Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания к проведению практических занятий

Составители: доц. Селиванов Ю. В.
ст. преп. Выск Н. Д.

Москва 2001 г.

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для оказания помощи преподавателям в проведении практических занятий по высшей математике и для унификации требований, предъявляемым к студентам. Оно содержит методические указания к проведению занятий по теории вероятностей и математическая статистике. Количество и темы занятий соответствуют утвержденной программе. В пособии приведены варианты контрольной работы “Элементарная теория вероятностей”, а также задание для курсовой работы “Статистическая обработка результатов измерений”.

Работа частично поддержана федеральной программой “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки” (проект № 480).

ЗАНЯТИЕ 1

Алгебра случайных событий. Классическое определение вероятности. Простейшие свойства вероятности. Элементы комбинаторики

Предложить студентам в качестве основного рекомендуемого задачника “Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике” (Гмурман В. Е., “Высшая школа”, М, 1975).

Напомнить понятия *события*, *вероятности* события, *несовместных* и *равновероятных* событий, *достоверного* и *невозможного* событий, *полной группы* событий, а также понятия *суммы*, *произведения*, *разности* событий, *противоположного* события. Проиллюстрировать эти понятия на простейших примерах (например, рассмотреть ситуацию бросания игральной кости или геометрическую ситуацию: бросание точки на плоскость). Разобрать со студентами одну или две задачи на поле событий, например:

ЗАДАЧА 1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что он - юноша. Событие B в том, что он не курит, а событие C в том, что он живет в общежитии.

1. Описать событие $AB\overline{C}$.
2. При каком условии будет иметь место тождество $ABC = A$?
3. Когда будет справедливо соотношение $\overline{C} \subseteq B$?
4. Когда будет верно равенство $\overline{A} = B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

ЗАДАЧА 2. Пусть A, B, C - три произвольно выбранных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C:

а) произошло только A;
б) произошли A и B, но C не произошло;
в) все три события произошли;
г) произошло хотя бы одно из этих событий;
д) произошло хотя бы два события;
е) произошло одно и только одно из этих событий;
ж) произошло два и только два события;
з) ни одно из событий не произошло;
и) произошло не более двух событий.

Рассмотреть множество из n *элементарных исходов* (образующих полную группу равновероятных событий), m из которых *благоприятствуют* событию A. Дать *классическое определение* вероятности по формуле $P(A) = \dfrac{m}{n}$ и сформулировать свойства вероятности.

Разобрать со студентами несколько задач на классическое определение вероятности, например:

ЗАДАЧА 3. В коробке лежат внешне одинаковые конфеты, из которых a штук с шоколадной начинкой, а b - с фруктовой. Из коробки вынута одна конфета. Найти вероятность того, что она с шоколадной начинкой.

ЗАДАЧА 4. Какова вероятность того, что наудачу взятую кость домино можно приставить к данной: $(2;5)$?

ЗАДАЧА 5. Пусть на кону лежит карта - валет треф, а козыри пики. Найти вероятность того, что наудачу взятой из колоды картой карта, лежащая на кону, будет бита.

Задачи 4, 5, 8, 22 из задачника.

Обратить внимание студентов на то, что решение задач на классическое определение вероятности необходимо начинать с описания *пространства элементарных исходов* и выяснения того, что является в данной задаче *испытанием*, а что - результатом испытания (*элементарным исходом*). Отметим, что при изучении теории вероятностей студентам приходится осваивать достаточно много новых для них понятий и ответы на указанные выше “простые” вопросы вначале вызывают у них большие затруднения. Поэтому преподаватель должен терпеливо раскрывать смысл этих понятий в каждой задаче, дав вначале возможность студентам попробовать сделать это самим. Полезно рассмотреть следующие задачи:

ЗАДАЧА 6. Некто купил два лотерейных билета. Каковы вероятности того, что выиграют 0, 1 или 2 билета?

Объяснить, что в этой задаче указанные три события не образуют пространство элементарных исходов и вероятности этих событий не равны $\frac{1}{3}$ (здесь пространство элементарных исходов большое, оно определяется всем тиражом выигрышей).

ЗАДАЧА 7. Одновременно бросаются две монеты. Найти вероятность того, что выпадет два “герба”, “герб” и надпись, две надписи.

Пояснить, что вероятности этих событий тоже не равны $\frac{1}{3}$, поскольку, хотя они и образуют полную группу событий, но не являются равновероятными.

Написать формулы для *числа размещений*, *сочетаний* и *перестановок* из комбинаторики. Выполнить несколько примеров на эти формулы:

ЗАДАЧА 8. Сколькими способами можно расставить в одну шеренгу 6 человек?

ЗАДАЧА 9. Каждая кость домино помечается двумя числами. Кости симметричны, так что числа в парах не упорядочены. Сколько различных костей можно образовать, используя числа $1, 2, \ldots, n$?

ЗАДАЧА 10. Числа 1, 2, $\ldots, n$ расположены в случайном порядке. Найти вероятность того, что числа:

а) 1 и 2, б) 1, 2 и 3 расположены рядом в указанном порядке.

ЗАДАЧА 11. Найти вероятность того, что из трех случайно выбранных цифр ровно две (одна, ноль) будут повторяться.

Примерное домашнее задание: №№ 1, 6, 7, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25 из задачника.

ЗАНЯТИЕ 2
Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей

Проверить выполнение студентами домашнего задания и разобрать у доски вместе с одним из студентов задачи, вызвавшие наибольшие затруднения.

Объяснить недостаток классического определения вероятности, которое неприменимо к испытаниям с бесконечным числом элементарных исходов, и напомнить *геометрическое определение* вероятности. При определении вероятности попадания точки в область рассмотреть несколько случаев выбора области: отрезок, плоская фигура, пространственная фигура. Проиллюстрировать формулы геометрической вероятности на примерах (задачи 26, 28). Предложить студентам самостоятельно решить задачи 27, 29, 30. Давать указания по ходу решения, а затем вместе с одним из студентов разобрать каждую задачу у доски. После этого разобрать у доски решение задачи 35.

Сформулировать *теоремы сложения вероятностей несовместных* и *совместных событий* и *теорему умножения вероятностей независимых событий.* Обратить внимание студентов на тот факт, что последняя теорема может служить определением независимости событий. Проиллюстрировать указанные теоремы на примере задачи 7 из задачника. Разобрать со студентами решение задачи 46. Предложить для самостоятельного решения задачи 51, 52, 55, 61. Проверить их выполнение. Разобрать у доски задачи, вызвавшие наибольшие трудности.

Примерное домашнее задание: №№ 32, 34, 37, 39, 42, 44, 47, 50, 54, 56, 58, 59.

ЗАНЯТИЕ 3
Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Напомнить формулу

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$

условной вероятности события A при условии B. Напомнить *теорему умножения вероятностей*, а также условие независимости событий: $P(A\mid B)=P(A).$ Рассмотреть со студентами задачи на условную вероятность:

ЗАДАЧА 1. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

ЗАДАЧА 2. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно занята она другим читателем или нет. Что более вероятно - достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

Предложить студентам решить самостоятельно какие-нибудь из задач 65, 67, 68. Проверить выполнение.

Напомнить *формулу полной вероятности*. Решить модельную задачу на эту тему:

ЗАДАЧА 3. Пусть имеются 3 урны с белыми и черными шарами. В первой урне содержатся 3 черных и 2 белых шара, во второй - 2 черных и 2 белых, а в третьей - 5 черных и 4 белых. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу выбирается шар. Найти вероятность того, что выбранный шар - белый.

Предложить студентам самостоятельно решить задачи 93, 95. Давать указания по ходу решения, а затем вместе с одним из студентов разобрать каждую задачу у доски.

Обратить внимание студентов на необходимость правильного выбора событий в качестве гипотез. Гипотезы должны составлять полную группу событий и относится к одному и тому же испытанию. Все события должны быть конкретны. Нельзя, например, в задаче 95 рассматривать событие A - “выбран белый шар”, не уточняя при каком испытании (т. е. из какой урны).

Примерное домашнее задание: №№ 66, 70, 71, 81, 82, 87, 91, 92, 94, 96.

ЗАНЯТИЕ 4
Формула Байеса. Формулы Бернулли и Пуассона

Проверить домашнее задание, ответить на вопросы студентов и разобрать задачи, вызвавшие наибольшие затруднения.

Напомнить *формулу Байеса*. Объяснить, что она применяется для переоценки вероятностей гипотез в предположении, что некоторое событие A произошло. Решить модельную задачу на формулу Байеса:

ЗАДАЧА 1. Пусть имеются 3 урны с белыми и черными шарами. В первой урне содержатся 3 черных и 3 белых шара, во второй - 4 черных и 1 белый, в третьей - 2 черных и 5 белых. Наудачу выбрана урна и из нее наудачу выбран шар. Этот шар оказался черным. Какова вероятность того, что была выбрана третья урна?

Предложить студентам для самостоятельного решения задачи 98, 99, 100. Проверить выполнение.

Объяснить схему независимых повторных испытаний (*схему Бернулли*). Напомнить формулу вероятности появления события A ровно m раз в n опытах (*формулу Бернулли*). Разобрать пример типа:

ЗАДАЧА 2. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет три раза.

Преподавателю полезно учесть, что студенты иногда дают неверный ответ: $\frac{3}{8}$.

Далее можно решить со студентами еще две задачи: №№ 112, 113.

После этого напомнить *формулу Пуассона* как предел формулы Бернулли, напомнив условия ее практического использования. Предложить для решения задачи 176, 177.

Примерное домашнее задание: №№ 101, 102, 106, 111, 115, 116, 117, 178, 180.

ЗАНЯТИЕ 5
Контрольная работа

На этом занятии рекомендуется провести контрольную работу по пройденному материалу. Тема контрольной работы “Элементарная теория вероятностей”. Дадим примерные варианты.

ВАРИАНТ 1.

1. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

2. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$в полученной выборке все карты бубновой масти$\}$, $B = \{$в полученной выборке окажется хотя бы один туз$\}$.

3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при четырех выстрелах равна 0,9919. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

4. По каналу связи передается одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$ или $CCCC$, вероятности которых равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,3. Буква принимается правильно с вероятностью 0,6; вероятность ее приема за другую - 0,2 и 0,2 (буквы искажаются независимо друг от друга). Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если получено $ABCA$.

5. Отрезок AB, длина которого 60 см, разделен точкой C в отношении 3:1. На этот отрезок наудачу брошены пять точек. Найти вероятность того, что три из них окажутся левее точки C и две - правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

6. Найти вероятность того, что в 10 испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха 0,4 появятся 6 успехов, причем 3 из них в трех последних испытаниях.

ВАРИАНТ 2.

1. Множество E содержит 11 первых букв русского алфавита. Сколько различных алфавитов из трех букв можно составить из данного множества букв? Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву a?

2. В лотерее выпущено n билетов, из которых m выигрышные. Куплено k билетов. Найти вероятность того, что из k билетов хотя бы один выигрышный.

3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,46. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,6.

4. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

5. На отрезке $[0,5]$ наудачу поставлены две точки, разбившие его на три отрезка. Найти вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник.

6. В урне 18 белых и 9 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых.

ВАРИАНТ 3.

1. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные 2 человека не могут быть выбраны вместе?

2. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что будет получен следующий состав: валет, дама и два короля.

3. Вероятность того, что наудачу названный студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен - 0,8 и третий - 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен, считая экзамены независимыми друг от друга.

4. В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй - 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую переложили два шара, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар - белый.

5. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

6. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей - три девочки и два мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

ВАРИАНТ 4.

1. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

2. В лотерее выпущено n билетов, из которых m выигрышные. Куплено k билетов. Найти вероятность того, что из k билетов ровно один выигрышный.

3. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором - 2 белых, 6 красных, 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

4. Производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два снаряда, - с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n_1 выстрелах горючее воспламенится.

5. Найти вероятность того, что монета радиусом 2 см, брошенная на бесконечную шахматную доску с клетками шириной 5 см, пересечет не более одной стороны клетки.

6. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было два мальчика и одна девочка?

ЗАНЯТИЕ 6

Закон распределения дискретных случайных величин. Многоугольник распределения. Функция распределения. Плотность распределения

В начале занятия провести анализ контрольной работы и ответить на вопросы студентов. Затем напомнить студентам следующие понятия: *случайная величина*, *дискретная* случайная величина, *закон распределения* и *многоугольник распределения* дискретной случайной величины. Решить со студентами задачи 165, 167, 169.

Напомнить понятие *функции распределения* случайной величины, ее свойства и формулу для вероятности попадания в интервал. Дать определение *непрерывной* случайной величины. Решить задачи 253, 256, 260. В задачах 253, 256 воспользоваться формулой

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

В этих задачах полезно построить график функции $F(x)$. В задаче 260 на графике необходимо правильно изобразить стрелки.

Напомнить понятие *плотности распределения* случайной величины, ее свойства и формулы, связывающие плотность с функцией распределения и вероятностью попадания в интервал. Решить задачи 262, 265, 268, 272.

<u>Примерное домашнее задание</u>: №№ 168, 173, 174, 176, 254, 259, 261, 263, 266, 269, 273.

ЗАНЯТИЕ 7

Равномерное и нормальное распределения

В начале занятия проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Напомнить определение случайной величины, *равномерно распределенной* в интервале (a,b). Дать формулу для плотности равномерного распределения и график этой плотности. Разобрать со студентами задачу 310. При решении этой задачи в качестве случайной величины можно выбрать момент подхода пассажира к остановке, который равномерно распределен в интервале равном 5 минутам. Далее решить со студентами задачи 309, 312.

Напомнить понятие случайной величины, распределенной по *нормальному закону*. Выписать на доске формулу для плотности нормальной случайной величины, а также формулу, выражающую вероятность попадания такой случайной величины в интервал через функцию Лапласа. Напомнить *правило "трех сигм"*. Решить со студентами задачи 322, 324, 328, 331, 335, 341, 342 и следующую задачу:

ЗАДАЧА. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m = 0$ и s. Вероятность попадания этой случайной величины на участок $(-a, a)$ равна 0,5. Найти s и написать выражение для плотности распределения случайной величины X.

При решении этой задачи воспользоваться таблицей значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение 2 в задачнике).

Примерное домашнее задание: №№ 307, 308, 311, 327, 332, 333, 334, 337, 343, 345.

ЗАНЯТИЕ 8
Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Напомнить формулы для вычисления *математического ожидания*, *дисперсии*, *среднего квадратического отклонения* и *моментов* случайной величины, рассмотрев случаи дискретной и непрерывной случайных величин. Дать определение *центрированной случайной величины*. Выписать формулы:

$$M(x) = a_1(x), \qquad m_1(x) = 0,$$
$$D(x) = m_2(x), \qquad m_2(x) = a_2(x) - (M(x))^2,$$
$$m_3(x) = a_3(x) - 3M(x) \cdot a_2(x) + 2(M(x))^3.$$

Напомнить, чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно в интервале (a, b), и случайной величины, распределенной по нормальному закону. Решить со студентами задачи 191, 193, 209, 211, 229, 279, 298, 305, 316, 323, 344.

Примерное домашнее задание: №№ 188, 189, 194, 213, 214, 219, 231, 276, 282, 286, 296, 306, 317.

ЗАНЯТИЕ 9
Двумерные случайные величины

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Напомнить понятия *двумерной случайной величины* (X, Y), *системы двух случайных величин*. Дать геометрическую интерпретацию (случайная точка на плоскости, случайный вектор). Объяснить студентам, что *закон распределения* дискретной двумерной случайной величины задается таблицей с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности: $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. При этом суммы элементов строк (столбцов) этой таблицы определяют закон распределения составляющей X (Y):

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Дать определения *функции распределения* и *плотности распределения* непрерывной двумерной случайной величины. Напомнить их свойства, сделав основной упор на плотность распределения. Напомнить формулу для вероятности попадания случайной точки в область на плоскости. Выразить плотности распределения составляющих X и Y через совместную плотность распределения. Напомнить условие независимости составляющих X и Y. Дать определения *двумерного равномерного распределения* и *двумерного нормального закона*.

Решить вместе со студентами задачи 408, 413, 415, 419, 420, 420, 424, 426, 435.

Примерное домашнее задание: №№ 409, 414, 416, 418, 425, 427, 428.

ЗАНЯТИЕ 10

Числовые характеристики случайных векторов

Проверить домашнее задание и разобрать задачи, вызвавшие затруднения. Напомнить формулы для вычисления математических ожиданий и дисперсий случайных величин X и Y, составляющих случайный вектор (X,Y) (рассмотреть дискретный и непрерывный случай). Кроме того, напомнить понятия *корреляционного момента* и *коэффициента корреляции*. Дать определение *коррелированных* случайных величин. Напомнить определение двумерного нормального закона и разъяснить смысл его параметров.

Решить следующие задачи из пособия “Высшая математика в упражнениях и задачах, Ч. 2” (Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., “Высшая школа”, М., 1980).

ЗАДАЧА 1. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике: один шар - с № 1, два шара - с № 2, три шара - с № 3; во втором ящике: два шара - с № 1, три шара - с № 2, один шар - с № 3. Пусть X - номер шара, вынутого из первого ящика, Y - номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X,Y).

ЗАДАЧА 2. Найти математические ожидания случайных величин X и Y по условию предыдущей задачи.

ЗАДАЧА 3. Найти дисперсии случайных величин X и Y по условию задачи 1.

ЗАДАЧА 4. Найти коэффициент корреляции по условию задачи 1.

ЗАДАЧА 5. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)$, где $f(x,y)=a(x+y)$ в области D и $f(x,y)=0$ вне этой области.
Область D - квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$.
Требуется: 1) определить коэффициент a;

2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$;

3) найти математические ожидания m_x и m_y;

4) средние квадратичные отклонения s_x и s_y.

ЗАДАЧА 6. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)$, где $f(x,y)=a\sin(x+y)$ в области D и $f(x,y)=0$ вне этой области.

Область D определяется неравенствами $0 \le x \le \frac{p}{2}$, $0 \le y \le \frac{p}{2}$.

Найти: 1) коэффициент a;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) средние квадратичные отклонения s_x и s_y;

4) коэффициент корреляции r_{xy}.

Примерное домашнее задание: №№ 431, 432, 434, 435 из задачника В. Е. Гмурмана и еще три задачи:

ЗАДАЧА 7. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X, Y):

X/Y	20	40	60
10	$3l$	l	0
20	$2l$	$4l$	$2l$
30	l	$2l$	$5l$

Найти: 1) коэффициент l;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) дисперсии s_x^2 и s_y^2;

4) коэффициент корреляции r_{xy}.

ЗАДАЧА 8. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x, y)$, где $f(x, y) = axy$ в области D и $f(x, y) = 0$ вне этой области.
Область D - треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$ и $y = 0$.
Найти: 1) коэффициент a;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) дисперсии s_x^2 и s_y^2;

4) коэффициент корреляции r_{xy}.

ЗАДАЧА 9. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x, y)$, где $f(x, y) = a^2 - x^2 - y^2$, если $x^2 + y^2 \le a^2$ $(a \ge 0)$, и $f(x, y) = 0$, если $x^2 + y^2 > a^2$.
Найти: 1) коэффициент a;

2) математические ожидания m_x и m_y;

3) дисперсии s_x^2 и s_y^2;

4) коэффициент корреляции r_{xy}.

ЗАНЯТИЕ 11
Построение выборочной функции распределения и гистограммы

После проверки домашнего задания напомнить студентам основные задачи математической статистики, а также понятия *выборки*, *вариационного ряда*, *статистического ряда*, *полигона частот* (*относительных частот*), *группированного статистического ряда*, *выборочной функции распределения* и *гистограммы*.

Вместе со студентами решить задачи 439, 442 а), 444 а), 447 а). В задаче 444 а) предложить студентам найти еще статистический ряд относительных частот и построить полигон относительных частот, а в задаче 447 а) - построить дополнительно гистограмму относительных частот.

После этого предложить для самостоятельного решения задачу 449.

Выдать курсовое задание “Статистическая обработка результатов измерений”. Дать каждому студенту выборку из 150 чисел для последующей обработки (см. приложение).

Примерное домашнее задание: №№ 440, 442 б), 444 б), 445, 446, 448.

ЗАНЯТИЕ 12
Оценки неизвестных параметров

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Рассказать о *точечных* оценках параметров распределения. Напомнить, что в качестве оценки того или иного параметра берут функции элементов выборки - *статистики*. Отметить, что значения статистик изменяются от выборки к выборке, а потому статистики являются случайными величинами. Объяснить студентам, что в качестве оценки выбирают такую статистику, значения которой для различных выборок были бы "в среднем" близки к истинному значению параметра. Напомнить основные свойства оценок (*несмещенность*, *состоятельность*, *эффективность*), характеризующие их качество.

Рассказать студентам, какие статистики используются при получении оценок числовых характеристик распределения. Напомнить понятия *выборочного среднего*, *выборочной дисперсии*, *исправленной выборочной дисперсии*. Отметить несмещенность выборочного среднего как оценки математического ожидания, а также исправленной выборочной дисперсии как оценки дисперсии. Напомнить формулы для вычисления *выборочных моментов* (начальных и центральных).

Решить у доски задачи 450, 455, 458, 459.

Напомнить студентам два метода нахождения оценок параметров: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Решить этими методами одну или две задачи на построение точечных оценок. Например:

ЗАДАЧА 1. Найти оценку для параметра a экспоненциального распределения, имеющего плотность $f(x,y)$, где $f(x,y) = ae^{-ax}$ при $x \geq 0$ и $f(x,y) = 0$ при $x < 0$, используя выборку $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$.

ЗАДАЧА 2. Найти оценку для параметра a распределения Пуассона, имеющего закон распределения

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0,1,\mathbf{K},$$

используя выборку, определяемую таблицей

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

<u>Примерное домашнее задание</u>: №№ 451, 453, 456, 457, 463 и еще одна задача:

ЗАДАЧА 3. Двумя методами (методом моментов и методом максимального правдоподобия) найти оценку для параметра p распределения Бернулли, имеющего закон распределения

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\mathbf{K}, n,$$

используя выборку определяемую таблицей

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

ЗАНЯТИЕ 13
Доверительные интервалы

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы. Рассказать студентам об *интервальных* оценках параметров распределения. Напомнить понятия *доверительного интервала* и *доверительной вероятности* (*надежности*) g . Объяснить общие принципы построения доверительных интервалов. Напомнить, что для оценки по результатам n наблюдений математического ожидания m нормально распределенной случайной величины X при условии, что дисперсия s^2 известна, служит доверительный интервал:

$$\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}$ - выборочное среднее, а t - такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{g}{2}$. Вместе с вызванными к доске студентами решить задачи 471, 472, 476.

Напомнить распределение “*хи квадрат”* и распределение *Стьюдента*. Объяснить построение доверительных интервалов для m при неизвестном s и доверительных интервалов для s (m - математическое ожидание, а s - среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X).

Решить вместе со студентами задачи 478, 480, 482, 484.

<u>Примерное домашнее задание</u>: №№ 473, 475, 477, 479,481, 483.

ЗАНЯТИЕ 14
Применение критериев согласия

Проверить домашнее задание и ответить на вопросы студентов. Рассказать студентам об основных принципах статистической проверки гипотез. Напомнить понятия *статистической гипотезы* (простой и сложной), *нулевой* и *конкурирующей* гипотезы, *ошибок первого* и *второго рода*, *уровня значимости*, *статистического критерия*, *критической области*, *области принятия гипотезы*. Кроме того, напомнить понятия *наблюдаемого значения* критерия и *критической точки*.

Напомнить критерии для проверки гипотез о вероятности события, о математическом ожидании, о сравнении двух дисперсий. Решить задачи 535, 523, 503. Напомнить критерий “*хи квадрат”* (Пирсона) для проверки гипотезы о законе распределения и решить задачу 563. Рассказать о порядке выполнения курсовой работы “Статистическая обработка результатов измерений”:

А) По данной выборке $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$ объема n строится *статистический ряд*

y_1	y_2	y_3	…	y_m
k_1	k_2	k_3	…	k_m

Здесь $y_1 < y_2 < \mathbf{K} < y_m$ - элементы выборки, записанные в порядке возрастания, k_i - число повторений элемента y_i в выборке. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

Б) При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы и строится *группированная выборка* и *группированный статистический ряд*. Для этого отрезок $[a,b]$, содержащий все элементы выборки, разбивается на N равных интервалов длиной $h = \frac{b-a}{N}$. В зависимости от объема выборки число интервалов группировки N берется от 6 до 20. Находятся концы интервалов

$x_i = a + (i-1)h \quad (i = 1, 2, \ldots, N+1)$, середины интервалов $z_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$ и соответствующие *эмпирические частоты* - количество n_j элементов выборки, попавших в j-ый интервал (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу). Очевидно, что $\sum_{j=1}^{N} n_j = n$. Также строится *группированный статистический ряд относительных частот* $w_j = \frac{n_j}{n} \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$.

В) Строится график *выборочной функции распределения* $\overline{F}(X)$, где $\overline{F}(X) = 0$ при $x \le z_1$, $\overline{F}(X) = \frac{n_1 + \ldots + n_i}{n} = \sum_{j=1}^{i} w_j$ при $z_i < x \le z_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1)$ и $\overline{F}(X) = 1$ при $x > z_N$.

Г) Строится *гистограмма* (*относительных частот*) - ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями $[x_j, x_{j+1}]$ и высотами $h_j = \frac{w_j}{h} \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$.

Д) Находится оценка математического ожидания - *выборочное среднее* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} n_j z_j$, оценка дисперсии - *исправленная выборочная дисперсия* $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} n_j (z_j - \bar{x})^2$, *исправленное среднее квадратическое отклонение* $s = \sqrt{s^2}$.

Е) Находятся *теоретические частоты* $n_j^{/} = np_j$, где $p_j = \Phi\left(\frac{x_{j+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_j - \bar{x}}{s}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находятся по таблицам.

Ж) Для проверки гипотезы о том, что случайная величина X распределена нормально, сначала составляется расчетная таблица:

Номер интервала	Границы интервала	Середины интервалов	Эмпирические частоты	Теоретические частоты		
j	x_j, x_{j+1}	z_j	n_j	$n_j^{/}$	$(n_j - n_j^{/})^2$	$\frac{(n_j - n_j^{/})^2}{n_j^{/}}$
1 2 $\vdots$ N						

З) Если $n_j < 5$ или $n_j^{/} < 5$ при некотором j, то j-ый интервал объединяется с соседним, при этом эмпирические и теоретические частоты суммируются. После объединения число интервалов становится равным $r \quad (r \le N)$.

И) По расчетной таблице находится *наблюдаемое значение* статистики “хи квадрат” (Пирсона):

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^{/}}.$$

К) По заданному *уровню значимости* a и *числу степеней свободы* $k = r - 3$ находится из таблиц *критическая точка* $c^{2}(a, k)$. Если $c^{2}_{набл} \le c^{2}(a, k)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины X и поэтому она принимается. Если $c^{2}_{набл} > c^{2}(a, k)$, то гипотезу отвергают.

Л) Если гипотеза принимается, то с помощью таблиц строится график плотности

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$

случайной величины X, распределенной по нормальному закону. Этот график строится в тех же осях и масштабе, что и гистограмма относительных частот.

Примерное домашнее задание: №№ 504, 524, 529, 538, 564.

ЗАНЯТИЕ 15

Корреляционный и регрессионный анализ

Проверить домашнее задание, ответить на вопросы. Рассказать студентам, что такое корреляционный и регрессионный анализ. Объяснить, что статистическое исследование наличия или отсутствия зависимости между случайными величинами производится с помощью выборочного коэффициента корреляции. Выделение линейной части этой зависимости производится с помощью выборочного коэффициента регрессии и выборочного уравнения (линейной) регрессии.

Напомнить, что если в результате осуществления некоторого эксперимента наблюдаются две величины X и Y, то *выборочный корреляционный момент* m^{*}_{xy} величин X и Y определяется формулой:

$$m^{*}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где $(x_1, y_1), \mathbf{K}, (x_n, y_n)$ - n пар наблюденных значений, полученных в n независимых повторениях эксперимента, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. *Выборочный коэффициент корреляции* r^{*}_{xy} равен:

$$r^{*}_{xy} = \frac{m^{*}_{xy}}{s^{*}_{x} \cdot s^{*}_{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где $s^{*}_{x} = \sqrt{D^{*}(X)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $s^{*}_{y} = \sqrt{D^{*}(Y)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$.

Выборочный коэффициент регрессии Y на X:

$$r^{*}_{y/x} = r^{*}_{xy}\frac{s^{*}_{y}}{s^{*}_{x}} = \frac{m^{*}_{xy}}{(s^{*}_{x})^2}.$$

Выборочное уравнение регрессии Y на X имеет вид:

$$y - \bar{y} = r^{*}_{y/x}(x - \bar{x}) \quad \text{или} \quad \frac{y - \bar{y}}{s^{*}_{y}} = r^{*}_{xy}\frac{x - \bar{x}}{s^{*}_{x}},$$

выборочное уравнение регрессии X на Y:

$$\frac{x - \bar{x}}{s^{*}_{x}} = r^{*}_{xy}\frac{y - \bar{y}}{s^{*}_{y}} \quad \text{или} \quad \frac{y - \bar{y}}{s^{*}_{y}} = \frac{1}{r^{*}_{xy}}\frac{x - \bar{x}}{s^{*}_{x}}.$$

Отметить, что эти уравнения можно вывести с помощью метода наименьших квадратов.

Напомнить, что в качестве оценки отклонения найденного значения r_{xy}^* от точного значения r_{xy} коэффициента корреляции берется среднее квадратическое отклонение, приближенно равное:

$$s_r^* = \frac{1-(r_{xy}^*)^2}{\sqrt{n}}.$$

Доверительный интервал для r_{xy} имеет вид:

$$r_{xy}^* - t_g \cdot \frac{1-(r_{xy}^*)^2}{\sqrt{n}} < r_{xy} < r_{xy}^* + t_g \cdot \frac{1-(r_{xy}^*)^2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции может быть осуществлена с помощью проверки условия $|r_{xy}^*| < t_g \cdot \frac{1-(r_{xy}^*)^2}{\sqrt{n}}$.

Решить вместе со студентами задачи 555, 558, 498.

Примерное домашнее задание: №№ 556, 557, 559, 560, 499.

ЗАНЯТИЕ 16
Дисперсионный анализ

Проверить выполнение домашнего задания и ответить на вопросы. Рассказать студентам, что дисперсионный анализ применяется при изучении влияния совокупности факторов на результаты наблюдения или опыта. Например, если при наблюдении за устойчивостью хода производственного процесса выявились отклонения от установленного режима и причины неустойчивости процесса производства не удается непосредственно обнаружить, то для оценки влияния возможных факторов, нарушающих устойчивость производственного процесса, применяется дисперсионный анализ. Другая производственная задача, требующая для своего решения применения дисперсионного анализа, есть задача улучшения качества продукции, решаемая введением некоторых усовершенствований. Чтобы найти наилучшие варианты испытываемых факторов, следует сравнить результаты действия различных вариантов этих факторов во всех возможных их комбинациях.

Напомнить студентам F-распределение Фишера и статистический критерий для проверки гипотезы о сравнении двух дисперсий. Описать схему *однофакторного дисперсионного анализа*. Подчеркнуть, что дисперсионный анализ состоит в оценке отношения дисперсии, характеризующей систематические колебания групповых средних по отдельным факторам, к дисперсии, характеризующей случайное колебание показателей результативного признака.

Решить вместе со студентами задачи 596, 598, 600.

Принять курсовую работу “Статистическая обработка результатов измерений”.

Примерное домашнее задание: №№ 597, 599, 601.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Варианты индивидуальных заданий

Ниже приведены варианты индивидуальных заданий для выполнения курсовой работы “Статистическая обработка результатов измерений”; i-му варианту соответствуют элементы выборки, расположенные в 15-ти последовательных строках таблицы, начиная с i-ой (объем выборки при этом $n = 150$). При выполнении работы следует принять уровень значимости $a = 0{,}05$, отрезок $[a,b] = [24{,}5;54{,}5]$, число интервалов $N = 10$.

1	48	39	43	44	34	34	32	43	40	46
2	25	31	34	49	39	37	45	48	41	49
3	43	46	34	35	42	32	41	34	42	42
4	38	40	46	47	34	42	38	40	38	36
5	30	43	41	40	40	35	35	41	38	45
6	37	42	38	36	44	39	32	48	43	39
7	43	30	32	36	42	34	49	48	49	50
8	37	30	44	48	44	35	45	34	33	41
9	43	45	50	34	33	39	41	39	46	31
10	40	52	44	39	35	45	33	42	42	36
11	44	51	45	39	34	44	40	37	43	32
12	33	42	40	35	37	43	48	48	50	32
13	40	48	45	43	36	39	42	40	37	30
14	44	50	46	39	41	48	44	42	35	51
15	44	50	47	37	33	34	42	43	43	47
16	33	48	38	42	45	32	34	44	39	45
17	48	26	31	34	38	36	46	49	40	48
18	42	47	35	34	41	33	41	35	43	42
19	37	39	47	47	33	42	37	39	40	37
20	43	41	30	39	38	36	34	42	37	46
21	39	44	37	35	43	38	33	47	45	38
22	37	48	38	52	40	45	44	42	38	40
23	44	46	37	34	41	37	41	39	30	38
24	32	41	48	36	51	36	33	39	45	40
25	34	41	38	34	33	27	51	45	27	38
26	42	37	46	41	47	36	30	45	41	40
27	37	37	39	42	48	41	36	39	33	47
28	43	49	27	31	41	46	40	36	36	42
29	41	46	33	37	47	35	31	29	30	36
30	48	38	37	34	40	34	36	50	48	39
31	30	38	43	41	44	45	38	37	46	50
32	41	48	41	43	47	37	42	34	32	44
33	37	48	46	41	41	37	37	48	49	46
34	38	44	50	37	47	27	48	37	46	38
35	48	47	38	52	34	36	34	41	39	28
36	31	43	34	46	37	40	41	41	32	42
37	47	33	51	41	40	45	37	36	27	36
38	37	42	46	35	34	38	45	36	28	40
39	34	48	30	51	33	41	44	42	39	39
40	45	45	41	40	36	27	50	44	41	48
41	36	36	32	32	36	49	27	45	30	38
42	40	38	45	40	40	50	42	37	50	39
43	43	38	30	39	42	41	33	42	38	44
44	44	41	47	52	51	38	50	39	50	48
45	49	43	52	50	39	30	26	50	27	49
46	27	49	46	39	47	26	49	52	29	44
47	51	53	48	49	53	45	27	43	48	44