**Министерство образования и науки**

**Российской Федерации**

«МАТИ» – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

# Основы вариационного исчисления

Методические указания и варианты курсовых заданий

Составители: Агарева О.Ю.

Выск Н.Д.

Москва 2014

Методические указания предназначены для студентов РГТУ- «МАТИ» имени К.Э. Циолковского, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Вариационное исчисление». В них рассматриваются основные понятия вариационного исчисления, простейшие задачи вариационного исчисления, достаточные условия экстремума функционала.

Приводится решение типовых задач по всем разделам. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

### Основные понятия вариационного исчисления.

**1. Понятие функционала.** Пусть дан некоторый класс $M$ функций $y(x)$. Иногда вместо функций удобно рассматривать кривые – графики этих функций. Если каждой функции $y(x) \epsilon M$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число $J$, то говорят, что в классе $M$ определен *функционал* $J\ [y]$. Класс $M$ функций $y(x)$, на котором определен функционал $J\ [y]$ называется *областью задания функционала*. Кривые (точнее, задающие их функции) $y(x)$, на которых сравниваются значения функционала $J\ [y]$., называются *допустимыми кривыми*.

*Вариацией* или *приращением* $dy$ аргумента $y(x)$ функционала $J\ [y]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими классу $M$ функций: $dy = y(x) - y_0(x)$.

*Основная задача вариационного исчисления* – исследование функционалов на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается. Большую роль в развитии вариационного исчисления сыграли следующие классические задачи:

1) *Задача о брахистохроне* – плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает под действием только силы тяжести из точки $A$ в точку $B$ ($B$ ниже $A$ и точки не лежат на одной вертикальной прямой).

2) *Задача о геодезической линии* – линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки.

3) *Задача Дидоны* – легендарной карфагенской царицы, которой понадобилось ремешком фиксированной длины ограничить участок земли наибольшей площади.

**2. Близость кривых.** Говорят, что кривые $y=y(x)$ и $y=y_1(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, *близки в смысле близости нулевого порядка*, если для заданного $\varepsilon>0$ и для всех $x\epsilon[a,b]$ справедливо: $|y(x)-y_1(x)|<e$. Геометрически это означает, что эти кривые на отрезке $[a,b]$ *близки по ординатам*.

Будем говорить, что кривые $y=y(x)$ и $y=y_1(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, *близки в смысле близости первого порядка*, если для заданного $\varepsilon>0$ и для всех $x\epsilon[a,b]$ справедливо: $|y(x)-y_1(x)|<e$ и $|y'(x)-y_1'(x)|<e$. Геометрически это означает, что кривые на отрезке $[a,b]$ близки как по ординатам, так и по направлениям касательных в соответствующих точках.

Кривые $y=y(x)$ и $y=y_1(x)$, *близки в смысле близости* $k$ *-го порядка*, если для заданного $\varepsilon>0$ и для всех $x\epsilon[a,b]$ справедливо:

$$|y(x)-y_1(x)|<e; \quad |y'(x)-y_1'(x)|<e;\ldots;\left|y^{(k)}(x)-y^{(k)}{}_1(x)\right|<e.$$

Если кривые близки в смысле близости $k$ -го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

*Расстоянием между кривыми* $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, где $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$

непрерывные на $[a,b]$ функции, называется неотрицательное число $r_0$, равное максимуму $|y(x) - y_1(x)|$на отрезке $[a,b]$: $r_0 = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x) - y_1(x)|$.

Пусть кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные $n$ -го порядка. *Расстоянием $n$ -го порядка между кривыми* $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$называется наибольший из максимумов следующих величин: $|y(x) - y_1(x)|$; $|y'(x) - y_1'(x)|$;...;$|y^{(k)}(x) - y^{(k)}{}_1(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Будем обозначать это расстояние так:

$$r_n = \max_{0\le k\le n}\max_{x\in[a,b]}\left|y^{(k)}(x) - y^{(k)}{}_1(x)\right|.$$

**3. Вариация функционала.** Пусть функционал *J [y]* задан на множестве *M* функций $y(x)$. *Приращением функционала J [y],* отвечающим приращению$d y$аргумента, называется величина $VJ[y(x)] = J[y(x) + d y] - J[y(x)]$.

Если приращение функционала $VJ[y(x)]$ можно представить в виде $VJ[y(x)] = L[y(x), d y] + o[y(x), d y]$,

где $L[y(x), d y]$– линейный по отношению к $d y$функционал, а $o[y(x), d y] \to 0$ при $\max|d y| \to 0$, то линейная по отношению к $d y$ часть приращения функционала, $L[y(x), d y]$ называется *вариацией функционала* и обозначается $d J$.

**4. Экстремум функционала.** Говорят, что функционал *J [y]* достигает на кривой $y_0(x)$максимума, если значения функционала *J [y]* на любой близкой к $y_0(x)$ кривой не больше, чем $J\left[y_o(x)\right]$, т.е. $\Delta J = J\left[y(x)\right] - J\left[y_o(x)\right] \le 0$.

Если $\Delta J \le 0$, причем $\Delta J = 0$ только при $y = y_0(x)$, то говорят, что на кривой $y = y_0(x)$ достигается максимум.

Аналогично определяется кривая $y = y_0(x)$, на которой реализуется минимум. В этом случае $\Delta J \ge 0$ на всех кривых, близких к кривой $y = y_0(x)$.

## Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

**1. Постановка задачи.** Пусть функция $F = F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех функций $y = y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям

$$y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1,$$

найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании экстремума функционала вида $J[y]$ на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки $A(x_0, y_0);\ B(x_1, y_1)$. Эту задачу также называют *задачей с закрепленными границами*.

**2. Уравнение Эйлера.** Для того чтобы функционал $J[y]$, определенный на множестве функций $y = y(x)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1$ достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ y(x_0) = y_0;\, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями.

Уравнение Эйлера в развернутом виде:

$$y''F_{y'y'} + y'F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0$$

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, так что его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных. Значения этих постоянных, вообще говоря, определяются из граничных условий

$$y(x_0) = y_0;\, y(x_1) = y_1.$$

Экстремум функционала $J[y]$ может реализоваться только на тех экстремалях, которые удовлетворяют граничным условиям.

Краевая задача

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ y(x_0) = y_0;\, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Дальнейшее исследование того, действительно ли на решениях этой задачи достигается экстремум, проводится с использованием достаточных условий экстремума.

## 3. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

**1) $F$ не зависит от $y'$: $F = F(x, y)$.**

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y = 0$$

Это уравнение является не является дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число кривых (функций), которые могут и не удовлетворять граничным условиям. Лишь в исключительных случаях, когда кривая решений проходит через

граничные точки $y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1$, существует кривая, на которой может достигаться экстремум.

**2) $F$ зависит от $y'$ линейно, т.е. $F(x, y, y') = M(x, y) + y'N(x, y)$.**

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0$$

Полученное уравнение, как и в случае 1), является алгебраическим, а не дифференциальным. Кривая, этим определяемая уравнением, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, и, значит, вариационная задача, как правило, не имеет решения в классе непрерывных функций. Если в некоторой области $D$ плоскости $Oxy$ $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ , то выражение $F(x, y, y') = M(x, y) + y'N(x, y)$ является полным дифференциалом и функционал

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} M(x, y)\,dx + y'N(x, y)\,dy$$

не зависит от пути интегрирования: значение функционала $J[y]$ одно и то же на допустимых кривых. Вариационная задача теряет смысл.

**3) $F$ зависит лишь от $y'$, т.е. $F = F(y')$.**

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y''F_{y'y'}=0$$

В этом случае экстремалями являются всевозможные прямые линии $y=C_1x+C_2$, где $C_1;C_2-$ произвольные постоянные.

**4) *F* не зависит от $y$, т.е. $F=F(x,y')$.**

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_{y'}(x,y')=C,$$

где $C$ – произвольная постоянная. Уравнение есть дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его, находим экстремали задачи.

**5) *F* не зависит явно от *x*, т.е. $F=F(y,y')$.**

В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y-y''F_{y'y'}-y'F_{yy'}=0$$

Умножив на $y'$ обе части этого уравнения, в левой части получим точную производную, т.е. $\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=0$, откуда $F-y'F_{y'}=C$, где $C$ – произвольная постоянная. Это уравнение может быть проинтегрировано путем разрешения относительно $y'$ и разделения переменных или путем введения параметра.

## Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

### 1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

Пусть имеем функционал

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) dx$$

где $F$ – функция, дифференцируемая $n$+2 раза по всем аргументам, $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$, а граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}
y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y_0';\ldots; y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}; \\
y(x_1)=y_1;\ y'(x_1)=y_1';\ldots; y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.
\end{gathered}$$

Экстремалями функционала $J[y]$ являются интегральные кривые уравнения Эйлера-Пуассона:

$$F_y-\frac{d}{dx} F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2} F_{y''}-\ldots+(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}=0$$

Общее решение этого уравнения зависит от $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий.

## 2. Функционалы, зависящие от нескольких функций.

Для функционала, зависящего от $m$ функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$,

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_m'(x)\right) dx,$$

где $F$ – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, при граничных условиях вида

$$y_k(x_0)=y_k^0,\ y_k(x_1)=y_k^1, \quad k=1,2,\ldots,m.$$

экстремали находятся из следующей системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx} F_{y_k'}=0 \quad k=1,2,\ldots,m$$

Общее решение системы $m$ уравнений второго порядка зависит от $2m$ произвольных постоянных, определяемых из граничных условий.

**3. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.**

Рассмотрим функционал вида

$$J\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy\,,$$

где $F$ – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, и предположим, что ищется функция $z=z(x,y)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области $D$, принимающая на границе $\Gamma$ области $D$ заданные значения и дающая экстремум функционалу $J\left[z(x,y)\right]$.

Если на поверхности $z=z(x,y)$ реализуется экстремум функционала $J\left[z(x,y)\right]$, то функция $z=z(x,y)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Остроградского:

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q=0\,,$$

где для краткости обозначено $p=\dfrac{\partial z}{\partial x};\, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Уравнение Эйлера-Остроградского представляет собой необходимое условие экстремума функционала $J\left[z(x,y)\right]$. Оно является уравнением второго порядка в частных производных, причем ищется решение $z=z(x,y)$, принимающее на границе $\Gamma$, заданные значения.

## Поле экстремалей

### 1. Понятие поля экстремалей.

Предположим, что краевая задача для уравнения Эйлера

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

$$y(x_0)=y_0;\, y(x_1)=y_1$$

определила экстремаль $y=\tilde{y}(x)$ (далее – изучаемая или исследуемая экстремаль), на которой может достигаться экстремум вариационной задачи с закрепленными границами.

Одним из требований, входящих в наиболее распространенные достаточные условия экстремума этой задачи, является возможность включения исследуемой экстремали в поле экстремалей.

Семейство кривых $y=y(x,C)$ образует *собственное поле* в заданной области $D$ плоскости $Oxy$, если через каждую точку $(x,y)$ этой области проходит одна и только одна кривая семейства $y=y(x,C)$.

Угловой коэффициент $p(x,y)$ касательной к кривой семейства $y=y(x,C)$, проходящей через точку $(x,y)$, называется *наклоном поля* в точке $(x,y)$.

Семейство кривых $y=y(x,C)$ образует *центральное поле* в области $D$ плоскости $Oxy$, если все кривые семейства $y=y(x,C)$ проходят через некоторую точку $(x_0,y_0)\in D$ (*центр пучка кривых*), покрывают всю область $D$ и нигде, кроме центра пучка, больше не пересекаются.

В обоих полях выбором любой точки области (кроме центра пучка в центральном поле) задается единственная экстремаль, проходящая через эту точку. Если поле (собственное или центральное) образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*.

Пусть кривая $y=\tilde{y}(x)$ является экстремалью функционала

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx,$$

проходящей через точки $A(x_0,y_0),\, B(x_1,y_1)$.

Говорят, что экстремаль $y = \bar{y}(x)$ *включена в собственное поле экстремалей*, если найдено семейство экстремалей $y = y(x, C)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $y = \bar{y}(x)$, причем эта экстремаль $y = \bar{y}(x)$ не лежит на границе области *Г*, в которой семейство $y = y(x, C)$ образует поле.

Если пучок экстремалей с центром в точке $(x_0, y_0)$ в окрестности экстремали $y = \bar{y}(x)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то говорят, что *найдено центральное поле*, включающее данную экстремаль $y = \bar{y}(x)$. За параметр семейства

$y = y(x, C)$ принимается угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке $(x_0, y_0)$.

## 2. Условия возможности включения экстремали в поле экстремалей.

*Условие Якоби*. Пусть имеем простейшую вариационную задачу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

$$y(x_0) = y_0;\; y(x_1) = y_1$$

Для того, чтобы дугу экстремали $AB$ $(A(x_0, y_0);\;\; B(x_1, y_1))$ можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(x_0, y_0)$, достаточно, чтобы существовало решение $u = u(x)$ уравнения Якоби

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right) = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(x_0) = 0$, которое не обращается в нуль ни в одной точке полуинтервала $x_0 < x \le x_1$.

**Замечание.** Условие Якоби является необходимым для достижения экстремума функционала $J[y]$, т.е. для экстремали *AB*, реализующей экстремум, соответствующее решение $u = u(x)$ уравнения Якоби не может обращаться в нуль ни в одной точке полуинтервала $x_0 < x \le x_1$.

В уравнении Якоби в функции $F_{yy}(x, y, y'), F_{yy'}(x, y, y'), F_{y'y'}(x, y, y')$ вместо

$y(x)$ надо подставить правую часть уравнения экстремали $y = y(x, C_0)$

*Усиленное условие Лежандра.* Достаточным условием для включения экстремали вариационной задачи в поле экстремалей является выполнение неравенства $F_{y'y'} > 0$ во всех точках рассматриваемой экстремали (т.е. при всех $x_0 < x \le x_1$).

## Достаточные условия экстремума функционала

Рассматривается простейшая вариационная задача для функционала: найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

при условиях $y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1,$

### 1. Достаточные условия Вейерштрасса.

*Функцией Вейерштрасса* $E(x, y, p, y')$ называется функция, определяемая равенством

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p),$$

где $p = p(x,y)$ – наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи в точке $(x,y)$.

### Достаточные условия слабого экстремума.

*Кривая C доставляет слабый экстремум функционалу* $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$, *если:*

1) Кривая $C$ является экстремалью функционала $J[y]$, удовлетворяющей граничным условиям $y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1$.

2) Экстремаль $C$ может быть включена в поле экстремалей (в частности, это будет, если выполнено условие Якоби или усиленное условие Лежандра).

3) Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$ должна сохранять знак во всех точках $(x,y)$, близких к экстремали $C$, и для близких к $p(x,y)$ значений $y'$. Функционал $J[y]$ будет иметь максимум на $C$, если $E\le 0$, и минимум, если $E\ge 0$.

### Достаточные условия сильного экстремума.

*Кривая C доставляет сильный экстремум функционалу* $J[y]$, *если:*

1) Кривая $C$ является экстремалью функционала $J[y]$, удовлетворяющей

граничным условиям $y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1$.

2) Экстремаль $C$ может быть включена в поле экстремалей.

3) Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$ сохраняет знак во всех точках $(x,y)$, близких к экстремали $C$, и для произвольных значений $y'$. При $E\le 0$ будет максимум, а при $E\ge 0$ – минимум.

**Замечание.** Условие Вейерштрасса необходимо для наличия экстремума в следующем смысле – если в точках экстремали для некоторых значений $y'$ функция $E$ имеет противоположные знаки, то сильный экстремум не достигается. Если это свойство имеет место при сколь угодно близких к *p* значениях $y'$, то не достигается и слабый экстремум.

**2. Достаточные условия Лежандра.**

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную частную производную $F_{y'y'}(x, y, y')$ и пусть экстремаль *C* включена в поле экстремалей.

Если на экстремали *C* имеем $F_{y'y'} > 0$, то на кривой *C* достигается слабый минимум; если $F_{y'y'} < 0$ на экстремали *C*, то на ней достигается слабый максимум функционала. Эти условия называются *усиленными условиями Лежандра*. В том случае, когда $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ в точках $(x,y)$, близких к экстремали *C*, при произвольных значениях $y'$, то имеем сильный минимум, а в случае, когда для указанных значений аргументов $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$, имеем сильный максимум.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ КУРСОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В каждом варианте в задачах 1,2,3 требуется найти экстремали заданных функционалов, в задаче 4 - исследовать функционал на экстремум (то есть найти функцию, на которой достигается минимум или максимум данного функционала). Задача 5 сформулирована отдельно для каждого варианта.

### Вариант 1

1. $\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad y(a) = y(b) = 0.$

2. $\int_a^b \left(-9y^2 + (y'')^2 + e^x\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} x_1 x_2 y y'_{x_1} y'_{x_2}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^2 \left(y^2 + (y')^2 - 2xy\right) dx, \quad y(0) = 0,\ y(2) = 3.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ \int\limits_0^1 y\,dx = 0,\ \int\limits_0^1 xy\,dx = 0.$$

## Вариант 2

1. $\int\limits_a^b \sqrt{\dfrac{1 + (y')^2}{h - y}}\, dx, \quad y(a) = h,\ y(b) = 0.$

2. $\int\limits_a^b \left(4y^2 + 5(y')^2 + (y'')^2\right) dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} x_1 y'_{x_1}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^1 e^x \left((y')^2 + y\right) dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2e.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^p y \sin x\, dx, \quad y(0) = 0,\ y(p) = 0,\ \int\limits_0^p (y')^2\, dx = \frac{p}{2}.$$

## Вариант 3

1. $\int\limits_a^b \sqrt{\dfrac{1 + (y')^2}{2gy}}\, dx.$

2. $\int\limits_a^b \left(4y^2 - 3\left(y'\right)^2 - \left(y''\right)^2\right) dx.$

3. $\iint\limits_{Ÿ_2} x_2 (y'_{x_1} + y'_{x_2}) dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^1 y^2 (y')^2 \, dx, \quad y(0) = 1, \, y(1) = e.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_{-1}^{1} y dx, \quad y(-1) = y(1) = 0, \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = p.$$

## Вариант 4

1. $2p - \int\limits_{-a}^{a} y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2} dx, \quad y(-a) = y(a) = R.$

2. $\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \left(3y^2 - 4\left(y'\right)^2 + \left(y''\right)^2\right) dx, \quad y(0) = 3, \, y\left(\frac{p}{2}\right) = 1, \, y'(0) = 4, \, y'\left(\frac{p}{2}\right) = -4.$

3. $\iint\limits_{Ÿ_2} x_1{}^2 y'_{x_1} y'_{x_2} dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^{\ln 2} \left(\left(y'\right)^2 + 3y^2\right) dx, \quad y(0) = 0, \, y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 (y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \, y(1) = 2, \int\limits_0^1 y^2 dx = 4.$$

## Вариант 5

1. $\int\limits_a^b \left(y + \frac{1 + x^2}{2} y' + x^2 \left(y'\right)^2\right) dx, \quad 0 < a < b.$

2. $\int\limits_a^b \left(3y^2+2\left(y'\right)^2-\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \left(y^2+\left(y'_{x_1}\right)^2+\left(y'_{x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^T \left(\left(y'\right)^2+y^2-4y\sin x\right)dx, \quad y(0)=0,\, y(T)=y_1.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 y_1'y_2'dx, \quad \vec{y}(0)=\{0;0\},\, \vec{y}(1)=\{1;2\}.$$

## Вариант 6

1. $\int\limits_0^2 \left(12xy+yy'+\left(y'\right)^2\right)dx, \quad y(0)=2,\, y(2)=3.$

2. $\int\limits_a^b \left(6y^2-5\left(y'\right)^2+\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \sqrt{1+y^2+\left(y'_{x_1}\right)^2+\left(y'_{x_2}\right)^2}\,dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_1^2 x^2\left(y'\right)^2dx, \quad y(1)=3,\, y(2)=1.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 ((y_1')^2+(y_2')^2)dx, \quad \vec{y}(0)=\{0;0\},\, \vec{y}(1)=\{0;0\},\, \int\limits_0^1 y_1y_2dx=-2.$$

## Вариант 7

1. $\int\limits_0^1 \left(y+2xy+\left(y'\right)^2\right)dx, \quad y(0)=A,\, y(1)=B.$

2. $\int\limits_a^b \left(5y^2 - 4(y')^2 + (y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} \frac{1}{y} y'_{x_1} y'_{x_2}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^6 \left(2xy - (y')^2\right)dx, \quad y(0) = 1, y(6) = 1.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 ((y')^2 + x^2)dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \int\limits_0^1 y^2 dx = 2.$$

## Вариант 8

1. $\int\limits_a^b \left((y')^2 - 4y^2\right)dx.$

2. $\int \left(2y^2 - 3(y')^2 + (y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} y \cdot y'_{x_1} \cdot y'_{x_2}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^p \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0, y(p) = 1.$

5. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

## Вариант 9

1. $\int\limits_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right)dx, \quad y(0) = 0, y(1) = a.$

2. $\int \left(2y^2 + (y')^2 - (y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \frac{y'_{x_1}}{y'_{x_2}} dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^2 (y')^3\, dx, \quad y(0)=0,\, y(2)=8.$

5. Написать дифференциальное уравнение экстремалей:

$$\int\limits_0^{x_1} (p(x)(y_1')^2 + g(x)y^2)dx, \quad y(0)=y(x_1)=0, \int\limits_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1.$$

## Вариант 10

1. $\int\limits_a^b \left(e^{2y} + 2(y')^2\right)dx.$

2. $\int \left(5y^2 + 6(y')^2 + (y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \frac{y + y'_{x_1}}{y'_{x_2}} dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{y}{(y')^2} dx, \quad y(0)=1,\, y(1)=0{,}5.$

5. Найти экстремаль:

$$\int\limits_0^1 \left((y_1')^2 + (z_1')^2 - 4xz - 4z\right)dx, \quad y(0)=0,$$

$$y(1)=1,\, z(0)=0,\, z(1)=1, \int\limits_0^1 \left((y_1')^2 - xy' - (z_1')^2\right)dx = 2.$$

## Вариант 11

1. $\int\limits_a^b \frac{1+y^2}{y'} dx.$

2. $\int\left(5y^2+4\left(y'\right)^2-\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} x_1x_2\left(y'_{x_1}\right)^2 dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_1^2\left(x^2\left(y'\right)^2+12y^2\right)dx, \quad y(1)=0,\ y(2)=7.$

5. Найти кривую $y = y(x)$ заданной длины $l = 7$, для которой площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$, $y = y(x)$, достигает максимума.

## Вариант 12

1. $\int\limits_a^b\left(y^2-2y\cos x-\left(y'\right)^2\right)dx.$

2. $\int\left(8y^2-6\left(y'\right)^2+\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2}\left(\left(y'_{x_1}\right)^2+y'_{x_2}\right)dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^1\left(y+2xy'+\left(y'\right)^2\right)dx, \quad y(0)=1,\ y(1)=2.$

5. Найти форму абсолютно гибкого нерастяжимого однородного каната длиной $l = 5$, подвешенного в точках $A(0; 2)$ и $B(2; 4)$.

## Вариант 13

1. $\int\limits_a^b\frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{y}dx.$

2. $\int\left(8y^2-2\left(y'\right)^2-\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2}(y'_{x_1}+(y'_{x_2})^2)dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^2\left(xy'+\left(y'\right)^2\right)dx,\quad y(0)=1,\, y(2)=0.$

5. Найти допустимые экстремали:

$\int\limits_0^2(y')^2dx,\quad y(0)=0,\, y(2)=-3,\, \int\limits_0^2 xydx=5.$

## Вариант 14

1. $\int\limits_1^2\frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{x}dx,\quad y(1)=0,\, y(2)=1.$

2. $\int\left(20y^2+9\left(y'\right)^2+\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2}\frac{y+(y'_{x_2})^2}{(y'_{x_1})^2}dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^3\left(\left(y'\right)^2+2yy'-16y^2\right)dx,\quad y(0)=y(3)=0.$

5. Найти экстремум функционала

$\int\limits_0^1\sqrt{2+3\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2}dx,\quad \overset{r}{y}(0)=\{2;3\},\, \overset{r}{y}(1)=\{1;0\}$ при условии

$y_1+2y_2-x=0.$

## Вариант 15

1. $\int\limits_a^b \left( x^2 (y')^2 + 12y^2 \right) dx, \quad 0 < a < b.$

2. $\int \left( 20y^2 + (y')^2 - (y'')^2 \right) dx.$

3. $\iint\limits_{\Omega_2} \sqrt{(y'_{x_1})^2 + (y'_{x_2})^2}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_{-1}^{2} y' \left( 1 + x^2 y' \right) dx, \quad y(-1) = 1, y(2) = 4.$

5. Найти экстремум функционала

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 2y_1^2 - y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2 \right) dx, \quad \vec{y}(0) = \{0;1\}, \vec{y}\left( \frac{\pi}{3} \right) = \{1;-1\}$ при условии

$y_1 + y_2 - 2\sin x = 0.$

## Вариант 16

1. $\int\limits_a^b \left( 4xy' - (y')^2 \right) dx, \quad y(a) = A, y(b) = B.$

2. $\int \left( 12y^2 - 7(y')^2 + (y'')^2 \right) dx.$

3. $\iint\limits_{\Omega_2} x_1 \sqrt{y\left( 1 + \left( y'_{x_1} \right)^2 \right)}\, dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_1^2 y' \left( 1 + x^2 y' \right) dx, \quad y(1) = 3, y(2) = 5.$

5. Найти допустимые экстремали:

$\int\limits_1^2 \frac{1 + y^2}{y'} dx, \quad y(1) = 0, y(2) = 1, \int\limits_1^2 y dx = 2.$

## Вариант 17

1. $\int\limits_a^b \left(y^2+\left(y'\right)^2\right)dx.$

2. $\int \left(12y^2+\left(y'\right)^2-\left(y''\right)^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} y\sqrt{1+y'_{x_1}}\,dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_{-1}^{2} y'\left(1+x^2y'\right)dx, \quad y(-1)=y(2)=1.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{y}dx, \quad y(1)=0,\ y(2)=-1.$$

## Вариант 18

1. $\int\limits_0^1 \left(x^2+8y^2+\left(y'\right)^2\right)dx.$

2. $\int\limits_0^1 \left(2xy+\left(y'''\right)^2\right)dx, \quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y(1)=y'(1)=y''(1)=0.$

3. $\iint\limits_{\text{Ÿ}_2} \left(x_1+x_2\right)\sqrt{y'_{x_1}-y'_{x_2}}\,dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} \left(4y^2-\left(y'\right)^2+8y\right)dx, \quad y(0)=-1,\ y\left(\frac{p}{4}\right)=0.$

5. Найти экстремум функционала

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\left(y_1^2+y_2^2+(y_1')^2+(y_2')^2\right)dx,\quad \overset{r}{y}(0)=\{-1;1\},\ \overset{r}{y}\left(\frac{p}{2}\right)=\{-1;-1\}$$ при

условии

$y_1-y_2+8\sin x=0.$

## Вариант 19

1. $\int_a^b\sqrt{y\left(1+(y')^2\right)}dx.$

2. $\int_a^b\left(x^2-xy'+y'''\right)dx.$

3. $\iint\limits_{Ў_2}\left(2y-y'_{x_1}+3\left(y'_{x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2.$

4. $\int_0^3\left((y')^2+2yy'-16y^2\right)dx,\quad y(0)=y(3)=0.$

5. Найти кривую $y = y(x)$ заданной длины $l = 5$, для которой площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$, $y = y(x)$, достигает максимума.

## Вариант 20

1. $\int_a^b y\sqrt{1-(y')^2}dx.$

2. $\int_a^b\left(yy'+(y')^2+yy''+y'y''+(y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{Ў_2}x_1y\left(y'_{x_2}\right)^3dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_0^1 \left( y + 4xy' + 4\left(y'\right)^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, y(1) = 2.$

5. Найти форму абсолютно гибкого нерастяжимого однородного каната длиной $l$ = 7, подвешенного в точках $A$(-1; 3) и $B$(2; 2).

## Вариант 21

1. $\int\limits_a^b \left( \left(y'\right)^2 + y^2 - 2y\sin x \right) dx.$

2. $\int\limits_a^b \left( 4yy' + 3\left(y'\right)^2 + 3yy'' + 5y'y'' - \left(y''\right)^2 \right) dx.$

3. $\iint\limits_{\Omega_2} \left( x_2 + y \right) yy'_{x_1} dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{y}{\left(y'\right)^2} dx, \quad y(0) = 1, y(1) = 0{,}5.$

5. Найти допустимые экстремали:

$$\int\limits_0^1 (y_1^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2) dx, \quad \vec{y}(0) = \{1; 0\}, \vec{y}(1) = \left\{ e + \frac{1}{e}; e - \frac{1}{e} \right\}, y_1' - y_2 = 0.$$

## Вариант 22

1. $\int\limits_0^2 \left( 16y^2 - 5yy' - 4\left(y'\right)^2 + \sin x \right) dx, \quad y(0) = 1, y(2) = 3.$

2. $\int\limits_a^b \left( 3yy' + 5\left(y'\right)^2 + 5yy'' + 4y'y'' + 2\left(y''\right)^2 \right) dx.$

3. $\iint\limits_{\Omega_2} x_1 x_2 y \cdot y'_{x_1} \cdot y'_{x_2} dx_1 dx_2.$

4. $\int\limits_1^2 (x^2(y')^2 + 12y^2)dx, \quad y(1) = 0,\ y(2) = 7.$

5. Найти экстремали и экстремум функционала

$$\int\limits_0^1 \sqrt{2 + 3(y_1')^2 + (y_2')^2}\,dx, \quad \vec{y}(0) = \{2;3\},\ \vec{y}(1) = \{1;0\},\ y_1 + 2y_2 - x = 0.$$

## Вариант 23

1. $\int\limits_0^1 \left(20y^2 + 7yy' - 5(y')^2 + x^3\right)dx, \quad y(0) = y(1) = 1.$

2. $\int\limits_a^b \left(2(y')^2 - 4yy' + 2yy'' - 3y'y'' + 3(y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \left(16y^2 - \left(y'_{x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_1^2 y'\left(1 + x^2y'\right)dx, \quad y(1) = 3,\ y(2) = 5.$

5. Найти условный экстремум функционала

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2}\,dx, \quad \vec{y}(0) = \{1;2\},\ \vec{y}(1) = \{2;1\},\ 2y_1 - y_2 = 3x.$$

## Вариант 24

1. $\int\limits_{-1}^1 \left(12y^2 - 3yy' + 3(y')^2 + e^{2x}\right)dx, \quad y(-1) = y(1) = 0.$

2. $\int\limits_a^b \left(4(y')^2 - yy' + 4yy'' - 2y'y'' + 4(y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{\text{Ў}_2} \left(3y + y'_{x_1} - \left(y'_{x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_1^2 \frac{x^3}{(y')^2}\,dx, \quad y(1)=1,\ y(2)=4.$

5. Найти условный экстремум функционала

$$\int\limits_0^1 \left((y_1')^2+(y_2')^2\right)dx, \quad \vec{y}(0)=\{-1;0\},\ \vec{y}(1)=\{-1;1\},\ y_1+y_2-2x^2+x+1=0.$$

## Вариант 25

1. $\int\limits_0^2 \left(18y^2+11yy'+2(y')^2+x^2e^{2x}\right)dx, \quad y(0)=2,\ y(2)=4.$

2. $\int\limits_a^b \left(2yy'-3(y')^2-3yy''+7y'y''+5(y'')^2\right)dx.$

3. $\iint\limits_{Ў_2} y\left(y'_{x_1}\right)^2\left(y'_{x_2}\right)^3 dx_1dx_2.$

4. $\int\limits_1^3 \left(12xy+(y')^2\right)dx, \quad y(1)=0,\ y(3)=26.$

5. Найти экстремали функционала

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y_1')^2-(y_2')^2\right)dx, \quad \vec{y}(0)=\{0;0\},\ \vec{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left\{\frac{\pi}{4};-\frac{1}{2}\right\},\ y_1'=y_2+\sin x.$$

## Литература


1. *Краснов М.Л.* Вариационное исчисление: задачи и упражнения: учебное пособие для втузов. Наука. 1973.–190 с.

2. *Краснов М.Л.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для втузов. М. 2002. – 166 с.

3. *Васильева А.Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2003. – 432 с.

4. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов М., 2008. – 205 с.

5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физ. спец. ун-тов. М.: Наука, 1969. – 424 с.