Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Методические указания и варианты индивидуальных заданий

Составители: доцент Селиванов Ю. В.
ассистент Яновская Е. В.

Москва 2001 г.

Введение

Данное пособие входит в серию методических разработок кафедры, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики. Оно предназначено для преподавателей и студентов МАТИ. В пособии рассмотрены следующие вопросы теории функций нескольких переменных: функции от двух или n переменных, область определения, геометрическое толкование, частные производные и дифференцирование сложных функций, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениям. Пособие предназначено главным образом для использования во время практических занятий по математическому анализу и в качестве задачника для самостоятельной работы и курсовых (контрольных) работ для студентов дневного и вечернего отделений всех факультетов. Каждая курсовая работа содержит теоретические вопросы и расчетную часть - задачи. Теоретические вопросы являются общими для всех студентов, задачи - для каждого студента группы индивидуальные.

В первом разделе приведены некоторые основные понятия и определения, а также расчетные формулы и примеры решения задач по указанным темам, во втором разделе помещены теоретические вопросы, в третьем разделе – варианты задач по темам пособия. Каждая задача расчетного задания включает 30 вариантов. Среди задач – отыскание области определения функции двух переменных, вычисление частных производных, дифференцирование сложных и неявных функций, применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Работа частично поддержана федеральной программой “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки” (проект № 480).

1. Основные определения, расчетные формулы и разбор примеров

1.1. Понятие функции нескольких переменных

Произвольный упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и называется точкой n-мерного арифметического пространства R^n; сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $D \subseteq R^n$ - произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество D называется областью определения функции $f(M)$.

В частном случае, когда $n = 2$, функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости xOy в трехмерном пространстве с фиксированной декартовой системой координат. Графиком этой функции называется множество точек пространства

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in R^3 : z = f(x, y)\},$$

представляющее собой некоторую поверхность в R^3.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \arccos(x^2 + y^2)$.

Решение. Функция определена при $x^2+y^2 \le 1$. Следовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат.

1.2. Частные производные

Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Придавая значению переменной x приращение Δx, рассмотрим предел (при $\Delta x \to 0$)

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется частной производной (первого порядка) данной функции по переменной x в точке (x, y) и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $f_x^{/}(x, y)$. Точно так же определяется частная производная этой функции по переменной y и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или $f_y^{/}(x, y)$.

Частные производные вычисляются по обычным формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме одной рассматриваются как постоянные.

Пример 2. Найти частные производные функции $z = \arccos\dfrac{x}{y}$ $(y > 0)$.

Решение. Считая величину y постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Считая величину x постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y}\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных x и y. Частными производными второго порядка функции $f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}^{//}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}^{//};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}^{//}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}^{//}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема.

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Пример 3. Найти частную производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ от функции $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = e^x(\cos y - \sin y + x\cos y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)'_x = e^x(2\cos y - \sin y + x\cos y).$$

1.3. Полный дифференциал и его применение

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Геометрически полное приращение Δz равно приращению аппликаты графика функции $f(x, y)$ при переходе от точки $M(x, y)$ в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y), если ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(r),$$

где $r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, а $o(r)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем r. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в данной точке, то ее полным дифференциалом называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно Δx и Δy, т. е.

$$dz = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных, по определению, равны их приращениям $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Для дифференциала функции $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Заменяя приближенно приращение функции ее дифференциалом (в предположении достаточной малости значений Δx и Δy), получим

$$\Delta z \approx dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Отсюда имеем

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz = f(x,y) + f_x^{/}(x,y)dx + f_y^{/}(x,y)dy.$$

Все изложенное распространяется на функции трех и более переменных.

Пример 4. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1{,}003} + \sqrt[4]{0{,}998} - 1)$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ при $x = x_0 + \Delta x,\ \ y = y_0 + \Delta y,$ если $x_0 = 1,\ \ y_0 = 1,\ \ \Delta x = 0{,}003,\ \ \Delta y = -0{,}002.$ Применяя формулу

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x^{/}(x_0, y_0)dx + f_y^{/}(x_0, y_0)dy,$$

получаем

$$f(x_0, y_0) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0,$$

$$f_x^{/}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3},$$

$$f_y^{/}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1^3}} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}003 + \frac{1}{4} \cdot (-0{,}002) = 0{,}0005.$$

1.4. Дифференцирование сложных функций

Случай одной независимой переменной

Пусть $z = f(x,y)$ есть дифференцируемая функция двух переменных x и y, причем аргументы этой функции сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t: $x = j(t)$ и $y = y(t)$. Тогда сложная функция $z = f(j(t), y(t))$ дифференцируема, и ее производная $\frac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $z = f(x,y)$, где $y = j(x)$. Тогда $z = f(x, j(x))$, т. е. функция z есть функция одной переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, где роль переменной t играет x. “Полная” производная функции z по x равна

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy}.$$

Пример 5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x+5y}$, где $x = \sin t,\ \ y = t^3$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+5y},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 5e^{2x+5y},\ \ \frac{dx}{dt} = \cos t,\ \ \frac{dy}{dt} = 3t^2;$

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2x+5y} \cdot \cos t + 5e^{2x+5y} \cdot 3t^2 = e^{2\sin t + 5t^3}(2\cos t + 15t^2).$$

Пример 6. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{3xy}$, а $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot e^{3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3xy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$,

$$\frac{dz}{dx} = 3y \cdot e^{3xy} + 3x \cdot e^{3xy} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 3e^{3x\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{(2x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Случай нескольких независимых переменных

Предположим теперь, что $z = f(x, y)$, где $x = j(u,v)$ и $y = y(u,v)$. Тогда z есть сложная функция двух независимых переменных u и v. Частные производные этой сложной функции находят по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Эти формулы обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов. Во всех случаях справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

(свойство инвариантности формы полного дифференциала).

Пример 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = y^x$, $x = \frac{u}{v}$, $y = u \cdot v$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \cdot \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y^{x-1},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = y^x \cdot \ln y \cdot \frac{1}{v} + x \cdot y^{x-1} \cdot v = \frac{(1 + \ln(uv))}{v} \cdot (uv)^{\frac{u}{v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = y^x \cdot \ln y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + x \cdot y^{x-1} \cdot u = \frac{u \cdot (1 - \ln(uv))}{v^2} \cdot (uv)^{\frac{u}{v}}.$$

1.5. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть F - дифференцируемая функция трех переменных x, y и z, и пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как функцию независимых переменных x и y. Частные производные этой неявной функции $z = z(x, y)$ в точке (x, y) вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^/(x,y,z)}{F_z^/(x,y,z)} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y^/(x,y,z)}{F_z^/(x,y,z)}$$

при условии, что $F_z^/(x,y,z) \neq 0$, где $z = z(x,y)$ и $F(x,y,z) = 0$.

Пример 8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если z определяется, как функция от x и y, из уравнения

$$z^3 - 4xy^2 - 2z^2 + 1 = 0.$$

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y,z)$. Тогда

$$F_x^/(x,y,z) = -4y^2,$$

$$F_y^/(x,y,z) = -8xy,$$

$$F_z^/(x,y,z) = 3z^2 - 4z.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^/(x,y,z)}{F_z^/(x,y,z)} = \frac{4y^2}{3z^2 - 4z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y^/(x,y,z)}{F_z^/(x,y,z)} = \frac{8xy}{3z^2 - 4z}.$$

2. Теоретические вопросы

1. Понятие функции двух переменных $z = f(x,y)$. Геометрическое истолкование. Область определения.
2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
3. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области.
4. Определение и геометрический смысл частных производных.
5. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
6. Дифференцирование сложной функции $z = f(x,y)$, где $x = j(t)$, $y = y(t)$.
7. Понятие полной производной.
8. Дифференцирование сложной функции $z = f(x,y)$, где $x = j(u,v)$, $y = y(u,v)$.
9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, определяемой графиком функции двух переменных.
10. Определение и геометрический смысл полного дифференциала функции $z = f(x,y)$.
11. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Свойства дифференцируемой функции: непрерывность, существование частных производных.
12. Достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных.
13. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
14. Инвариантность формы и другие свойства полного дифференциала.
15. Дифференциалы высших порядков.
16. Формула Тейлора для функции двух переменных.
17. Неявные функции и их дифференцирование.
18. Уравнение касательной к кривой, задаваемой неявной функцией.
19. Определение точек экстремума функции $z = f(x,y)$. Необходимые и достаточные условия экстремума.

3. Варианты индивидуальных заданий

Задача 1

Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

1.1. $z=\sqrt{\ln(x+y)}$.

1.2. $z=\ln\dfrac{x^2}{x+y}$.

1.3. $z=\ln\dfrac{\cos x}{y}$.

1.4. $z=\ln\dfrac{x-3}{y-5}$.

1.5. $z=\ln(y-\sin x)$.

1.6. $z=\log_y(x^2+y^2-9)$.

1.7. $z=\dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

1.8. $z=\sqrt{\ln xy}$.

1.9. $z=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

1.10. $z=\ln(-x-y)$.

1.11. $z=\ln x+\ln\sin y$.

1.12. $z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

1.13. $z=\dfrac{1}{x}+\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

1.14. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

1.15. $z=\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

1.16. $z=\dfrac{1}{|x|}\sqrt{y^2-x}$.

1.17. $z=(x+\sqrt{y})\cdot\ln(y^2-x^2)$.

1.18. $z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}\cdot\ln y$.

1.19. $z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$.

1.20. $z=\dfrac{\sqrt{\cos x-y}}{\sqrt{y}}$.

1.21. $z=\arcsin(x+y)+\sqrt{9-x^2-y^2}$.

1.22. $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y^2)$.

1.23. $z=\sqrt{x^2+y^2-2x}-\sqrt{4-x^2-y^2}$.

1.24. $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}+\arcsin(x-y)$.

1.25. $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}+\arccos(1-x)$.

1.26. $z=\sqrt{\sin x\cdot\cos y}$.

1.27. $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin y}$.

1.28. $z=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$.

1.29. $z=\dfrac{1}{\sqrt{(y^2-1)(x+1)}}$.

1.30. $z=\sqrt{\ln x\cdot\ln y}$.

Задача 2

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z=z(x,y)$.

2.1. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

2.2. $z=\ln(\sqrt{x}+y^2)$.

2.3. $z=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y^3)$.

2.4. $z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$.

2.5. $z = xy^2 \cdot \ln(x^2 + y)$.

2.6. $z = \ln(x^5 + \ln y)$.

2.7. $z = (1 + \log_y x)^3$.

2.8. $z = \ln(\sin x + \cos y)$.

2.9. $z = \ln\left(\sqrt[3]{y} - \sin x\right)$.

2.10. $z = \ln\left(x\sqrt{y} + \dfrac{y}{2x}\right)$.

2.11. $z = \dfrac{(x-2y)^2}{x+2y}$.

2.12. $z = e^{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$.

2.13. $z = (x\sin y + y\cos x)^2$.

2.14. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x^2}}$.

2.15. $z = \dfrac{\arcsin(x+y)}{\cos(xy)}$.

2.16. $z = \sqrt[3]{\ln(x^2 y)}$.

2.17. $z = \cos\dfrac{x+y}{x-y}$.

2.18. $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.19. $z = -\ln\left(\cos\dfrac{y}{x}\right)$.

2.20. $z = (\sin x)^{\cos y}$.

2.21. $z = x \cdot \sin(\sqrt{x} + y^2)$.

2.22. $z = arctg\sqrt{x^y}$.

2.23. $z = \dfrac{\cos x^2}{x+y}$.

2.24. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.25. $z = \cos\dfrac{x}{y} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

2.26. $z = arctg\dfrac{xy}{1+x^2}$.

2.27. $z = e^{\frac{y}{x^2-y^2}}$.

2.28. $z = \arccos\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$.

2.29. $z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2.30. $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$.

Задача 3

Вычислить производные сложных функций.

3.1. $z = x\sin y + y\cos x$, где $x = \dfrac{u}{v}$, $y = u^3 v^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.2. $z = e^{4xy}$, где $x = \cos(1-t)$, $y = \sin t^2$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.3. $z = x^2 - y^2 + 2xy$, где $x = \sin t$, $y = \arccos(e^t)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.4. $z = \left(x + y^3\right) \cdot e^{x^2+y^2}$, где $x = \cos(t^2)$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.5. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, где $x = \sin t$, $y = \cos^2\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.6. $z = tg(x + 2x^2 - y)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.7. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $x = v - u^2 v$, $y = u + v^2 u$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.8. $z = arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $y = \sqrt{x^2+1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx} = ?$

3.9. $z = \dfrac{4y}{\sqrt{y^2 - x}}$, где $x = t\cdot\cos t$, $y = t\cdot\sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.10. $z = \arcsin(x-y)$, где $x = \ln(\sqrt{t}+1)$, $y = 4t^3$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.11. $z = arctg\,\dfrac{x+y}{1+xy}$, где $x = t^2+1$, $y = \sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.12. $z = \ln(\sqrt{x}\cdot\ln y)$, где $x = \sin t$, $y = \arccos(t^5)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.13. $z = \ln(e^{2x} + e^{6y})$, где $y = x\sqrt{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx} = ?$

3.14. $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$, где $x = tg^2 t$, $y = ctg^3\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.15. $z = \ln(x^2 y)$, где $x = u^v$, $y = v^u$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.16. $z = x^3\sin y + y^3\cos x$, где $x = 3t^2 - \sqrt{t}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.17. $z = \dfrac{x+2y}{xy}$, где $x = tg(t^2+1)$, $y = ctg(t^4-1)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.18. $z = xy^2 + \dfrac{x}{y}$, где $x = \ln(t^2+t)$, $y = 10^t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.19. $z = \ln(x^2+y^2) - x\sqrt{x}$, где $x = \sin t$, $y = \dfrac{t}{t+1}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.20. $z = \dfrac{x-2y}{x+2y}$, где $x = \dfrac{u-v}{u}$, $y = \dfrac{v}{u+v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.21. $z = \dfrac{x+y}{1-xy}$, где $x = \dfrac{t}{\sin t}$, $y = \dfrac{t}{\cos t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.22. $z = \sqrt{xy + \sin x}$, где $x = tg(3t^2+t)$, $y = ctg(2t+1)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.23. $z = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$, где $x = tg(e^t+1)$, $y = ctg\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.24. $z = x^{\ln y}$, где $x = \sin(uv)$, $y = \cos(v^2-u)$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.25. $z = \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 y}$, где $x = \ln t$, $y = te^t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.26. $z = \ln x - \dfrac{y^2}{x}$, где $x = \sin t^2$, $y = \cos t^2$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.27. $z = \arccos(xy^2)$, где $x = t^2\ln t$, $y = te^t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.28. $z = \cos\left(y^{\sin x}\right)$, где $x = t^3$, $y = 2^t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.29. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$, где $x = p^{\ln t}$, $y = \ln^p t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.30. $z=\dfrac{x^2+2y^3}{x+2y}$, где $x=\dfrac{u+v^2}{u}$, $y=\dfrac{v^2}{u+v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

Задача 4

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции.

4.1. $\ln(z^2+xy)=e^{x^2+y^2+z^2}$.

4.2. $2x^3-5x+z^3+y^3-3xyz+8=0$.

4.3. $\dfrac{tg(z+1)}{tg(y-2)}=\dfrac{y-x}{z+1}$.

4.4. $y\cdot e^{x-zy}=\cos(zx)$.

4.5. $x\sin y+y\sin x+z\sin x-8=0$.

4.6. $xe^y+ye^x+ze^x=2$.

4.7. $3xz-4yz+z^2-9=0$.

4.8. $z^2-z-8xz+2x^2+2y^2+8=0$.

4.9. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot tg\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

4.10. $tg(x+z)=e^z y.$

4.11. $x^2+y^2+z^2-3xyz=xy^2z^3$.

4.12. $x^2+2y^2+3z^2+xy-z+\sin(xy)-9=0$.

4.13. $\ln(xy+z)=z^2-y$.

4.14. $e^{\frac{x}{y}}\cdot\sin\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{xz}$.

4.15. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

4.16. $z=x+arctg\dfrac{y}{z-x}$.

4.17. $\ln z=yz+x^2-1$.

4.18. $e^{\frac{z}{x}}-\arcsin\dfrac{z}{y}=0$.

4.19. $yz^2+xz+xy=1$.

4.20. $e^{\frac{z}{x}}\cdot\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{y}$.

4.21. $tg^2z+\sin x+\cos y-e^x=0$.

4.22. $y^2+x^2z-4yz^3-1=0$.

4.23. $ze^z-x\cdot\ln y=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

4.24. $z^3+5xy^3+4yz^2-x^3-6=0$.

4.25. $\dfrac{z}{x}-\ln\dfrac{z}{y+2}=0$.

4.26. $z^3+3x^2z-2xy=0$.

4.27. $e^{xz}\cos(yz)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

4.28. $\dfrac{\sin x}{\sin z}=\dfrac{z}{y}$.

4.29. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

4.30. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-3y+3=0$.

Задача 5

Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала.

5.1. $(1{,}001)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{0{,}98}}$.

5.2. $0{,}97^{2{,}02}$.

5.3. $\ln\left(0{,}01+\sqrt{(0{,}01)^2+(1{,}02)^2}\right)$.

5.4. $1{,}002\cdot 2{,}003^2$.

5.5. $3{,}004^3\cdot 0{,}001$.

5.6. $\sin 29^\circ\cdot tg\,46^\circ$.

5.7. $\sqrt[3]{0{,}97\cdot\sqrt[4]{(1{,}05)^3}}$.

5.8. $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

5.9. $\sqrt{(6{,}03)^2+(8{,}04)^2}$.

5.10. $(3{,}001)^2\cdot\sqrt[3]{1{,}002}$.

5.11.. $\ln[(0{,}09)^3+(0{,}99)^3]$.

5.12. $\ln\left(\sqrt{4{,}004}+\sqrt[3]{1{,}006}-2\right)$.

5.13. $(2{,}009)^3\cdot(2{,}007)^2$.

5.14. $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98}}$.

5.15. $\sqrt{1{,}004}\cdot\sqrt[3]{0{,}097}$.

5.16. $(2{,}003)^2\cdot(3{,}004)^3$.

5.17. $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}03)^2}$.

5.18. $(1{,}003)^{2{,}07}$.

5.19. $\sqrt{(2{,}03)^2+5\cdot e^{0{,}02}}$.

5.20. $\sqrt{(1{,}04)^2+\ln(1{,}02)}$.

5.21. $(1{,}02)^{2{,}001}$.

5.22. $e^{0{,}01}\cdot(2{,}01)^2$.

5.23. $arctg\,\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$.

5.24. $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$.

5.25. $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

5.26. $\sin 32°\cdot\cos 59°$.

5.27. $(1{,}02)^{4{,}05}$.

5.28. $(0{,}95)^{2{,}01}$.

5.29. $1{,}96^2\cdot e^{0{,}08}$.

5.30. $\sqrt{(1{,}02)^3+(0{,}001)^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Наука, 1985.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1988.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.., Высшая школа, 1980.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. М., Наука, 1976.
5. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М., Наука, 1993.