphi_2(\frac{i}{n})])$. При n стремящемся к бесконечности и каждом фиксированном $x\in[a,b]$ суммы вида $S_n(f(x,\cdot),[\varphi_1(x),\varphi_2(x)])$ сходятся к

$$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Образуем

$$S_n(F,[a,b])=n^{-1}\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b]} F\left(\frac{i}{n}\right), \tag{2}$$

которая с ростом n сходится к

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Внешне правая часть (1) и интегральные суммы из (2) весьма похожи: с одной стороны – это (1), с другой

$$n^{-1}\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b]}\left((n_i)^{-1}\sum_{\frac{j}{n_i}\in[\varphi_1(\frac{i}{n_i}),\varphi_2(\frac{i}{n_i})]} f\left(\frac{i}{n_i},\frac{j}{n_i}\right)\right).$$

В первом случае для определения интегральных сумм нужно выбрать одно n, во втором интегральные суммы определяются заданием набора натуральных чисел n и n_i, $i=1,\dots,n$. Доказательство того, что образованные интегральные суммы имеют одинаковый предел требует некоторых рассуждений, связанных с понятием равномерной непрерывности функций. Мы не будем их проводить, а напишем основное следствие этого факта:

Теорема 2 (без доказательства). $/f\in C(T)$, $T=Y(\varphi_1,\varphi_2)/\Rightarrow$

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx. \tag{3}$$

Аналогично, если $f \in C(T)$, $T = X(\phi_1, \phi_2)$, $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in C[c,d]$ то

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)\,dy. \tag{4}$$

Правые части (3) и (4) называют повторными интегралами, а сами равенства (3) и (4) – сведением двойного интеграла к повторному.

Другим важным вопросом, часто возникающим при вычислении кратных интегралов, является вопрос о замене переменных в таком интеграле. Чтобы понять как производится такая замена, рассмотрим простейший случай преобразования плоскости:

$$x \leftrightarrow 2t, \quad y \leftrightarrow y. \tag{5}$$

Пусть $f \in C(T)$,

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0,1]\}.$$

Делая замену переменных (5), мы вместо величин вида x подставляем $2t$, а величины вида y оставляем без изменения. При этом квадрат $T \subset (Oxy)$ преобразуется в прямоугольник

$$S = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1/2],\ y \in [0,1]\},$$

$S \subset (Oty)$. Функция $f(\cdot)$ переменных (x,y) преобразуется в функцию $g(\cdot)$ переменных (t,y). Эта функция вычисляется по правилу $g(t,y) = f(2t,y)$. Мы хотим от интегрирования f по области T перейти к вычислению двойного интеграла по области S от некоторой функции h, каким-то способом связанной с g, с тем чтобы

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S h(t,y)\,dt\,dy.$$

Эта задача легко решается при помощи формулы (3):

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int\limits_0^{1/2} \left(\int\limits_0^1 g(t,y)\,dy\right) 2\,dt = \iint_S g(t,y) 2\,dt\,dy$$

и, значит, $h(t,y) = 2g(t,y)$.

Наметим схему, по которой можно вывести этот результат непосредственно. Будем считать, что вне области T функция f всюду равна нулю. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$T_{i,j} = \{(x,y) \mid i/n \leqslant x \leqslant (i+1)/n,\ j/n \leqslant y \leqslant (j+1)/n\}$$

– квадрат в плоскости (Oxy) со стороной $1/n$. Образом этого квадрата (в плоскости (Oty)) при изучаемом отображении будет прямоугольник

$$T'_{i,j} = \{(t,y) \mid i/(2n) \leqslant t \leqslant (i+1)/(2n),\ j/n \leqslant y \leqslant (j+1)/n\}$$

со сторонами $1/(2n)$ и $1/n$. Его площадь в два раза меньше площади квадрата $T_{i,j}$. Выпишем некоторое количество равенств, из которых получается требуемое (некоторые из равенств приводятся без достаточного обоснования):

$$S_n(f,T) = n^{-2} \sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n}) \in T} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = n^{-2} \sum_{(\frac{i}{2n},\frac{2j}{2n}) \in S} g\left(\frac{i}{2n}, \frac{2j}{2n}\right) \approx$$

$$\approx n^{-2} \sum_{(\frac{i}{2n},\frac{2j}{2n}) \in S} \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{i}{2n}, \frac{2j}{2n}\right) + g\left(\frac{i}{2n}, \frac{2j+1}{2n}\right)\right) = 2 \cdot (2n)^{-2} \sum_{(\frac{i}{2n},\frac{j}{2n}) \in S} g\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right).$$

Таким образом,

$$S_n(f,T) \approx 2S_{2n}(g,S).$$

В пределе при $n \to \infty$ приближенное равенство заменяется точным, а интегральные суммы – кратными интегралами.

Рассмотренная схема доказательства распространяется и на общий случай замены переменных. Ее основная часть состоит в основном в анализе того, во сколько раз площадь элементарной ячейки (т.е. площадь $T_{i,j}$ в разобранном примере) превышает площадь образа ($T'_{i,j}$ в примере): в два раза в данном случае. Таким образом наше преобразование сокращает площади в два раза. Чтобы компенсировать это сокращение при g появляется коэффициент – число 2.

В общем случае, когда задана замена переменных

$$x \leftrightarrow u(s,t), \quad y \leftrightarrow v(s,t) \tag{6}$$

точного равенства, связывающего площади квадрата $T_{i,j}$ (из плоскости (Ost)) и его образа (из плоскости (Oxy)), знать не требуется, но требуется знать чему равен предел отношения их площадей с ростом n. Для отображений (6), обладающих непрерывными частными производными по переменным s и t, такое равенство известно. Оно обычно оформляется в виде

$$dx\,dy = |J|\,ds\,dt$$

и означает, что указанный предел равен модулю числа $J = J(s,t)$,

$$J(s,t) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s},$$

подсчитанного в точке с координатами (s,t). Такой определитель называется якобианом отображения (6) в точке (s,t). Поясним как возникает эта величина. Несколько изменим введенные раньше обозначения: пусть $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{i,j} = \{(s,t) \mid i/n \leqslant s \leqslant (i+1)/n,\ j/n \leqslant t \leqslant (j+1)/n\}$$

– квадрат в плоскости (Ost),

$$A = \left(u(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}), v(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\right), \quad B = \left(u(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}), v(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n})\right), \quad C = \left(u(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}), v(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n})\right)$$

– три точки плоскости (Oxy). Образом множества $T_{i,j}$ при отображении (6) будет совокупность

$$\{(x,y) \mid x = u(s,t),\ y = v(s,t), \quad (s,t) \in T_{i,j}\} \tag{7}$$

точек плоскости (Oxy). Сделанные предположения о непрерывности частных производных позволяют заключить, что такое множество, приблизительно, совпадает с параллелограммом, отложенным от точки A с направляющими AB и AC. Запишем координаты вектора AB:

$$\left(u(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}) - u(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}), \quad v(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}) - v(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\right) \approx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{1}{n}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

где частные производные вычислены в точке $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$. Аналогично, координаты вектора AC приблизительно равны

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

Вспоминая определение векторного произведения, получаем, что площадь (7) приблизительно равна $|J|/n^2$, а отношение площади (7) к площади $T_{i,j}$ – это приблизительно $|J|$ в точке $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$. Сформулируем теперь теорему о замене переменных в двойном интеграле. Будем считать, что нам задано однозначное преобразование (6) множества $S \in \mathcal{T}_2$, $S \subset (Ost)$, во множество $T \in \mathcal{T}_2$, $T \subset (Oxy)$. Это означает, что

1) для каждого $(s,t) \in S$ точка с координатами $x = u(s,t)$, $y = v(s,t)$ принадлежит T,
2) для каждого $(x,y) \in T$ найдется пара $(s,t) \in S$ такая, что $x = u(s,t)$, $y = v(s,t)$,
3) разным $(s,t) \in S$ соответствуют разные $(x,y) \in T$.

Пусть преобразование (6) и его частные производные по переменным s и t непрерывны на S (для вычисления частных производных на S обычно предполагают, что преобразование (6) задано на чуть большем множестве, содержащем S); пусть якобиан $J(s,t)$ сохраняет постоянный знак в S. Тогда выполняется формула замены переменных:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S g(s,t)|J|\,ds\,dt,$$

$g(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$.
Рассмотрим один частный случай этой формулы: переход к полярной системе координат. Каждой точке (x,y) на плоскости $\mathbb{R}^2$ сопоставим ее полярные координаты: радиус $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ и угол $\phi \in [0, 2\pi)$, однозначно определяемый из равенств

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

Вычислим якобиан этого отображения:

$$J = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r.$$

Формула замены переменных будет выглядеть так:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S g(r,\phi) r\,dr\,d\phi,$$

$g(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, T – образ множества S при отображении $(r,\phi) \to (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Это равенство справедливо, например, в случае, когда оказалось, что $T \in \mathcal{T}_2$ как множество из (Oxy) и $S \in \mathcal{T}_2$ как множество из $(Or\phi)$, лежащее в полуполосе $\{(r,\phi) \mid r > 0,\ \phi \in [0, 2\pi)\}$.

Лекция 9.

Вычисление тройного интеграла. Криволинейные системы координат. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в кратных интегралах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.

Рассмотренные прежде определения и теоремы обобщаются на интеграл от функций трех и большего числа переменных. Повторим их для случая тройного интеграла.

Одним из простейших видов областей интегрирования является совокупность точек пространства $\mathbb{R}^3$ вида

$$Z(\varphi_1,\varphi_2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in T,\ \varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}, \tag{1}$$

где $T\in\mathcal{T}_2$, $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)\in C(T)$, $\varphi_1(x,y)\leqslant\varphi_2(x,y)$ при каждом $(x,y)\in T$. Внутренними точками такой области будем называть множество

$$\widehat{Z}(\varphi_1,\varphi_2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\widehat{T},\ \varphi_1(x,y)<z<\varphi_2(x,y)\}.$$

По аналогии рассматривают множества $Y(\varphi_1,\varphi_2)$, $X(\varphi_1,\varphi_2)$. Все их будем обозначать множествами вида (1).

Пусть теперь $f(\cdot)$ – непрерывная на области $Z=Z(\varphi_1,\varphi_2)$ вида (1) функция трех переменных. Определим, что является интегралом от f по Z. Для этого зададимся натуральным $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим сумму

$$S_n(f,Z)=n^{-3}\sum_{(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n})\in Z} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right), \tag{2}$$

где суммирование в (2) распространяется на все целые значения индексов $i,\ j,\ k$, для которых $(i/n,j/n)\in T$ и, одновременно, $\varphi_1(i/n,j/n)\leqslant k/n\leqslant\varphi_2(i/n,j/n)$.

Теорема 1 (без доказательства). $/f\in C(Z)$, $Z=Z(\varphi_1,\varphi_2)/\Rightarrow$

$$\exists\lim_{n\to\infty}S_n(f,Z).$$

Это число и называется тройным интегралом от f по Z:

$$\iiint_Z f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\lim_{n\to\infty}S_n(f,Z).$$

Распространим сделанное определение на объединение нескольких областей вида (1). Пусть задано конечное семейство областей $\{W_k\}_{k=1}^n$ вида (1), не имеющих общих внутренних точек: $\widehat{W}_k\cap\widehat{W}_m=\emptyset$, если $k\neq m$. Будем обозначать, для краткости, совокупность множеств $W\subset\mathbb{R}^3$, допускающих разложение $W=\cup_{k=1}^n W_k$ рассмотренного вида, символом $\mathcal{T}_3$. Кроме того, внутренними точками $\widehat{W}$ множества W, по определению, будем называть те $(x,y,z)\in W$, которые попадают в $\cup_{k=1}^n\widehat{W}_k$ хотя бы для одного разложения $W=\cup_{k=1}^n W_k$, где каждое W_k вида (1). Пусть $f\in C(W)$. По определению

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{k=1}^n\iiint_{W_k} f_k(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Также как и для двойных интегралов определение (3) не зависит от способа разделения $W\in\mathcal{T}_3$ на части вида (1). Основные свойства двойного интеграла с естественными изменениями переносятся на тройной интеграл.

Теорема 2 (аддитивность интеграла). $/W_1,W_2\in\mathcal{T}_3$, $\widehat{W}_1\cap\widehat{W}_2=\emptyset$, $f\in C(W_1\cup W_2)/\Rightarrow$

$$\iiint_{W_1\cup W_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{W_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz+\iiint_{W_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Как и для случая двойного интеграла доказательство теоремы 2 является следствием (3).

Выберем f тождественно равной единице всюду на $W\in\mathcal{T}_3$. Это непрерывная на W функция. Интеграл от такой f по W называется объемом W. Будем обозначать эту величину $V(W)$:

$$V(W)=\iiint_W dx\,dy\,dz.$$

Доказательства основных свойств интеграла без изменений переносится с двойных интегралов на тройные интегралы.

Теорема 3 (линейность интеграла). $/W\in\mathcal{T}_3$, $f_1,f_2\in C(W)$ и $a,b\in\mathbb{R}/\Rightarrow$

$$\iiint_W (af_1+bf_2)\,dx\,dy\,dz=a\iiint_W f_1\,dx\,dy\,dz+b\iiint_W f_2\,dx\,dy\,dz.$$

Теорема 4 (монотонность интеграла). $/W\in\mathcal{T}_3$, $f_1,f_2\in C(W)$ и $f_1(x,y,z)\leqslant f_2(x,y,z)$ для всех $(x,y,z)\in W/\Rightarrow$

$$\iiint_W f_1(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\leqslant\iiint_W f_2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Следствия.

$$\left|\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant \iiint_W |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz,$$

$$V(W)\cdot m \leqslant \iint_W f\,dx\,dy\,dz \leqslant V(W)\cdot M,$$

выполняющиеся если $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ при всех $(x,y,z) \in W$.

Также как и двойные интегралы, тройные интегралы можно вычислять последовательно. Основой этому служит Теорема 5 (без доказательства). $/T \in \mathcal{T}_2$, $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot) \in C(T)$, $W = Z(\varphi_1,\varphi_2)$, $f \in C(W)/ \Rightarrow$

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_T \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)\,dx\,dy.$$

Еще раз рассмотрим вопрос о замене переменной при вычислении интеграла. Какой бы интеграл мы не изучали, – определенный, двойной, тройной или большего числа переменных, всякий раз получается, по существу, одна и та же формула, условно записываемая в виде

$$\int_T f\,dt = \int_S g\cdot|J|\,ds.$$

Обсудим ее еще раз для тройного интеграла. Пусть задана однозначная замена переменных, связывающая точки (x,y,z) с точками (r,s,t):

$$x \leftrightarrow u(r,s,t), \quad y \leftrightarrow v(r,s,t), \quad z \leftrightarrow w(r,s,t). \tag{4}$$

Считаем, что она переводит множество $S \in \mathcal{T}_3$ пространства $(Orst)$ во множество $T \in \mathcal{T}_3$ пространства $(Oxyz)$ и при этом

1) для каждого $(r,s,t) \in S$ точка с координатами $x = u(r,s,t)$, $y = v(r,s,t)$, $z = w(r,s,t)$ принадлежит T,

2) для каждого $(x,y,z) \in T$ найдется тройка $(r,s,t) \in S$ такая, что $x = u(r,s,t)$, $y = v(r,s,t)$, $z = w(r,s,t)$,

3) разным $(r,s,t) \in S$ соответствуют разные $(x,y,z) \in T$.

Пусть преобразование (4) и его частные производные по переменным r, s и t непрерывны на некотором, содержащем S множестве из $(Orst)$; пусть якобиан $J = J(r,s,t)$,

$$J(r,s,t) = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{vmatrix},$$

сохраняет постоянный знак в S (модуль этого определителя представляет объем параллелепипеда, построенного на векторах из частных производных – смешанного произведения этих векторов). Как и для случая двух переменных выполняется равенство

$$dx\,dy\,dz = |J|\,dr\,ds\,dt,$$

означающее, что отображение (4) искажает куб с ребром $1/n$ с вершиной в точке (r,s,t) так, что объем искаженного куба изменяется приблизительно в $|J(r,s,t)|$ раз по сравнению с исходным. При этом относительная погрешность такой замены стремится к нулю с ростом n. В сделанных предположениях справедлива формула замены переменных:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S g(r,s,t)|J|\,dr\,ds\,dt,$$

$g(r,s,t) = f(u(r,s,t), v(r,s,t), w(r,s,t))$.

Рассмотрим примеры. В цилиндрической системе координат каждой точке $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ сопоставим ее цилиндрические координаты (r,ϕ,h), $r > 0$, $\phi \in [0,2\pi)$, $h \in \mathbb{R}$:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = h.$$

Вычислим якобиан этого отображения:

$$J = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r.$$

Формула замены переменных будет выглядеть так:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S g(r,\phi,h)r\,dr\,d\phi\,dh,$$

$g(r,\phi,h) = f(r\cos\phi, r\sin\phi, h)$, T – образ множества S при рассматриваемой замене переменной.

В сферической системе координат каждой точке $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ сопоставим ее сферические координаты (r,ϕ,ψ), $r>0$, $\phi\in[0,2\pi)$, $\psi\in[-\pi/2,\pi/2)$:

$$x=r\cos\phi\cos\psi,\quad y=r\sin\phi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi.$$

Вычислим якобиан этого отображения:

$$J=r^2\cos^3\psi+r^2\cos\psi\sin^2\psi=r^2\cos\psi.$$

Формула замены переменных будет выглядеть так:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_S g(r,\phi,h)r^2\cos\psi\,dr\,d\phi\,dh,$$

$g(r,\phi,h)=f(r\cos\phi\cos\psi,r\sin\phi\cos\psi,r\sin\psi)$, T – образ множества S при рассматриваемой замене переменной.

Лекция 10.

Криволинейные интегралы первого рода и второго рода, их свойства и вычисление. Скалярное и векторное поле. Циркуляция векторного поля вдоль кривой. Формула Грина.

Рассмотрение понятия криволинейного интеграла первого рода обычно начинают с указания того по какому множеству этот интеграл вычисляется. В качестве таких множеств выступают кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$. Простейшим примером кривой на плоскости является образ γ отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$, задаваемый парой отображений $x,y\in C[a,b]$ по правилу:

$$\gamma=\{(x(t),y(t))\mid t\in[a,b]\},\tag{1}$$

так что разным значениям параметра $t\in(a,b)$ соответствуют разные точки $(x(t),y(t))$, составляющие кривую γ. Кроме непрерывности функций $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ потребуем дополнительно, чтобы $x(\cdot)$, $y(\cdot)\in C^1(a,b)$. Если концы $A=(x(a),y(a))$ и $B=(x(b),y(b))$ кривой γ совпадают: $A=B$, то такую кривую будем называть замкнутой. Пусть $f(\cdot)\in C(\gamma)$ – непрерывное отображение, принимающее действительные значения на множестве γ. Последнее условие, в частности, означает, что в функцию двух переменных $f(x,y)$ в качестве аргументов (x,y) можно подставить точки из кривой γ и образовать сложную функцию $f(x(t),y(t))$ переменной $t\in[a,b]$. По теореме о непрерывности сложной функции такая функция будет непрерывной как функция переменной $t\in[a,b]$. Криволинейные интегралы от функции f по кривой γ определяют при дополнительном предположении о невырожденности:

$$x'^2(t)+y'^2(t)>0,\quad t\in(a,b);$$

криволинейным интегралом первого рода называют (вообще говоря несобственный интеграл)

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds=\int_{[a,b]}f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,\tag{2}$$

где символом $\int_{[a,b]}$ обозначено интегрирование по $[a,b]$ от меньшего значения аргумента к большему. Пусть $g(\cdot)\in C(\gamma)$ – еще одна непрерывная действительнозначная функция на γ. Выражение

$$\int_{AB}f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy=\int_a^b(f(x(t),y(t))x'(t)+g(x(t),y(t))y'(t))\,dt\tag{2'}$$

называют криволинейным интегралом второго рода (интеграл в правой части также может быть несобственным). Пределы интегрирования в $(2')$ расставляют таким образом, чтобы точке A соответствовало значение параметра $t=a$, а точке B – значение $t=b$.

Важным свойством определения (2) является, как говорят, независимость правой части (2) от выбора параметризации (1). Смысл этой фразы состоит в следующем: пусть $t=u(v)$ – преобразование отрезка $[c,d]$ в отрезок $[a,b]$, $u(\cdot)\in C^1[c,d]$:

$$u'(v)\neq0,\quad v\in[c,d],\ u(c)=a,\ u(d)=b.$$

Это, в частности, означает, что $u(\cdot)$ – строго монотонная на $[c,d]$ функция. Образуем сложную функцию $p(v)=x(u(v))$ и вычислим ее производную в точке $v\in(c,d)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\big(p(v)\big)}{dv}=\frac{d\big(x(u(v))\big)}{dv}=\left.\frac{d\big(x(t)\big)}{dt}\right|_{t=u(v)}\cdot\frac{d\big(u(v)\big)}{dv}.$$

Аналогичная формула справедлива и для функции $q(v) = y(u(v))$. Таким образом,

$$\sqrt{\left(\frac{d\big(x(t)\big)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\big(y(t)\big)}{dt}\right)^2}\,\Bigg|_{t=u(v)} = \sqrt{\left(\frac{d\big(p(v)\big)}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\big(q(v)\big)}{dv}\right)^2} \cdot \left|\frac{d\big(u(v)\big)}{dv}\right|^{-1}.$$

Если c и d расположены друг относительно друга также как и a относительно b (например, $c < d$ и одновременно $a < b$), то, в силу монотонности $u(\cdot)$,

$$\frac{d\big(u(v)\big)}{dv} > 0, \quad u \in [c, d].$$

Если же расположение этих пар противоположно (например, $c > d$ и $a < b$), то эта производная всюду меньше нуля. Поэтому, обозначая символом $\int_{[c,d]}$ интегрирование по $[c, d]$ от меньшего значения аргумента к большему и делая замену переменной в правой части (2), получим (предполагаем, к примеру, $a < b$):

$$\int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_c^d f(x(u(v)), y(u(v)))\sqrt{\left(\frac{d\big(p(v)\big)}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\big(q(v)\big)}{dv}\right)^2} \cdot \left|\frac{d\big(u(v)\big)}{dv}\right|^{-1} \cdot \frac{d\big(u(v)\big)}{dv}\, dv =$$

$$= \int_{[c,d]} f(x(u(v)), y(u(v)))\sqrt{\left(\frac{d\big(g(v)\big)}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\big(h(v)\big)}{dv}\right)^2}\, dv.$$

Точно также разбирается случай $a > b$. Таким образом,

$$\int_{[a,b]} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_{[c,d]} f(p(v), q(v))\sqrt{g'^2(v) + h'^2(v)}\, dv, \quad (3)$$

и, как бы мы ни задавали кривую γ, – в виде (1) или как

$$\gamma = \{(p(v), q(v)) \mid v \in [c, d]\},$$

правая часть (2) не меняет своего значения (3). В этом и состоит независимость интеграла первого рода от выбора параметризации и способ его записи

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds.$$

Для криволинейного интеграла второго рода, согласно определению, важное значение имеет порядок прохождения вершин A и B:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)\, dt = \int_c^d f(x(u(v)), y(u(v)))\frac{d\big(g(v)\big)}{dv}\left(\frac{d\big(u(v)\big)}{dv}\right)^{-1}\frac{d\big(u(v)\big)}{dv}\, dv =$$

$$= \int_c^d f(p(v), q(v))g'(v)\, dv$$

и, в тоже время,

$$\int_{BA} f(x, y)\, dx = \int_b^a f(x(t), y(t))x'(t)\, dt = \int_d^c f(p(v), q(v))g'(v)\, dv = -\int_{AB} f(x, y)\, dx.$$

Точно также

$$\int_{AB} g(x, y)\, dy = -\int_{BA} g(x, y)\, dy$$

и, значит,

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = -\int_{BA} f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy.$$

Также как и интегралы первого рода, интегралы второго рода не меняют своего значения при перепараметризациях, сохраняющих порядок прохождения вершин A и B.

Пусть теперь кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ состоит из нескольких частей рассмотренного вида:

$$\gamma = \cup_{i=1}^n \gamma_i, \quad \gamma_i = \{(x_i(t), y_i(t)) \mid t \in [a_i, b_i]\}, \tag{4}$$

причем $x_i(\cdot),\ y_i(\cdot) \in C[a_i, b_i] \cap C^1(a_i, b_i)$ и при всех i

$$x'^2_i(t) + y'^2_i(t) > 0, \quad t \in (a_i, b_i),$$

пусть как и прежде разным значениям параметра $t_1 \in (a_i, b_i)$, $t_2 \in (a_k, b_k)$ соответствуют разные точки $(x_i(t_1), y_i(t_1))$, $(x_k(t_2), y_k(t_2))$ кривой γ. Совокупность таких кривых будем обозначать знаком $\mathcal{A}_2$. Обозначим $A_i = (x_i(a_i), y_i(a_i))$, $B_i = (x_i(b_i), y_i(b_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Эти точки будем называть узлами кривой γ. Если $f(\cdot),\ g(\cdot) \in C(\gamma)$ – два действительнозначных непрерывных отображения, то по определению

$$\int_\gamma f\, ds = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f\, ds, \tag{5}$$

$$\int_\gamma f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = \sum_{i=1}^n \int_{A_i, B_i} f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy. \tag{5$'$}$$

Кривую (4) будем называть замкнутой, если $B_1 = A_2,\ B_2 = A_3,\ \ldots\ B_{n-1} = A_n$ и $B_n = A_1$.

Рассматривают также криволинейные интегралы для заданных параметрически пространственных кривых

$$\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a,b]\}, \quad A = (x(a), y(a), z(a)), \quad B = (x(b), y(b), z(b)).$$

Условие невырожденности для таких кривых записывают так:

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0, \quad t \in (a,b).$$

Как и прежде считаем, что разным значениям параметра $t \in (a,b)$ соответствуют разные точки $(x(t), y(t), z(t))$, составляющие кривую γ. Определения (2), (2$'$) приобретают вид

$$\int_\gamma f(x,y,z)\, ds = \int_{[a,b]} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, dx + g(x,y,z)\, dy + h(x,y,z)\, dz = \int_a^b (f(t)x'(t) + g(t)y'(t) + h(t)z'(t))\, dt,$$

где $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ и т.д. Определения (5), (5$'$) переносится без изменений (класс кривых, являющихся аналогом $\mathcal{A}_2$, будем обозначать $\mathcal{A}_3$). Также как и для случая двух переменных, интеграл первого рода по пространственным кривым не зависит от выбора параметризации, а интеграл второго рода зависит от ориентации пространственной кривой (т.е. от выбора начальной и конечной точки этой кривой):

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, dx + g(x,y,z)\, dy + h(x,y,z)\, dz = -\int_{BA} f(x,y,z)\, dx + g(x,y,z)\, dy + h(x,y,z)\, dz.$$

Для сокращения записей все дальнейшие рассмотрения будут делаться для плоских кривых, но они имеют естественные аналоги для интегралов по пространственным кривым.

1. Пусть кривая γ задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y(\cdot) \in C^1[a,b]$. Это означает, что $\gamma = \{(t, y(t)) \mid t \in [a,b]\}$. В этом случае (2), (2$'$) превращаются в

$$\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(t, y(t)) \sqrt{1 + y'^2(t)}\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = \int_a^b (f(t, y(t)) + g(t, y(t)) y'(t))\, dt.$$

2. Свойства криволинейных интегралов:

а) аддитивность (по области интегрирования): пусть кривые $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathcal{A}_2$ или не имеют общих точек, или общие точки этих кривых попадают на их узлы. Тогда $\gamma_1 \cup \gamma_2 \in \mathcal{A}_2$ и

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds, \quad f \in C(\gamma_1 \cup \gamma_2),$$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,dx+g\,dy=\int_{\gamma_1} f\,dx+g\,dy+\int_{\gamma_2} f\,dx+g\,dy,\quad f,g\in C(\gamma_1\cup\gamma_2),$$

б) линейность (по интегрируемым функциям): если $\gamma\in\mathcal{A}_2,\;\; f_1,f_2,g_1,g_2\in C(\gamma)$, $a,b\in\mathbb{R}$, то

$$\int_\gamma (af_1+bf_2)\,ds=a\int_\gamma f_1\,ds+b\int_\gamma f_2\,ds,$$

$$\int_\gamma (af_1+bf_2)\,dx+(ag_1+bg_2)\,dy=a\int_\gamma f_1\,dx+g_1\,dy+b\int_\gamma f_2\,dx+g_2\,dy,$$

в) положительность (по интегрируемым функциям): пусть $\gamma\in\mathcal{A}_2,\;\; f_1,f_2\in C(\gamma)$. Тогда

$$\int_\gamma f_1\,ds\leqslant\int_\gamma f_2\,ds,$$

если $f_1(w)\leqslant f_2(w)$ при каждом $w\in\gamma$. Для интегралов второго рода аналогичное свойство, вообще говоря, не выполняется.

Доказательство этих свойств проводится на основе определений (2), (2′), (5), (5′) и известных свойств определенного интеграла. Проверим, к примеру, положительность интеграла, остальные свойства устанавливаются по аналогии. Пусть сначала γ – кривая вида (1). Тогда по (2) и свойствам определенного интеграла

$$\int_\gamma f_1\,ds=\int_{[a,b]} f_1(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\leqslant\int_{[a,b]} f_2(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\int_\gamma f_2\,ds$$

– неравенство справедливо. Если же кривая γ состоит из нескольких участков рассмотренного вида ($\gamma=\cup_{i=1}^n\gamma_i$), то по (5) и только что установленному неравенству

$$\int_\gamma f_1\,ds=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i} f_1\,ds\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i} f_2\,ds=\int_\gamma f_2\,ds.$$

г) Если $f(\cdot)$ – функция тождественно равная 1 (т.е. равная 1 при всех значениях аргумента), то

$$l(\gamma)=\int_\gamma f\,ds=\int_\gamma ds$$

называют длиной кривой γ.
д) (следствие в)) Пусть $m\leqslant f(w)\leqslant M$ для каждой точки $w\in\gamma$. Тогда

$$m\cdot l(\gamma)\leqslant\int_\gamma f\,ds\leqslant M\cdot l(\gamma),\quad |\int_\gamma f\,ds|\leqslant\int_\gamma |f|\,ds.$$

При рассмотрении задач, связанных с интегрированием функций нескольких переменных, сложилась определенная терминология. Дадим некоторые определения. Пусть $T\in\mathcal{T}_2$ (или $T\in\mathcal{T}_3$), $M=(x,y)\in T$ – точка области T (или $M=(x,y,z)$). Тогда всякую функцию $f(\cdot):T\to\mathbb{R}$ называют еще скалярным полем, заданным на области T. Значения этого поля в точках $M\in T$ записывают как $f(M)$. Если $T\in\mathcal{T}_2$, $f(\cdot)$, $g(\cdot):T\to\mathbb{R}$, пару $a(\cdot)=(f(\cdot),g(\cdot))$ называют векторным полем, заданным на области T. Если $T\in\mathcal{T}_3$, векторным полем $a(\cdot)$, заданным на T, называют тройку скалярных полей на T: $a(\cdot)=(f(\cdot),g(\cdot),h(\cdot))$. Значения этих полей в точках $M\in T$ записывают как $a(M)$. Будем записывать $f(\cdot)\in C^1(T)$, если скалярное поле $f(\cdot)$ и его частные производные определены и непрерывны в каждой точке $M\in T$. Будем записывать $a(\cdot)\in C^1(T)$, если координаты этого векторного поля $a=(a_x,a_y)$ (или $a=(a_x,a_y,a_z)$ в трехмерном случае) принадлежат классу $C^1(T)$. Пусть $f(\cdot)\in C^1(T)$ – скалярное поле. Градиентом $f(\cdot)$ называют векторное поле $\operatorname{grad} f$, компоненты которого – частные производные $f(\cdot)$:

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\quad(\text{или }\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)).$$

Пусть теперь γ – плоская или пространственная замкнутая кривая вида (4), $a(\cdot)\in C(\gamma)$ – непрерывное векторное поле на γ. Интеграл (для плоской кривой $a_z(M)=0$)

$$\int_\gamma a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz$$

называется циркуляцией векторного поля $a(\cdot)$ по кривой γ. Он также коротко обозначается

$$\int_\gamma a\cdot dr,$$

где $dr = (dx, dy, dz)$, $a \cdot dr$ – скалярное произведение векторов (в плоском случае – все вектора двумерные). Отметим еще связь между рассмотренными криволинейными интегралами. Пусть

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

– параметрическое представление кривой γ на плоскости $(x, y \in C^1(a, b))$. Вектор $(x'(t), y'(t))$, $t \in (a, b)$, естественно назвать направлением касательной прямой, проведенной в точке $(x(t), y(t))$, к параметрически заданной кривой γ (пояснение: вектор $(x'(t), y'(t))$ отложен от начала координат. С его помощью касательная к γ в точке $t \in (a, b)$ задается параметрически:

$$X(s) = x(t) + s \cdot x'(t), \quad Y(s) = y(t) + s \cdot y'(t), \quad s \in \mathbb{R}.)$$

При различных перепараметризациях направляющие вектора, относящиеся к одной и той же точке кривой γ, могут измениться по длине или изменить направление на противоположное. Другими словами такие направляющие вектора всегда лежат на одной прямой (параллельной касательной и проходящей через начало координат), причем, в силу наших исходных предположений о параметризации кривой γ, ни один из касательных векторов не равен нулевому вектору. Координаты нормированного вектора

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\right) = (\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos\alpha, \cos\beta), \quad \alpha = \alpha(t),$$

$\beta = \pi/2 - \alpha$, называют направляющими косинусами касательной. Все эти определения естественным образом переносятся на общие кривые $\gamma \in \mathcal{A}_2$, а также на пространственные кривые $\gamma \in \mathcal{A}_3$. Так координаты вектора

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}, \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\delta)$$

называют направляющими косинусами касательной к пространственной кривой

$$\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\},$$

вычисленными в точке $t \in (a, b)$. В рассмотренных терминах определение криволинейного интеграла второго рода по пространственной кривой AB может быть сделано следующим образом. Пусть $a = (f, g, h)$ – непрерывное векторное поле вдоль кривой AB, $dr = (dx, dy, dz)$, пусть $\tau = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\delta)$ – направляющие косинусы касательной к этой кривой. Тогда

$$\int_{AB} a \cdot dr = \int_{AB} a \cdot \tau \, ds,$$

где $a \cdot \tau = f\cos\alpha + g\cos\beta + h\cos\delta$ – скалярное произведение векторов.

Дальнейшие построения относятся к аналогу формулы Ньютона-Лейбница для двойного интеграла. Пусть $T \in \mathcal{T}_2$ имеет вид $T = Y(\varphi, \psi)$ с гладкими функциями $\varphi, \psi \in C^1(a, b)$, удовлетворяющими неравенствам

$$\varphi(t) < \psi(t), \quad t \in (a, b), \quad a < b.$$

Границей ∂T множества T, будем называть замкнутую кривую, окаймляющую T и состоящую из не более, чем четырех участков. Эти участки задаются параметрически по правилам:

1. γ_1 определяется набором $x_1(t) = t$, $y_1(t) = \varphi(t)$, $\quad t \in [a, b]$,
2. если $\varphi(b) = \psi(b)$, то считаем, что γ_2 отсутствует, если же $\varphi(b) < \psi(b)$, то γ_2 определяется набором $x_2(t) = b$, $y_2(t) = t$, $\quad t \in [\varphi(b), \psi(b)]$,
3. чтобы обеспечить поступательное движение по формируемому контуру, участок γ_3 параметризуют следующим набором: $x_3(t) = t$, $y_3(t) = \psi(t)$, $\quad t \in [b, a]$,
4. если $\varphi(a) = \psi(a)$, то считаем, что γ_4 отсутствует, если же $\varphi(a) < \psi(a)$, то γ_4 определяется набором $x_4(t) = a$, $y_4(t) = t$, $\quad t \in [\psi(a), \varphi(a)]$.

Таким образом, сформировались узлы контура ∂T и порядок их прохождения: $B_1 = A_2 = (b, \varphi(b))$, $B_2 = A_3 = (b, \psi(b))$, $B_3 = A_4 = (a, \psi(a))$, $B_4 = A_1 = (a, \varphi(a))$. Если один или оба из участков γ_2, γ_4 отсутствует, то некоторые из этих узлов сливаются в один.

Выбранный порядок обхода контура $\partial T^+ = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_1\}$ называют еще обходом в положительном направлении или обходом против часовой стрелки. Он характеризуется тем, что при указанном движении вдоль ∂T, область T остается слева от "обходчика". Кривую ∂T^+, при этом, называют положительно ориентированной, эту же кривую, но проходимую в обратном направлении обозначают ∂T^- и называют отрицательно ориентированной.

Отметим здесь еще невырожденность выбранной параметризации контура ∂T^+:
1. в случае γ_1 выполняется $(t')^2+(\varphi'(t))^2 = 1+(\varphi'(t))^2 > 0$,
2. если γ_2 присутствует, то $(b')^2+(t')^2 = 0+1 > 0$ и т.д.

Пусть теперь $g \in C(T)$ обладает непрерывной частной производной по переменной y в области T: $\frac{\partial g}{\partial y} \in C(T)$. Преобразуем выражение

$$\iint_T \frac{\partial g}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\right)dx = \int_a^b \big(g(x,\psi(x)) - g(x,\varphi(x))\big)\,dx = \int_a^b g(t,\psi(t))t'\,dt-$$

$$-\int_a^b g(t,\varphi(t))t'\,dt = \int_{B_3A_3} g(x,y)\,dx - \int_{A_1B_1} g(x,y)\,dx = -\int_{A_4B_4} g(x,y)\,dx-$$

$$-\int_{A_3B_3} g(x,y)\,dx - \int_{A_2B_2} g(x,y)\,dx - \int_{A_1B_1} g(x,y)\,dx = -\int_{\partial T^+} g(x,y)\,dx.$$

По ходу преобразований мы воспользовались равенствами

$$\int_{A_4B_4} g(x,y)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} g(a,t)a'\,dt = 0, \quad \int_{A_2B_2} g(x,y)\,dx = 0,$$

– в случае, когда одного или обоих из этих участков γ^+ нет, то соответствующие им слагаемые, по определению, считаем равными нулю. Таким образом, окончательная формула имеет вид

$$\iint_T \frac{\partial g}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial T^+} g(x,y)\,dx. \tag{6}$$

Пусть теперь $T \in \mathcal{T}_2$ имеет более сложную структуру:

$$T = \bigcup_{i=1}^n T_i, \quad \widehat{T}_i \cap \widehat{T}_j = \emptyset, i \neq j,$$

и каждое из T_i имеет вид $Y(\varphi_i,\psi_i)$ с гладкими функциями $\varphi_i, \psi_i \in C^1(a_i,b_i)$ своими для каждого i и удовлетворяющими неравенствам

$$\varphi_i(t) < \psi_i(t), \quad t \in (a_i,b_i), \quad a_i < b_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Сформулируем еще одно ограничение на структуру T. Для этого образуем множество ∂T и будем называть его границей T по следующему правилу: пусть ∂T_i^+ – границы множеств T_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, ориентированные против часовой стрелки. Тогда $(x,y) \in \partial T$, если $(x,y) \in \partial T_i$ в точности для одного из $i \in \{1,\ldots,n\}$. (Читающему рекомендуется сделать несколько рисунков возможного строения T и ∂T для $n=2$ и $n=3$.) Ограничение состоит в том, что множество ∂T, которое вообще говоря может быть устроено достаточно сложно, подразделяется на конечное число непересекающихся отрезков, полуотрезков, интервалов и кривых вида $\{(t,\varphi(t)) \mid t \in (a,b)\}$. Все перечисленные элементы, конечно, при этом являются частями той или иной ∂T_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, их ориентация и параметризация однозначно задаются выбором ориентации и параметризации соответствующего ∂T_i. Добавим к ∂T граничные точки всех этих полуотрезков, интервалов, точки вида $(a,\varphi(a))$, $(b,\varphi(b))$ и, несмотря на то, что мы немного изменили множество ∂T, сохраним за измененным название и обозначение. Можно показать, что $\partial T \in \mathcal{A}_2$ и что полученная кривая не зависит от исходного способа разделения T на части. Так как

$$\partial T \subset \bigcup_{i=1}^n \partial T_i,$$

то параметризация и порядок прохождения частей ∂T полностью определяется параметризациями и порядками прохождения границ ∂T_i. Полученную ориентированную кривую будем обозначать ∂T^+. Она также обладает тем свойством, что при движении вдоль ∂T в выбранном направлении область T остается слева от "обходчика". Как и прежде такой обход границы области будем называть обходом в положительном направлении или обходом против часовой стрелки. Противоположный обход называют обходом в отрицательном направлении. Оказывается, для рассмотренного множества T и функций g, $\frac{\partial g}{\partial y} \in C(T)$ формула (6) остается справедливой. (Здесь вновь рекомендуется сделать несколько рисунков возможного строения T и ∂T для $n=2$ и $n=3$.) По сути дела именно эту формулу в сделанных предположениях относительно T и g можно называть формулой Грина. Однако ее принято записывать в несколько более симметричном виде. А именно, пусть множество T, помимо рассмотренного, допускает конечное разложение вида

$$T = \bigcup_j S_j, \quad \widehat{S}_j \cap \widehat{S}_i = \emptyset, j \neq i,$$

и каждое из S_j имеет вид $X(\varphi_j, \psi_j)$ со всеми последующими ограничениями и определениями, делающимися как и выше для множеств $Y(\varphi_j, \psi_j)$. Тогда еще одно построение ∂T совпадет с уже имеющимся и совпадут положительные ориентации этих границ. (Замечание: параметризации контура ∂T при этом окажутся различными, но, как уже было отмечено, интеграл второго рода, участвующий в (6), нечувствителен к перепараметризациям, сохраняющим ориентацию кривых.)

Формулой Грина для функций $f, g \in C(T)$, у которых существуют $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y} \in C(T)$, принято называть равенство

$$\iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\, dx\, dy = \int_{\partial T^+} g(x,y)\, dx + f(x,y)\, dy. \tag{7}$$

Различие в знаках частей этой формулы связано с различием в прохождении границы ∂T^+: для той части формулы, в которой участвует функция g, движению в положительном направлении соответствует движение по "нижней" (относительно направления Oy) части ∂T^+, приводящее к увеличению координаты x. А для той части, в которой участвует функция f, движению в положительном направлении соответствует движение по "нижней" (относительно направления Ox) части ∂T^+, приводящее к уменьшению координаты y. Для запоминания формулы (7) можно использовать мнемоническое правило

$$\iint_T \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y}\, dy \wedge dx = \int_{\partial T^+} g(x,y)\, dx + f(x,y)\, dy,$$

где $dx \wedge dy$, $dy \wedge dx$ – элементы ориентированного объема (площади): $dx \wedge dy = -dy \wedge dx = dx\, dy$. Сформулируем еще раз теорему о сведении двойного интеграла к криволинейному. При этом будем считать интуитивно понятным термин ∂T^+ - граница множества T, проходимая в положительном направлении (т.е. так, что при движении в указанном направлении множество T остается слева). Будем считать, что T может быть разделено на конечное число множеств вида $Y(\varphi, \psi)$, не имеющих общих внутренних точек и, кроме того, может быть разделено на конечное число множеств вида $X(\varphi, \psi)$, также не имеющих общих внутренних точек (всюду при таких делениях φ, ψ – непрерывно дифференцируемые функции).

Теорема (формула Грина): $/T \in \mathcal{T}_2,\ \ f, g \in C^1(T),\ \ \partial T^+ \in \mathcal{A}_2/ \Rightarrow$

$$\iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\, dx\, dy = \int_{\partial T^+} g(x,y)\, dx + f(x,y)\, dy.$$

Лекция 11.

Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства, геометрический и физический смысл. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Возможность сведения двойного интеграла к криволинейному имеет аналог и для тройного интеграла. Для получения соответствующих формул требуется дать определения интегралов по поверхностям. Как и прежде начнем с задания области интегрирования. Простейший способ определить поверхность в $\mathbb{R}^3$ состоит в ее параметрическом задании. Параметрической поверхностью в $\mathbb{R}^3$ называют множество точек

$$? = \{r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in T\}, \tag{1}$$

где $T \in \mathcal{T}_2$, $x, y, z \in C^1(\widehat{T})$ – непрерывные на $T \subset \mathbb{R}^2$ функции. Будем предполагать, что разным значениям параметров $(u,v) \in \widehat{T}$ соответствуют разные точки $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ поверхности ?. Точку $(x,y,z) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ назовем граничной точкой ?, если (u,v) – граничная точка T. Остальные точки ? назовем внутренними. Пусть $f(\cdot) \in C(?)$ – непрерывное отображение, принимающее действительные значения на ?. Последнее условие, в частности, означает, что в функцию трех переменных $f(x,y,z)$ в качестве аргументов (x,y,z) можно подставить точки поверхности ? и образовать сложную функцию $f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ переменных $(u,v) \in T$. По теореме о непрерывности сложной функции такая функция будет непрерывной на T. По аналогии с криволинейными интегралами поверхностные интегралы от функции f по ? определяют при дополнительном предположении о невырожденности поверхности. Параметрическое представление кривой называлось невырожденным, если касательный вектор не превращался в нулевой вектор во внутренних точках кривой. Точно также и для поверхностей вида (1). Не вдаваясь в детали, всякую такую поверхность можно воспринимать, как объединение по v_0 "кривых"

$$\gamma(v_0) = \{\big(x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v_0) \in T\}.$$

Каждая из них в своих внутренних точках обладает касательным вектором, составленным из частных производных

$$\left(\frac{\partial x(u,v_0)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v_0)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v_0)}{\partial u}\right).$$

Этот вектор в точке $(u_0,v_0)\in\widehat{T}$ будем обозначать $r_u(u_0,v_0)=\big(x_u(u_0,v_0),y_u(u_0,v_0),z_u(u_0,v_0)\big)$. Точно также поверхность (1) можно воспринимать, как объединение по u_0 "кривых"

$$\gamma(u_0)=\{\big(x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v)\big)\in\mathbb{R}^3\mid(u_0,v)\in T\}.$$

Каждая из них в своих внутренних точках обладает касательным вектором, составленным из частных производных

$$\left(\frac{\partial x(u_0,v)}{\partial v},\frac{\partial y(u_0,v)}{\partial v},\frac{\partial z(u_0,v)}{\partial v}\right).$$

Этот вектор в точке $(u_0,v_0)\in\widehat{T}$ будем обозначать $r_v(u_0,v_0)=\big(x_v(u_0,v_0),y_v(u_0,v_0),z_v(u_0,v_0)\big)$. Будем говорить, что параметрическое представление поверхности (1) невырождено, если вектора $r_u(u_0,v_0)$ и $r_v(u_0,v_0)$ в каждой внутренней точке $(u_0,v_0)\in\widehat{T}$ линейно независимы. В терминах векторного произведения это условие может быть записано как $[r_u,r_v]\neq 0$ (не указывая явно аргумент (u_0,v_0),

$$[r_u,r_v]=\det\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}=(A,B,C),\quad A=\det\begin{vmatrix} y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix},\quad B=-\det\begin{vmatrix} x_u & z_u\\ x_v & z_v\end{vmatrix},\quad C=\det\begin{vmatrix} x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}$$

– известное представление для произведения векторов r_u и r_v). Поскольку мы предполагаем линейную независимость векторов $r_u(u_0,v_0)$ и $r_v(u_0,v_0)$, то эти вектора определяют плоскость (называемую касательной плоскостью к поверхности (1) в точке $r(u_0,v_0)$), параметрическое представление которой имеет вид ($x=x(u_0,v_0)$, $x_u=x_u(u_0,v_0)$ и т.д.):

$$X(s,t)=x+s\cdot x_u+t\cdot x_v,\quad Y(s,t)=y+s\cdot y_u+t\cdot y_v,\quad Z(s,t)=z+s\cdot z_u+t\cdot z_v,\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

В векторном виде это представление можно записать как

$$R(s,t)=r(u_0,v_0)+s\cdot r_u(u_0,v_0)+t\cdot r_v(u_0,v_0),\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, касательная плоскость к поверхности ? в точке $r(u_0,v_0)$ – это такая плоскость, которая перпендикулярна вектору $[r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0)]$ и проходит через точку $r(u_0,v_0)$. При этом векторное произведение $[r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0)]$ носит название нормали к поверхности ? в точке $r(u_0,v_0)$.

Поверхностным интегралом первого рода для функции f называют

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,dS=\int_T f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,du\,dv. \tag{2}$$

Часто этот интеграл записывают также в виде

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,dS=\int_T f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)}\,du\,dv, \tag{2$'$}$$

где $E=r_u\cdot r_u$, $G=r_v\cdot r_v$, $F=r_u\cdot r_v$ – скалярные произведения векторов. Формула (2$'$) получается из формулы (2) сравнением подкоренных выражений.

Как и для криволинейных интегралов, определение (2) не зависит от выбора параметризации поверхности (1). Также не зависит от параметризации определение касательной плоскости и, как следствие, направление прямых, перпендикулярных этой плоскости.

В случае когда $f(x,y,z)=1$ для всех $(x,y,z)\in ?$, поверхностный интеграл первого рода от f называют площадью поверхности ?:

$$S(?)=\int_\Gamma dS=\int_T\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv=\int_T\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\int_T\big|[r_u,r_v]\big|\,du\,dv. \tag{3}$$

Распространение определения (2) на более сложные множества производится по аналогии с криволинейными интегралами. Если имеется конечное число параметрически заданных поверхностей рассмотренного вида, причем каждая пара из этих поверхностей не имеет общих внутренних точек, то поверхностный интеграл первого рода по объединению таких поверхностей определяется как сумма

$$\int_{\cup_{i=1}^n\Gamma_i} f(x,y,z)\,dS=\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i} f(x,y,z)\,dS,\qquad f\in C(\cup_{i=1}^n ?_i). \tag{2$''$}$$

Чтобы сократить обозначения, в дальнейшем класс поверхностей, для которых возможно такое разделение на части, будем обозначать $\mathcal{B}_3$.

Свойства поверхностных интегралов первого рода совпадают со свойствами криволинейных интегралов первого рода:
а) аддитивность (по области интегрирования): пусть поверхности $?_1, ?_2 \in \mathcal{B}_3$ не имеют общих "внутренних" точек. Тогда

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f\, dS = \int_{\Gamma_1} f\, dS + \int_{\Gamma_2} f\, dS, \quad f \in C(?_1 \cup ?_2),$$

б) линейность (по интегрируемым функциям): если $? \in \mathcal{B}_3,\;\; f_1, f_2 \in C(?),\; a, b \in \mathbb{R}$, то

$$\int_{\Gamma} (af_1 + bf_2)\, dS = a\int_{\Gamma} f_1\, dS + b\int_{\Gamma} f_2\, dS,$$

в) положительность (по интегрируемым функциям): пусть $? \in \mathcal{B}_3,\;\; f_1, f_2 \in C(?)$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f_1\, dS \leqslant \int_{\Gamma} f_2\, dS,$$

если $f_1(M) \leqslant f_2(M)$ при каждом $M \in ?$.
Доказательства 1)-3) полностью идентичны схеме доказательств соответствующих свойств криволинейных интегралов первого рода.

Чтобы говорить о геометрическом или физическом смысле поверхностного интеграла, следует давать иное определение этого интеграла – как предела соответствующих интегральных сумм. Поскольку мы определили этот интеграл формально, то также определим его геометрический и физический смысл. Геометрический смысл поверхностного интеграла состоит в том, что площадь поверхность $?$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задается формулой (3). Физический смысл этого интеграла заключается в том, что всевозможные характеристики таких физических тел как поверхности в $\mathbb{R}^3$ определяются в терминах поверхностного интеграла первого рода. К ним относятся масса физической поверхности, ее моменты инерции, координаты центра тяжести и т.д. Так, например, масса материальной поверхности Φ с поверхностной плотностью $\varrho(x, y, z)$, зависящей от точки $(x, y, z) \in \Phi$, определяется как

$$\int_{\Phi} \varrho(x, y, z)\, dS.$$

Лекция 12.

Ориентация поверхности. Поток векторного поля. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и вычисление. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.
Пусть

$$? = \{r(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in T\}, \tag{1}$$

– невырожденная параметрическая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}^2$. Тогда, согласно сделанным ранее предположениям о невырожденности параметризации, в каждой внутренней точке этой поверхности определена касательная плоскость, порожденная парой линейно независимых касательных векторов

$$r_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u}\right),$$

$$r_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v}, \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v}, \frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v}\right),$$

(u_0, v_0) – внутренняя точка T, и вектор нормали к поверхности $[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]$. Рассмотрим единичный вектор нормали, т.е. вектор

$$n(u_0, v_0) = \frac{[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]}{|[r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)]|}$$

(по предположениям о невырожденности параметризации знаменатель не обращается в нуль). По предположениям о гладкости параметризации, координаты вектора n непрерывно зависят от (u_0, v_0) из внутренности T. Если $n(u_0, v_0)$ можно определить на всем T так, чтобы получилась непрерывная функция на T, то эта функция называется ориентацией невырожденной параметрической поверхности $?$. При этом $-n(u_0, v_0)$, которая в этом случае тоже является ориентацией $?$, называется ориентацией противоположной $n(u_0, v_0)$. Если же такого непрерывного продолжения подобрать не удается, то поверхность (1) называется неориентируемой. Запись $?^+$ означает, что ориентируемая поверхность $?$ рассматривается вместе с какой-нибудь из двух своих ориентаций $n(u_0, v_0)$ или $-n(u_0, v_0)$. Запись $?^-$ означает при этом выбор противоположной ориентации.

Поверхностными интегралами второго рода от непрерывной на T функции f по параметризованной поверхности $?^+$ называются 3 интеграла

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^+} f(x,y,z)\,dx\,dy &= \int_{\Gamma} f(x,y,z)\big(n,(0,0,1)\big)\,dS,\\
\int_{\Gamma^+} f(x,y,z)\,dy\,dz &= \int_{\Gamma} f(x,y,z)\big(n,(1,0,0)\big)\,dS,\\
\int_{\Gamma^+} f(x,y,z)\,dz\,dx &= \int_{\Gamma} f(x,y,z)\big(n,(0,1,0)\big)\,dS,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ – единичные вектора на координатных осях Ox, Oy, Oz в пространстве $\mathbb{R}^3$, $n(\cdot)$ – выбранная ориентация поверхности, $\big(n,(0,0,1)\big)$ – скалярное произведение векторов (оно же, как известно, является косинусом угла между векторами n и $(1,0,0)$). Из определения следует, что при переходе к противоположной ориентации поверхности, знак этих интегралов меняется на обратный.

В общем случае, когда $?$ – поверхность из класса $\mathcal{B}_3$, обладающая единичным вектором нормали в каждой внутренней точке (и, значит, в действительности, двумя такими векторами n и $-n$) сделанное выше определение также может быть выбрано как определение ориентации. Если на T удается определить непрерывную функцию $n(M)$ точки $M \in T$, так что для внутренних точек $M \in T$ вектор $n(M)$ – единичная нормаль к $?$, то эту функцию n называют ориентацией $?$, функцию $-n$ – противоположной ориентацией, а поверхность $?$ – ориентируемой поверхностью. Как и выше ориентируемые поверхности обозначают $?^+$ и $?^-$. Если же определить непрерывную на T функцию $n(M)$ невозможно, то поверхность $?$ называют неориентируемой. Примерами ориентируемых поверхностей являются сфера, боковая поверхность цилиндра и многие другие. Классическим примером неориентируемой поверхности (или, как еще говорят, односторонней поверхности) является лист Мёбиуса. Чтобы пояснить, как устроена эта поверхность, заметим сначала, что боковая поверхность цилиндра может быть получена соединением противоположных сторон прямоугольника $ABCD$ в трехмерном пространстве (если AB, BC, CD, DA – стороны прямоугольника, то боковая поверхность цилиндра получится совмещением сторон AB и CD – вершины A с вершиной D, а вершины B с вершиной C). Лист Мёбиуса получается с помощью такого же алгоритма, только совмещение указанных сторон производится с одновременным переворотом одной из сторон: вершина A совмещается с вершиной C, а вершина B с вершиной D. Если же рассмотренную сторону мы перевернем еще раз в том же направлении и вновь соединим точки A с D, а B с C, то мы опять получим ориентируемую поверхность.

Однако достаточно часто приходится иметь дело с поверхностями $? \in \mathcal{B}_3$, у которых единичные нормали имеются не во всех точках поверхности. В этом случае понятие ориентируемой поверхности вводят по другому. Для случая параметрической поверхности (1) понятие ориентации не изменяется. Далее делается такое замечание: выбор направления нормали для поверхности (1) однозначно связан с левосторонним обходом этой поверхности вдоль границы, взглянув на поверхность с противоположной стороны (т.е. выбрав противоположное направление единичной нормали), мы увидим, что левосторонний обход стал правосторонним и наоборот. Далее, пусть имеется $? \in \mathcal{B}_3$ и

$$? = \cup_{i=1}^{n} ?_i,$$

$?_i$ – параметрические поверхности вида (1), никакие две из которых не имеют общих внутренних точек. Если хотя бы одна из $?_i$ не является ориентируемой, то по определению поверхность $?$ также считается не ориентируемой. Пусть теперь каждая из параметрических поверхностей $?_i$ является ориентируемой. Это, в частности, означает, что выбран один из двух вариантов обхода границ каждой параметрической поверхности $?_i$. Будем называть обходы границ $?_i$ согласованными между собой, если для любой пары $?_i$, $?_k$ общие точки этих множеств, которые, конечно, могут находиться только на границах этих множеств, проходятся при выбранных обходах в противоположных направлениях. Итак, если обходы границ множеств $?_i$ можно согласовать, то $?$ называется ориентируемой, если обходы согласовать невозможно, то $?$ называется неориентируемой. В случае ориентируемой поверхности после выбора всех направлений обхода границ $?_i$, направления нормалей внутри $?_i$ выбирают так, чтобы получающийся обход границы из вершины нормали видился левосторонним.

Определение поверхностных интегралов второго рода для рассмотренных ориентируемых поверхностей совпадает с (2). Некоторым обобщением этого определения является понятие потока непрерывного векторного поля $a = (a_x, a_y, a_z)$ через ориентированную поверхность $?^+$. Так называют интеграл

$$\int_{\Gamma} (n,a)\,dS,$$

где $n(\cdot)$ – выбранная ориентация поверхности, (n,a) – скалярное произведение векторов. При этом поверхностные интегралы второго рода можно считать потоками специального вида векторных полей. К примеру, в случае первого из интегралов в (2) векторное поле a имело вид $(0,0,f(x,y,z))$.

Свойства поверхностных интегралов второго рода являются следствием свойств поверхностных интегралов первого рода. Перечислим их названия:

1) аддитивность (по области интегрирования),
2) линейность (по интегрируемым функциям).
Также как и для криволинейных интегралов второго рода, свойство положительности для поверхностных интегралов второго рода, вообще говоря, не выполняется.

Лекция 13.

Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его физический смысл.

Обратимся к рассмотрению формулы Гаусса-Остроградского. Пусть

$$Z(\varphi_1, \varphi_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T,\ \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)\}, \qquad T \in \mathcal{T}_2,$$

$\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ – непрерывные на T функции, принадлежащие классу $C^1(\widehat{T})$, $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$ при каждом $(x, y) \in T$. Оказывается, что границу ? множества Z, состоящую из $?_0$ – боковой поверхности Z и поверхностей

$$?_1 = \{(x, y, \varphi_1(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T\}, \quad ?_2 = \{(x, y, \varphi_2(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T\}$$

можно ориентировать. Эту ориентацию, т.е. функцию $n(M)$, $M \in ?$, можно выбрать так, чтобы последняя компонента вектора $n(M)$ во внутренних точках $M \in ?_2$, была бы больше нуля (иными словами вектор $n(M)$ составлял бы острый угол с направлением оси Oz), а во внутренних точках $M \in ?_1$, была бы меньше нуля (иными словами вектор $n(M)$ составлял бы тупой угол с направлением оси Oz). При этом ориентация, т.е. значения $n(M)$ в точках поверхности $?_0$ (эта часть поверхности состоит из отрезков прямых, параллельных оси Oz, быть может вырождающихся в точку) для дальнейшего не так и важна. Важно лишь то, что эти значения (они представляют из себя вектора в $\mathbb{R}^3$) перпендикулярны оси Oz. Выбранную ориентацию поверхности ? будем отмечать знаком "$+$": $?_0^+$, $?_1^+$, $?_2^+$. Для примера вычислим компоненты нормали для $?_2^+$:

$$\det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = (-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, 1)$$

и, значит, третья компонента вектора $n(M)$ для $M \in ?_2$ равна $(1 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y})^2)^{-1/2}$, вычисленному в точке M. Аналогично, третья компонента этого вектора для $M \in ?_1$ равна $-(1 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y})^2)^{-1/2}$.

Пусть теперь $f(\cdot)$ – непрерывная на области Z функция, обладающая непрерывной на Z частной производной $\frac{\partial f}{\partial z}$. Тогда

$$\iiint_Z \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_T \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy = \iint_T \big(f(x, y, \varphi_2(x, y)) - f(x, y, \varphi_1(x, y)) \big)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_T f(x, y, \varphi_2(x, y)) \left(1 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y})^2 \right)^{-1/2} \left(1 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y})^2 \right)^{1/2} dx\, dy -$$

$$- \iint_T f(x, y, \varphi_1(x, y)) \left(1 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y})^2 \right)^{-1/2} \left(1 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y})^2 \right)^{1/2} dx\, dy =$$

$$= \iint_{\Gamma_2} f(x, y, z) \big(n(x, y, z), (0, 0, 1) \big)\, dS + \iint_{\Gamma_1} f(x, y, z) \big(n(x, y, z), (0, 0, 1) \big)\, dS.$$

Так как $\big(n(x, y, z), (0, 0, 1)\big) = 0$ для $(x, y, z) \in ?_0$, то окончательная формула имеет вид

$$\iiint_Z \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\Gamma +} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

– тройной интеграл по множеству Z в трехмерном пространстве сводится к поверхностному интегралу второго рода по границе этого множества (с надлежащим образом выбранной ориентацией этой границы). Эта формула остается справедливой и для более сложно устроенных областей $W \in \mathcal{T}_3$. Именно, пусть область W может быть разделена на конечное число частей $\{Z_i\}_{i=1}^n$ рассмотренного вида (как обычно предполагается, что никакие две из этих частей не имеют общих внутренних точек). Тогда можно показать, что граница ? области W является ориентируемой поверхностью. Выбирая положительной ориентацией $?^+$ ту, при которой направление нормали к поверхности ? является внешним по отношению к области W, можно установить, что

$$\iiint_W \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\Gamma +} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

(в предположении непрерывности функции f и ее частной производной по переменной z на области W). Эту формулу и можно было бы назвать формулой Гаусса-Остроградского, однако обычно ее записывают в более симметричном виде. При этом давайте сделаем дополнительное предположение о возможности разделить область W на конечное число частей $\{Z_i\}_{i=1}^n$ не только в направлении оси Oz, но также и в направлении каждой из двух других: Ox и Oy. Пусть f, g, h - непрерывные на W функции класса $C^1(W)$. Тогда

$$\iiint_W \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\Gamma+} h(x,y,z)\,dy\,dz + g(x,y,z)\,dz\,dx + f(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского. Число

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

называется дивергенцией векторного поля $a = (h, g, f)$. Применяя сделанные определения, формулу Гаусса-Остроградского можно записать как

$$\iiint_W \operatorname{div} a\,dx\,dy\,dz = \iint_\Gamma (a, n)\,dS \tag{1}$$

– тройной интеграл по множеству W от дивергенции векторного поля $a = (h, g, f)$ сводится к поверхностному интегралу первого рода по границе ? этого множества от скалярного произведения (a, n) этого векторного поля и внешней, по отношению к W, нормали к ? (иначе, – равен потоку этого векторного поля в направлении внешней нормали к ?). Если воспринимать поле a как скорость движущейся жидкости, то интеграл в правой части (1) представляет из себя количество жидкости, протекающей через поверхность ? в заданную сторону в единицу времени. Чтобы это количество (поток) было отлично от нуля, согласно (1), необходимо, чтобы внутри W находились источники (или стоки) жидкости (т.е. $\operatorname{div} a \neq 0$). Таким образом, дивергенция характеризует источники поля a.

Обсудим теперь еще одну формулу, обобщающую уже рассмотренную формулу Грина. Напомним, что формула Грина позволяет свести вычисление двойного интеграла по плоской области S к вычислению криволинейного интеграла по границе этой области. При некоторых предположениях относительно S, f и g она выглядит так

$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial S+} g(x,y)\,dx + f(x,y)\,dy.$$

Эта формула может быть распространена на интегралы по множествам, расположенным на относительно произвольных поверхностях, т.е. на поверхностные интегралы (координатные плоскости – это простейший вид поверхности в $\mathbb{R}^3$). Пусть $dr = (dx, dy, dz)$, $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направление нормали к S, при котором выбранное движение по контуру ∂S^+ представляется положительным, $a = (f, g, h)$ - непрерывное на S векторное поле класса $C^1(T)$, T – некоторая область, содержащая поверхность S (область T требуется, чтобы определить частные производные функций f, g и h). Тогда

$$\int_{\partial S+} f\,dx + g\,dy + h\,dz = \iint_S \det\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} dS. \tag{2}$$

Вектор с координатами

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

называется ротором или вихрем поля a и обозначается $\operatorname{rot} a$. Мнемоническое правило для записи этого вектора состоит в выписывании определителя

$$\operatorname{rot} a = \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}.$$

Ротор характеризует "завихренность" поля в данной точке. Применяя сделанные определения, запишем (2) в виде

$$\int_{\partial S+} (a,\, dr) = \iint_S (\operatorname{rot} a, n)\,dS. \tag{2'}$$

Формулы (2), (2′) устанавливаются сначала на параметрических поверхностях сравнением левой и правой частей равенства (2), а потом распространяются по аддитивности на более сложные поверхности. Физический смысл формулы Стокса заключается в ее интерпретации как (2′): циркуляция векторного поля a вдоль замкнутого контура ∂S равна потоку ротора этого векторного поля, через поверхность, натянутую на этот контур. Чтобы циркуляция была отлична от нуля для малого контура, окружающего некоторую выбранную точку поверхности, поле должно поворачиваться (иметь завихрение) вблизи этой точки.