Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра высшей математики

MAPLE В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания к практическим занятиям
по теме: “ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА”

Составитель Ю.М. Раппопорт

Москва 2003 г.

1. Введение

В настоящее время крайне актуальным представляется создание учебно-методических пособий по изучению курса высшей математики студентами технических вузов с использованием появившихся в последнее время компьютерных математических пакетов и систем. Настоящая работа и представляет собой один из шагов в развитие этого направления.

В настоящем методическом пособии излагаются некоторые теоретические результаты для формул и рядов Тейлора и на ряде примеров показывается применение пакета MAPLE при их изучении.

2. Математические пакеты. Пакет Maple

Математические пакеты являются крайне важным элементом использования и изучения математических знаний на современном этапе развития компьютерной техники. Как для математика-исследователя, так и для студента, изучающего курс высшей математики, наибольшее значение представляют следующие математические пакеты: пакет MAPLE компании Waterloo Maple Inc., пакет Mathcad компании Mathsoft, пакет MATHEMATICA компании Wolfram Research Inc., пакет MATLAB компании Mathworks, пакет Scientific Work Place компании MacKichan Software Inc., Энциклопедия математики на CD-ROM издательства Kluwer Academic Publishers и другие. Можно отметить тенденцию начала распространения таких пакетов не на жестких носителях, а через доступ в Интернет в качестве средств дистанционного обучения.

Пакет MAPLE является как аналитическим инструментом, так и средством программирования для каждого изучающего математику.

Одним из наилучших по эффективности и мощности математических пакетов для использования студентами, изучающими курс математического анализа, является MAPLE. Это одна из наиболее мощных систем аналитических вычислений. Она позволяет значительно повысить скорость выполнения математических операций. Язык программирования, графический интерфейс, 2-D и 3-D визуализации позволяют легко получать графические иллюстрации изучаемых математических понятий.

Важнейшим элементом MAPLE систем является удобство их использования для студентов и преподавателей в Интернете.

Система MAPLE создает естественную обучающую среду для студентов естественно-научного и технического профиля по обучению курсу математического анализа. При решении любой части математической проблемы студент может применить правило математического анализа или использовать команду MAPLE. В частности визуализация способствует пониманию характера сходимости изучаемой нами формулы Тейлора для различных функций. Использование математических пакетов студентом при обучении способствует тому, что указанные пакеты и их расширенные возможности будут использоваться техническим специалистом и впоследствии в своей инженерной деятельности.

3. Формула Тейлора

Ряд Тейлора - это степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

где числовая функция f предполагается определенной в некоторой окрестности точки x_0 и имеющей в этой точке производные всех порядков.

Многочленами Тейлора, порядка n соответственно, называются частные суммы ряда Тейлора

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Если мы распишем эту формулу, то получим следующее выражение

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Формула Тейлора для функции $f(x)$ - это представление функции в виде суммы ее многочлена Тейлора степени $n (n = 0, 1, 2, ...)$ и остаточного члена. Другими словами это называют разложением функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0. Если действительная функция f одного переменного имеет n производных в точке x_0, то ее формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- многочлен Тейлора степени n, а остаточный член может быть записан в форме Пеано

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0.$$

Получаем, что

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если функция f дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x_0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$, то остаточный член в этой окрестности может быть записан в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)},$$

$$0 < \theta < 1, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Заметим, что при $n = 1$ выражение для $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений для функции $f(x)$.

Из формулы Тейлора видно, что точность аппроксимации, как правило, возрастает с ростом степени многочлена Тейлора и тем выше, чем точка x ближе к точке x_0.

Формула Тейлора для многочленов. Пусть имеется произвольный многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Тогда при любых x и h имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + ... + a_n =$$
$$= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Рядом Маклорена для функции $f(x)$ называется ее ряд Тейлора в точке 0 начала координат, то есть таким образом это степенной ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Таким образом формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора. Предположим, что функция $f(x)$ имеет n производных в точке $x = 0$. Тогда в некоторой окрестности этой точки $(-\delta, \delta), \delta > 0$, функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x),$$

$$x \in (-\delta, \delta),$$

где $r_n(x)$ - остаточный член $n-$ ого порядка в форме Пеано.

Формула Тейлора позволяет свести изучение свойств конечное или бесконечное число раз дифференцируемой функции к более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора. Этим обьясняется важность всевозможных аналитических и численных приложений формулы Тейлора для аппроксимации и вычисления функций. Замена функций на их приближение многочленом Тейлора помогает изучению пределов, анализу сходимости и расходимости рядов и интегралов, вычислению интегралов и т.д. Формула Тейлора широко используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности.

Приведем разложения по формуле Маклорена для основных элементарных математических функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

4. Использование пакета MAPLE при изучении формулы Тейлора

Прежде всего отметим возможность использования пакета MAPLE как очень мощного калькулятора.

Пример 1. Чтобы вычислить $(14)\cdot(12^{13})$ необходимо выполнить следующую команду MAPLE
$> 14 * 12$^13;
Получается ответ: 1497904875307008 .

Отметим, что MAPLE распознает многие специальные операторы, так в частности часто встречающиеся в курсе математического анализа факториалы.

Пример 2. Вычислить 15!.
$> 15!;$
Получается ответ: 1307674368000 .

Удобно проводить в MAPLE вычисление конечных и бесконечных рядов.

Пример 3. Рассмотрим вычисление конечной суммы первых десяти членов ряда следующего вида $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Чтобы ее вычислить необходимо выполнить следующие команды MAPLE:
$> sum((-1)^{k+1} * 1/k, k = 1..10);$
Получается $\frac{1627}{2520}$.
И далее
$> evalf(1627/2520);$
дает десятичный результат .6456349206.
Заметим, что как в этом месте, так и в других случаях работы с пакетом MAPLE можно использовать переменную среды % , которая сохраняет в качестве своего значения результат выполнения последней команды. С ней предыдущая процедура MAPLE будет выглядеть следующим образом:
$> evalf(\%);$
Однако в настоящей методической работе для наглядности изложения будем обходиться без использования переменной среды % и записывать команды MAPLE полностью.
Вычисление бесконечной суммы этого ряда при помощи MAPLE дает следующее:
$> sum((-1)^{(k+1)} * 1/k, k = 1..infinity);$
Получается результат $ln(2)$.

В MAPLE существует специальная команда, позволяющая вычислять ряды и многочлены Тейлора: $taylor(expr, eq/nm, n)$. Здесь $expr$ - разлагаемое в ряд выражение, eq/nm - равенство (в виде $x = a$) или имя переменной (например x), n - необязательный параметр, указывающий на порядок разложения и представленный целым положительным числом (при отсутствии указания порядка он принимается равным по умолчанию 6). Если eq/nm задается в виде $x = a$, то разложение производится относительно точки $x = a$. Если eq/nm указывается просто в виде имени переменной, то производится вычисление ряда и многочлена Маклорена.

Пример 4. Найти многочлен Тейлора 9-ой степени экспоненциальной функции e^x в начале координат.
$> p9 := taylor(exp(x), x = 0, 10);$
Получается следующий результат для формулы Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \\ + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

и находим сам многочлен Тейлора по следующей процедуре преобразования результата в многочлен
$> p9 := convert(p9, polynom);$

В результате имеем многочлен Тейлора

$$p_9(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 \\ + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9.$$

Многочлены Тейлора дают наиболее точную аппроксимацию приближаемой функции вблизи точки x_0. По мере удаления от точки x_0 погрешность возрастает. Для приближения приходится использовать многочлены Тейлора более высокой степени, но иногда и они не помогают в связи с накоплением вычислительной погрешности.

Интересно проследить этот процесс графически. Пакет Maple предоставляет такую возможность с помощью команды plot.

Пример 5. Найти число e с точностью до 0.001. Положим $x = 1$. Тогда чтобы вычислить значение e нам надо выполнить команду
$> eval(p9, x = 1);$

Получаем 98641/36288 и далее
$> evalf(98641/36288);$
дает результат 2.718281526.

Интересно провести вычисления и сравнить результаты, получающиеся для числа e при различных степенях используемого многочлена Тейлора. Получаются следующие результаты:
$k = 1, e_1 = 1, k = 2, e_2 = 2, k = 3, e_3 = 2.5, k = 4, e_4 = 2.666666667, k = 5, e_5 = 2.708333333, k = 6, e_6 = 2.716666667, e_7 = 2.718055556, k = 8, e_8 = 2.718253968, k = 9, e_9 = 2.718281526, e_{10} = 2.718281801.$

Отсюда видно, что число e с точностью 0.001 вычисляется, начиная с многочлена Тейлора 7-ой степени. Также следует, что число e с точностью 0.000001 или что то же самое 10^{-6} вычисляется, начиная с многочлена Тейлора 9-ой степени.

Наряду с командой $taylor$ для разложения функций и выражений в ряды используется команда $series$. Результатом выполнения команды $series$ может быть построение ее ряда Тейлора, асимптотического ряда или же некоторого обобщенного ряда, даже если ее ряд Тейлора не существует.

Для разложения в ряд Тейлора функции нескольких переменных используется команда $mtaylor$.

Пример 6. Найти многочлен Тейлора 6-ой степени от функции $\frac{x}{1+x}$.

Делаем следующую команду MAPLE.
$> h := x/(1 + x);$

Получаем
$h := \frac{x}{1+x}$.
Далее находим формулу Тейлора командой
$> taylor(h, x, 6);$

$$h(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + O(x^6)$$

и многочлен Тейлора командой

$> h := convert(h, polynom);$
$h_6(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5.$

Пример 7. Найти разложение функции $arccos(x)$ в ряд Маклорена.

Выполняем команду
$> taylor(arccos(x), x, 12);$

Получаем результат
$arccos(x) = -\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 - \frac{63}{2816}x^{11} + O(x^{12}).$

Пример 8. Найти разложение функции $exp(x)+1$ по формуле Тейлора $4-$ ой степени в окрестности точки $x = 2$.

Выполняем команду
$> taylor(exp(x) + 1, x = 2, 5);$

Получаем результат

$$(e^2+1) + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x-2)^4 + O((x-2)^5).$$

Пример 9.Найти разложение гиперболического косинуса в ряд Маклорена $8-$ ой степени.

$> taylor(cosh(x), x, 10);$

Получаем
$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + O(x^{10}).$

Заметим, что у аналитических функций их разложения в ряд Тейлора существуют всегда. Приведем пример функции, не имеющей разложения в ряд Тейлора и для которой команда *taylor* не дает результат: $f(x) = 1/x^2 + x.$
$> taylor(1/x^2 + x, x, 7);$

В ответ на выполнение этой команды MAPLE дает ответ:

Error, does not have a taylor expansion, try series(),
что значит "Ошибка, разложение Тейлора не существует, используйте команду series()". В результате выполнения команды
$> series(1/x^2 + x, x, 7);$
получаем исходное выражение $x^{-2} + x$. В то же время в окрестности других точек, например точки $x = 2$, формула Тейлора вычисляется
$> taylor(1/x^2 + x, x = 2, 7);$
$\frac{9}{4} + \frac{3}{4}(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \frac{5}{64}(x-2)^4 - \frac{3}{64}(x-2)^5 + \frac{7}{256}(x-2)^6 + O((x-2)^7)$.

Пакет Maple дает возможность как нахождения разложений математических функций в ряды Тейлора, так и графической интерпретации точности этих разложений. Подобная графическая визуализация помогает пониманию сходимости многочленов Тейлора к самой приближаемой функции.

Рассмотрим примеры такой графической визуализации для функции $cos(x)$. Сравним графики самой функции $cos(x)$ с графиками ее разложений Тейлора различных степеней.

Пример 10. Сравним функцию $cos(x)$ с ее разложением Маклорена 5-ой степени на интервале $[-4, 4]$.
$> appr := taylor(cos(x), x = 0, 5);$
$appr := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$
$> polyn := convert(appr, polynom);$
$polyn := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$> plot(cos(x), polyn, x = -4..4, color = black);$

$cos(x)$ и его разложение в ряд Маклорена 5-ой степени

Легко заметить, что при небольших значениях x графики самой функции и приближающего ее разложения практически совпадают, однако при возрастании x начинают отличаться.

Пример 11. Сравним функцию $cos(x)$ с ее разложением Маклорена 9-ой степени на интервале $[-4, 4]$.
$> appr := taylor(cos(x), x = 0, 9);$
$appr := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + O(x^{10})$
$> polyn := convert(appr, polynom);$

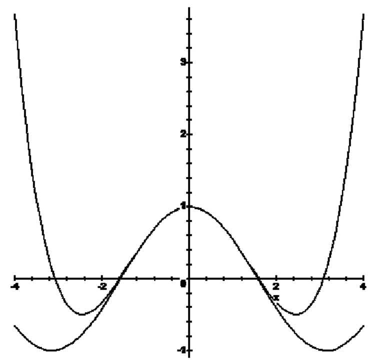

Рис. 1. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Маклорена 5-ого порядка

$polyn := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8$
$> plot(cos(x), polyn, x = -4..4, color = black);$

$cos(x)$ и его разложение в ряд Маклорена 9-ой степени

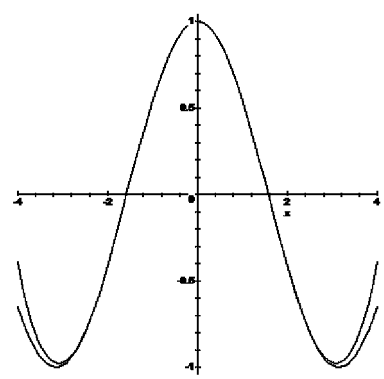

Рис. 2. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Маклорена 9-ого порядка.

Пример показывает, что при использовании разложения Тейлора более высокой степени точность приближения возрастает и удается достичь удовлетворительного приближения на более широком интервале.

Однако заметим, что степень разложения Тейлора нельзя повышать неограниченно в связи с накапливанием вычислительной погрешности.

Пример 12. Сравним функцию $cos(x)$ и ее разложение Тейлора 9-ой степени относительно точки $x = 1$.
$y(x) := convert(taylor(cos(x), x = 1, 9), polynom);$

$$y(x) := cos(1) - sin(1)(x-1) - \frac{1}{2}cos(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}sin(1)(x-1)^3 + \\ + \frac{1}{24}cos(1)(x-1)^4 - \frac{1}{120}sin(1)(x-1)^5 - \frac{1}{720}cos(1)(x-1)^6 + \\ + \frac{1}{5040}sin(1)(x-1)^7 + \frac{1}{40320}cos(1)(x-1)^8$$

$> plot(y(x), cos(x), x = -4..4, color = black);$

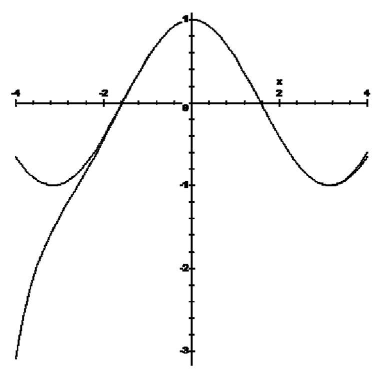

Рис. 3. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Тейлора 9-ой степени относительно точки $x = 1$

Данный пример показывает вид разложений Тейлора относительно ненулевых точек в их окрестностях.

При работе над подготовкой настоящих методических указаний использовалась следующая учебная и математическая литература общей направленности, рекомендуемая и для дальнейшей самостоятельной работы.

Литература

1. Л.Д.Кудрявцев *Математический анализ*, М., Высшая школа, 1981.-Т.I,II.
2. И.И.Баврин *Высшая математика*, М., Академия,2002.
3. Д.Т.Письменный *Конспект лекций по высшей математике*, М., Айрис Пресс, 2002.-ч.1,2.
4. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова *Высшая математика в упражнениях и задачах*, М., Оникс, 2002.-ч.1,2.
5. А.В.Ефимов и др. *Сборник задач по математике*, М., Физматлит, 2002.
6. К.Н.Лунгу и др. *Сборник задач по высшей математике*, М., Айрис Пресс, 2001.
7. А.В.Матросов *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*, Санкт-Петербург, BHV, 2001.
8. В.П.Дьяконов *Maple 7. Учебный курс*, Санкт-Петербург, Питер, 2002.
9. А.Н.Васильев *Maple 8. Самоучитель*, М., Диалектика, 2003.
10. И.Е.Ануфриев *MatLab 5.3/6.X. Самоучитель*, Санкт-Петербург, BHV, 2002.
11. О.Ю.Агарева, Е.В.Введенская, К.Ю.Осипенко *Maple в курсе математического анализа. Методические указания к практическим занятиям по теме: "Предел функции. Непрерывность."*, М., МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 1999.
12. О.Ю.Агарева, Е.В.Введенская, К.Ю.Осипенко *Maple в курсе математического анализа. Методические указания к практическим занятиям по теме: "Дифференцирование функций."*, М., МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 1999.
13.http://www.Exponenta.ru .
14.http://www.maplesoft.com .

Оглавление