Государственный комитет Российской
Федерации по высшему образованию

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Методические указания по курсу “Численные методы”

Составитель: Осипенко К. Ю.

Москва 1995

Введение

Если $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция и $F(x)$ — ее первообразная, то по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

Однако часто первообразная не может быть выражена через элементарные функции или является слишком сложной. Например, при вычислении интегралов

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{10}}$$

в первом случае мы сталкиваемся с тем, что первообразная для e^{-x^2} не выражается через элементарные функции, а во втором — с тем, что первообразная для функции $(1+x^2)^{-10}$ является слишком громоздким выражением.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ обычно бывает задана в дискретном числе точек. В этом случае первообразная $F(x)$ вообще не может быть найдена точно. Тем самым возникает задача приближенного вычисления определенного интеграла от функции по информации о значениях этой функции в некоторой системе точек. Такого рода формулы называются *квадратурными формулами*. В данном пособии рассматриваются основные методы построения простейших квадратурных формул и оценки их погрешностей.

1. Формула прямоугольников

Рассмотрим задачу приближенного вычисления интеграла

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx$$

по значению $f(0) = f_0$. Естественно считать, что функция всюду приближенно равна f_0, и заменить вычисление интеграла от исходной функции на вычисление интеграла от постоянной f_0. Таким образом, мы приходим к простейшей квадратурной формуле

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \approx hf_0,$$

называемой *формулой прямоугольников*. Геометрический смысл формулы прямоугольников заключается в том, что площадь под графиком функции $y = f(x)$ заменяется на площадь прямоугольника с высотой, равной $f(0)$.

Оценим погрешность формулы прямоугольников в предположении, что у функции $f(x)$ существует непрерывная вторая производная. По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f_0 + f_0'x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

где $f'_0 = f'(0)$. Отсюда

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = hf_0 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f''(\xi)}{2!}x^2\,dx.$$

Положим

$$M_2 = \max_{x\in[-h/2,h/2]} |f''(x)|.$$

Тогда

$$\left|\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx - hf_0\right| \le \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2} x^2\,dx = \frac{M_2}{24}h^3. \tag{1.1}$$

2. Усложненная формула прямоугольников

Пусть имеется отрезок $[a,b]$ и требуется приближенно вычислить

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на N равных частей точками

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\dots,N, \qquad h = \frac{b-a}{N}.$$

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N-1$, вычислим значение функции в средней точке $x_{i+1/2} = a + (i+1/2)h$ и применим формулу прямоугольников

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx hf_{i+1/2}, \tag{2.1}$$

где $f_{i+1/2} = f(x_{i+1/2})$.

Поскольку

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx,$$

то, сложив приближенные равенства (2.1), получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{N-1/2}). \tag{2.2}$$

Формула (2.2) называется *усложненной формулой прямоугольников* (часто именно эту формулу называют *формулой прямоугольников*).

Для оценки погрешности формулы (2.2) предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную на отрезке $[a,b]$ и

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Учитывая оценку (1.1), имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{N-1} f_{i+1/2}\right| \le \sum_{i=0}^{N-1}\frac{M_2}{24}h^3 = \frac{M_2}{24}(b-a)h^2.$$

В силу равенства $Nh = b - a$ можно переписать эту оценку следующим образом

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{N-1} f_{i+1/2}\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24N^2}.$$

3. Использование интерполяционного многочлена Лагранжа для построения квадратурных формул

Одним из общих приемов построения квадратурных формул является замена функции, заданной на отрезке $[a,b]$, некоторой более простой и в то же время близкой к исходной функцией. Например, если $f(x)$ известна в некоторых точках отрезка $[a,b]$ $x_0, x_1, \dots, x_n$, то можно заменить ее на интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ и положить

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx.$$

Для интерполяционного многочлена Лагранжа имеет место равенство (см. [7, стр. 9])

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_{ni}(x) f_i,$$

где

$$l_{ni}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \qquad f_i = f(x_i).$$

Таким образом, получаем квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f_i, \tag{3.1}$$

в которой

$$A_i = \int_a^b l_{ni}(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Замечание. Если $f(x)$ — многочлен степени $k \le n$, то в силу единственности интерполяционного многочлена Лагранжа $f(x) \equiv L_n(x)$. Тем самым квадратурная формула (3.1) точна на многочленах степени $k \le n$. В частности, при всех $k = 0, 1, \dots, n$

$$\int_a^b x^k\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k. \tag{3.3}$$

Пример 3.1. Построить квадратурную формулу вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(-1/2) + A_1 f(0) + A_2 f(1/4).$$

Решение. Можно было бы вычислять A_0, A_1 и A_2 по формулам (3.2). Например,

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x(x-1/4)}{3/8}\,dx = \frac{8}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16}{9}.$$

Мы же воспользуемся равенствами (3.3). Имеем

$$\int_{-1}^{1} dx = A_0 + A_1 + A_2,$$
$$\int_{-1}^{1} x\,dx = A_0\left(-\frac{1}{2}\right) + A_2\frac{1}{4},$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = A_0\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + A_2\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Таким образом, получаем следующую систему

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2, \\ -\dfrac{1}{2}A_0 + \dfrac{1}{4}A_2 = 0, \\ \dfrac{1}{4}A_0 + \dfrac{1}{16}A_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A_0 = \frac{16}{9}, \qquad A_1 = -\frac{10}{3}, \qquad A_2 = \frac{32}{9}.$$

Следовательно, искомая квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{16}{9}f(-1/2) - \frac{10}{3}f(0) + \frac{32}{9}f(1/4).$$

4. Квадратурные формулы Ньютона–Котеса

Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

($x_0 = a$, $x_n = b$). Заменим функцию $f(x)$ на ее интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по значениям этой функции в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Для равноотстоящих узлов интерполяции (см. [7, стр. 12])

$$l_{ni}(x) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n),$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h}. \tag{4.1}$$

Сделав замену переменной (4.1) и учитывая, что $dx = h\,dq$, получим квадратурную формулу (3.1), в которой

$$A_i = h\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)\,dq.$$

Положим

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)\,dq. \tag{4.2}$$

Так как $h = \dfrac{b-a}{n}$, то $A_i = (b-a)H_i$. Тем самым получаем квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=o}^{n} H_i f_i, \tag{4.3}$$

называемую *квадратурной формулой Ньютона–Котеса.* Величины (4.2) называются *коэффициентами Котеса.* Для них существуют таблицы.

Отметим некоторые простейшие свойства коэффициентов Котеса. Поскольку квадратурная формула (4.3) точна для любого многочлена степени $k \le n$, то она, в частности точна для $f(x) \equiv 1$. Подставив эту функцию в (4.3), находим

$$\sum_{i=0}^{n} H_i = 1. \tag{4.4}$$

Кроме того, непосредственно из (4.2) вытекают равенства

$$H_{n-i} = H_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{4.5}$$

5. Формула трапеций

Рассмотрим квадратурную формулу Ньютона–Котеса при $n = 1$. В этом случае $h = b - a$, а сама формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(H_0 f_0 + H_1 f_1).$$

Пользуясь свойствами (4.4) и (4.5), находим

$$H_0 + H_1 = 1,$$
$$H_0 = H_1.$$

Следовательно, $H_0 = H_1 = 1/2$.

Итак, получена формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\frac{f_0 + f_1}{2},$$

называемая *формулой трапеций.*

Оценим погрешность формулы трапеций. Для погрешности приближения функции многочленом Лагранжа первой степени имеет место равенство (см. [7, стр. 10, 12])

$$f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} h^2 q(q-1),$$

где ξ некоторая точка из интервала (a, b), а q определено равенством (4.1). Таким образом, имеем

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - h\frac{f_0 + f_1}{2} \right| = \left| \int_a^b (f(x) - L_1(x))\,dx \right|$$
$$= \left| \int_0^1 \frac{f''(\xi)}{2} h^3 q(q-1)\,dq \right| \le \frac{M_2}{2} h^3 \int_0^1 q(1-q)\,dq = \frac{M_2}{12} h^3.$$

Аналогично усложненной формуле прямоугольников можно построить усложненную формулу трапеций, разбив весь отрезок $[a, b]$ на n равных частей и применив на каждой из частей формулу трапеций. Тогда $h = \dfrac{b-a}{n}$, а соответствующая квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right).$$

При этом для погрешности этой квадратурной формулы (мы обозначаем ее через R_t) будут справедливы неравенства

$$R_t \le n\frac{M_2}{12} h^3 = \frac{M_2}{12}(b-a)h^2 = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \tag{5.1}$$

Пример 5.1. В скольких точках надо вычислить функцию $f(x) = e^{x^2}$, чтобы при вычислении интеграла

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

по усложненной формуле трапеций погрешность не превосходила 10^{-5}.

Решение. Поскольку $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$, то $M_2 = 6e$. Из (5.1) вытекает, что для достижения требуемой точности достаточно выполнения неравенства

$$\frac{M_2}{12n^2} \le 10^{-5}.$$

Отсюда $n \ge 100\sqrt{5e} = 368,6\dots$. Число вычислений функции при разбиении отрезка на n частей равно $n+1$, поэтому для вычисления рассматриваемого интеграла с заданной точностью потребуется находить значения функции в 370 точках.

6. Формула Симпсона

Пусть теперь $n = 2$, т.е. $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = b$, а $h = \dfrac{b-a}{2}$. Из (4.2) имеем

$$H_0 = \frac{1}{4}\int_0^2 (q-1)(q-2)\,dq = \frac{1}{4}\left(\frac{q^3}{3} - \frac{3q^2}{2} + 2q\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}.$$

Тогда в силу (4.5) $H_2 = H_0 = 1/6$, а из (4.4) вытекает, что $H_1 = 2/3$. Итак, мы получили квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2),$$

которая называется *формулой Симпсона*. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что вместо интеграла от исходной функции вычисляется интеграл от параболы, проходящей через значения функции в точках a, $\dfrac{a+b}{2}$ и b.

Оценим погрешность формулы Симпсона. Без ограничения общности можно считать, что начало координат выбрано в точке $\dfrac{a+b}{2}$. Тем самым будем оценивать квадратурную формулу

$$\int_{-h}^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)). \tag{6.1}$$

Прежде всего отметим, что формула Симпсона точна не только на многочленах второй степени, как следует из замечания в п. 3, но и на многочленах третьей степени. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что формула (6.1) точна для $f(x) = x^3$.

Пусть c — произвольная точка из интервала $(0, h)$. Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_3(x)$, интерполирующий функцию $f(x)$ в точках $-h$, 0, c и h. Имеем

$$\int_{-h}^h L_3(x)\,dx = \frac{h}{3}(L_3(-h) + 4L_3(0) + L_3(h)) = \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h)).$$

Поэтому для погрешности формулы Симпсона, которую мы обозначим через R, будем иметь

$$\begin{aligned} R &= \left|\int_{-h}^h f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h))\right| \\ &= \left|\int_{-h}^h f(x)\,dx - \int_{-h}^h L_3(x)\,dx\right| = \left|\int_{-h}^h (f(x) - L_3(x))\,dx\right| \\ &\le \int_{-h}^h |f(x) - L_3(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Положим

$$M_4 = \max_{x\in[-h,h]} |f^{(4)}(x)|.$$

Тогда для погрешности приближения функции $f(x)$ многочленом Лагранжа справедлива следующая оценка (см. [7, стр. 11])

$$|f(x) - L_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}|(x+h)x(x-c)(x-h)|.$$

Тем самым для любого $c \in (0, h)$

$$R \leq \frac{M_4}{24}\int_{-h}^{h}|(x+h)x(x-c)(x-h)|\,dx.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $c \to 0$, получаем

$$R \leq \frac{M_4}{24}\int_{-h}^{h}x^2(h^2-x^2)\,dx = \frac{M_4}{24}\left(h^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{M_4}{90}h^5. \tag{6.2}$$

Выведем теперь усложненную формулу Симпсона. Разделим отрезок $[a, b]$ на четное число отрезков $2n$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n, \qquad h = \frac{b-a}{2n}.$$

На каждом из отрезков $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ применим формулу Симпсона

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}).$$

Сложив эти равенства, получим усложненную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{2i}\right).$$

Учитывая оценку (6.2), для погрешности усложненной формулы Симпсона, которую мы обозначим через R_s, будем иметь

$$R_s \leq n\frac{M_4}{90}h^5 = \frac{M_4}{180}(b-a)h^4,$$

где

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

Поскольку $h = \dfrac{b-a}{2n}$, то оценка величины R_s может быть дана через n

$$R_s \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Пример 6.1. Рассмотреть пример 5.1 для формулы Симпсона.

Решение. Имеем $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$. Тем самым $M_4 = 76e$. Для достижения требуемой точности достаточно выполнения неравенства

$$\frac{M_4}{2880n^4} \leq 10^{-5}.$$

Отсюда

$$n \geq 10\sqrt[4]{\frac{19e}{72}} = 9,2\ldots\ .$$

При использовании формулы Симпсона отрезок разбивается на $2n$ частей. Поэтому для вычисления рассматриваемого интеграла с заданной точностью потребуется находить значения функции в 21 точке (напомним, что в аналогичном примере для формулы трапеций при той же точности требовались вычисления в 370 точках).

7. Главная часть погрешности квадратурных формул

Для усложненной формулы прямоугольников было доказано следующее равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + r_1, \tag{7.1}$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, а

$$|r_1| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2.$$

Мы получим более точную оценку в предположении, что функция $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную.

Рассмотрим сначала случай, когда $[a,b] = [-h/2, h/2]$. По формуле Тейлора

$$f(x) = f_0 + f_0' x + \frac{f_0''}{2!}x^2 + \frac{f_0'''}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4, \tag{7.2}$$

где $f_0^{(i)} = f^{(i)}(0)$, $i = 0,1,2,3$, а ξ — некоторая точка из интервала $(-h/2, h/2)$. Интегрируя (7.2), получаем равенство

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = f_0 h + \frac{f_0''}{24}h^3 + r_2,$$

в котором

$$r_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\,dx.$$

Для величины r_2 справедлива следующая оценка

$$|r_2| \le \frac{M_4}{4!}\int_{-h/2}^{h/2} x^4\,dx = \frac{M_4}{1920}h^5.$$

Таким образом, для усложненной формулы прямоугольников имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + \frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1} f''_{i+1/2} + r_3, \tag{7.3}$$

где

$$|r_3| \le n\frac{M_4}{1920}h^5 = \frac{M_4}{1920}(b-a)h^4.$$

Применяя (7.1) для второй производной, находим

$$\int_a^b f''(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f''_{i+1/2} + r_4,$$

при этом

$$|r_4| \le \frac{M_4}{24}(b-a)h^2.$$

Следовательно,
$$h\sum_{i=0}^{n-1} f''_{i+1/2} = \int_a^b f''(x)\,dx - r_4.$$
Подставляя это выражение в (7.3), получаем
$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + \frac{h^2}{24}\int_a^b f''(x)\,dx + r_5,$$
где
$$|r_5| = \left|-\frac{h^2}{24}r_4 + r_3\right| \le \frac{M_4}{24^2}(b-a)h^4 + \frac{M_4}{1920}(b-a)h^4 = \frac{13M_4}{5760}(b-a)h^4.$$

Определение. Говорят, что $\varphi(h) = O(h^k)$ (читается "о большое"), если существует такая постоянная $C > 0$, для которой
$$|\varphi(h)| \le Ch^k.$$

Тем самым мы доказали равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + ch^2 + O(h^4), \tag{7.4}$$

в котором
$$c = \frac{1}{24}\int_a^b f''(x)\,dx.$$
Положим
$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad I_h^r = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2}.$$
Тогда равенство (7.4) запишется в виде
$$I = I_h^r + ch^2 + O(h^4).$$

Величина ch^2 называется *главной частью* погрешности формулы прямоугольников.

Аналогичные равенства можно получить для формул трапеций и Симпсона
$$I = I_h^t + c_1h^2 + O(h^4),$$
$$I = I_h^s + c_2h^4 + O(h^6)$$
(в последнем случае надо требовать, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную шестую производную).

8. Правило Рунге практической оценки погрешности

Пусть z — неизвестное точное значение некоторой величины, z_h — известное ее приближенное значение, зависящее от положительного параметра h, который может принимать сколь угодно малые значения.

Предположим, что установлена связь между точным и приближенным значениями

$$z = z_h + ch^k + O(h^{k+m}), \tag{8.1}$$

где c — неизвестная не зависящая от h постоянная. Тогда

$$z = z_{h/2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+m}), \tag{8.2}$$

так как для любой постоянной C $O((Ch)^n) = O(h^n)$. Вычитая из (8.1) равенство (8.2), будем иметь

$$z_{h/2} - z_h = c\left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+m}). \tag{8.3}$$

Отсюда

$$c\left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}).$$

Следовательно, при $c \neq 0$ величина $\dfrac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}$ отличается от главного члена погрешности $z - z_{h/2}$ на $O(h^{k+m})$, т.е.

$$z - z_{h/2} = \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}). \tag{8.4}$$

Тем самым при $c \neq 0$ оценить погрешность можно так:

$$z - z_{h/2} \approx \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}.$$

Такой способ оценки погрешности называется *правилом Рунге.*

Замечание. На практике считается, что условие $c \neq 0$ выполнено, если

$$\left|2^k \frac{z_{h/2} - z_h}{z_h - z_{2h}} - 1\right| < 0,1. \tag{8.5}$$

Только в этом случае рекомендуется применение правила Рунге

Поясним условие (8.5). Из (8.3) следует, что

$$z_{h/2} - z_h = c\left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+m}),$$
$$z_h - z_{2h} = ch^k(2^k - 1) + O(h^{k+m}).$$

Поэтому

$$\frac{z_{h/2} - z_h}{z_h - z_{2h}} \approx \frac{1}{2^k}.$$

Таким образом,

$$2^k \frac{z_{h/2} - z_h}{z_h - z_{2h}} \approx 1.$$

9. Уточнение приближенного решения по Ричардсону

Положим
$$z_h^* = \frac{2^k z_{h/2} - z_h}{2^k - 1}.$$
Тогда из (8.4) получаем
$$z = z_{h/2} + \frac{z_{h/2} - z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}) = z_h^* + O(h^{k+m}).$$
При $c \neq 0$ $z - z_{h/2}$ имеет k-ый порядок малости, а $z - z_h^*$ — $(k+m)$-ый порядок малости, т.е. z_h^* — более точное приближение. Оно носит название *уточнение по Ричардсону.*

Таким образом, если вычисляется определенный интеграл по усложненным формулам прямоугольников или трапеций, то $k = 2$, и мы можем оценить приближенно погрешность по правилу Рунге
$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}.$$
Кроме того, можно найти уточнение по Ричардсону
$$I_h^* = \frac{4I_{h/2} - I_h}{3}.$$

Для формулы Симпсона $k = 4$, и приближенная оценка погрешности имеет вид
$$I - I_{h/2}^s \approx \frac{I_{h/2}^s - I_h^s}{15}.$$
Для уточнения по Ричардсону имеем
$$I_h^{s*} = \frac{16 I_{h/2}^s - I_h^s}{15}.$$

Замечание. Формулы трапеций и Симпсона удобны тем, что при переходе от h к $h/2$ все вычисленные ранее значения функций используются в новой квадратурной формуле.

Правило Рунге и уточнение по Ричардсону можно применять и для других задач приближенного вычисления. Рассмотрим в качестве примера численное дифференцирование.

Пусть известны значения некоторой достаточно гладкой функции $f(x)$ в точках $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \pm 1$. Положим $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \pm 1$. Хорошо известна формула численного дифференцирования (см., например, [7, стр. 26])
$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = f_{0h}''.$$
Найдем главную часть погрешности в этом методе. По формуле Тейлора имеем
$$f_{\pm 1} = f_0 \pm f_0' h + \frac{f_0''}{2!} h^2 \pm \frac{f_0'''}{3!} h^3 + \frac{f_0^{(4)}}{4!} h^4 \pm \frac{f_0^{(5)}}{5!} + \frac{f^{(6)}(\xi_{\pm 1})}{6!} h^6,$$

где $f_0^{(i)} = f^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, $\xi_1 \in (0, h)$, а $\xi_{-1} \in (-h, 0)$. Положим

$$r = -\frac{f^{(6)}(\xi_1) + f^{(6)}(\xi_{-1})}{6!} h^4.$$

Тогда

$$f_1 + f_{-1} = 2f_0 + f_0'' h^2 + \frac{f_0^{(4)}}{12} h^4 - rh^2.$$

Тем самым

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{f_0^{(4)}}{12} h^2 + r. \tag{9.1}$$

Поскольку

$$|r| \le \frac{2M_6}{6!} h^4,$$

то равенство (9.1) может быть записано в виде

$$f_0'' = f_{0h}'' + ch^2 + O(h^4),$$

где $c = -f_0^{(4)}/12$. Следовательно, по правилу Рунге

$$f_0'' - f_{0,h/2}'' \approx \frac{f_{0,h/2}'' - f_{0h}''}{3},$$

а для уточнения по Ричардсону справедливо равенство

$$f_{0h}''^{\,*} = \frac{4f_{0,h/2}'' - f_{0h}''}{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* М.: Наука, 1973.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* М.: Наука, 1987.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* М.: Наука, 1966. Т.1; Физматгиз, 1962. Т.2.
4. Волков Е.А. *Численные методы.* М.: Наука, 1982.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики.* М.: Наука, 1966.
6. Калиткин Н.Н. *Численные методы.* М.: Наука, 1978.
7. Осипенко К.Ю. *Аппроксимация функций многочленами и численное дифференцирование*: Методические указания по курсу "Численные методы"; МГАТУ. М., 1994.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Осипенко Константин Юрьевич

Квадратурные формулы

Методические указания по курсу "Численные методы"

Редактор М. А. Соколова

Подп. в печать Объем п.л. Тираж 75 экз. Заказ N

Ротапринт МГАТУ. Берниковская наб., 14