Пособие предназначено для студентов 1-2 курсов МАТИ-РГТУ, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Дифференциальные уравнения». В нем рассматриваются основные приемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

I. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и ее производную.

Частным решением такого уравнения является любая функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество для всех допустимых значений переменной.

Множество всех решений уравнения (1) называется его *общим решением*, или *общим интегралом*. Оно имеет вид

$$y = f(x, C), \qquad (2)$$

такой, что любое частное решение получается из формулы (2) при некотором значении произвольной постоянной C, и наоборот, любое фиксированное значение C дает функцию, являющуюся решением уравнения (1).

Задача нахождения частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = f(x_0)$, называется *задачей Коши* для уравнения первого порядка.

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка, для которых можно найти аналитическое решение.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (3)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Его можно привести к равенству $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, откуда $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Если существуют первообразные $F(x)$ и $G(y)$ функций $f(x)$ и $\dfrac{1}{g(y)}$, общее решение уравнения (3) имеет вид: $G(y) = F(x) + C$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xyy' = 1 + y^2$.
Решение.
Разделим переменные:
$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2,\ \frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{2ydy}{1+y^2} = 2\int\frac{dx}{x},\ \ln(1+y^2) = 2\ln|x| + \ln|C|.$$
Обратите внимание на форму записи произвольной постоянной: если вид общего интеграла можно упростить потенцированием, удобно представить произвольную постоянную как логарифм другой произвольной постоянной. Тогда общий интеграл можно записать так: $1 + y^2 = Cx^2$.

К уравнению с разделяющимися переменными можно привести и уравнение вида
$$y' = f(ax + by + c), \qquad (4)$$
где a, b, c – постоянные. Для этого вводится новая функция $z = ax + by + c$. Поскольку $\frac{dz}{dx} = \frac{d(ax+by+c)}{dx} = a + by'$, $y' = \frac{z'-a}{b}$, и для z получаем уравнение с разделяющимися переменными: $z' = a + bf(z)$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y' = \sqrt{2x+y}$, удовлетворяющее условию $y(4) = 1$.

Решение. Пусть $z = 2x + y,\ z' = 2 + y',\ y' = z' - 2$. Решим уравнение для z:
$$z' - 2 = \sqrt{z},\ \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = dx,\ \int\frac{dz}{\sqrt{z}+2} = \int dx,\ t = \sqrt{z},\ \int\frac{2tdt}{t+2} = x + C,$$
$$\int\left(2 - \frac{4}{t+2}\right)dt = x + C,\ 2t - 4\ln|t+2| = x + C,\ 2\sqrt{2x+y} - \ln(\sqrt{2x+y}+2)^4 = x + C.$$
При $x = 4$, $y = 1$ получаем: $6 - 4\ln 5 = 4 + C$, откуда $C = 2 - 4\ln 5$.
Следовательно, частное решение имеет вид:
$$2\sqrt{2x+y} - \ln(\sqrt{2x+y}+2)^4 = x + 2 - 4\ln 5.$$

2. Однородные уравнения

Уравнение, которое можно записать в форме
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (5)$$
называется *однородным дифференциальным уравнением*. Оно тоже может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными для функции

$t=\dfrac{y}{x}$. При этом $y=tx,\ y'=t'x+t,$ и уравнение для t примет вид: $t'x+t=f(t),\ \dfrac{dt}{f(t)-t}=\dfrac{dx}{x}-$ уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3. Найти общий интеграл уравнения $xy'=y+x\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

Решение.

Разделим обе части равенства на x: $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ и сделаем замену: $t=\dfrac{y}{x}$.

Тогда $t'x+t=t+\sqrt{t},\ \displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int\frac{dx}{x},\ 2\sqrt{t}=\ln|x|+C,\ 2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|x|+C-$ общий интеграл уравнения.

К однородному уравнению, в свою очередь, можно привести уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \qquad (6)$$

при условии $\dfrac{a}{a_1}\neq\dfrac{b}{b_1}$. При этом производится параллельный перенос в плоскости (x,y) такой, чтобы начало координат совместилось с точкой $(x_0;y_0)$ пересечения прямых $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$. Тогда в новых координатах $\tilde{x},\tilde{y}$ уравнение будет выглядеть так: $\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\dfrac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}\right)$, или

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\frac{a+b\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_1+b_1\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)$$ - однородное уравнение.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'=\dfrac{2x+y-4}{y-2}$.

Решение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} \tilde{x}=x-1 \\ \tilde{y}=y-2 \end{cases}$, и в новых переменных (с учетом того, что $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{dy}{dx}$) получаем уравнение

$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{2\tilde{x}+\tilde{y}}{\tilde{y}}=\frac{5+\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}$. Замена $t=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ приводит к уравнению

$t'\tilde{x}+t=\frac{2+t}{t}$, $t'\tilde{x}=\frac{2+t}{t}-t=-\frac{t^2-t-2}{t}$, $\int\frac{t}{t^2-t-2}dt=-\int\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$,

$\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t-2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-\int\frac{dx}{\tilde{x}}$, $\frac{2}{3}\ln|t-2|+\frac{1}{3}\ln|t+1|=-\ln|\tilde{x}|+\ln|C|$. После упрощения и обратной замены получаем общее решение в виде:

$$\sqrt[3]{\frac{(y-2x)^2}{x(x+y-1)}}=\frac{C}{x-1}.$$

3. Уравнения в полных дифференциалах

Если в дифференциальном уравнении

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (7)$$

функции M (x, y) и N (x, y) удовлетворяют условию $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, такое уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах*. Смысл названия объясняется тем, что при этом существует функция U (x, y) такая, что $M(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}$, $N(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}$. Тогда из уравнения (7) следует, что $\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0 \Rightarrow dU=0 \Rightarrow u(x,y)=C$, что является общим интегралом исходного уравнения. Таким образом, задача сводится к отысканию функции U. Ее можно найти в виде: $U=\int\limits_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+\tilde{C}$, где x_0, y_0 – любые числа, входящие в область определения функций M и N, а $\tilde{C}$ - произвольная постоянная.

Пример 5. Решить задачу Коши для уравнения $(e^x + y)dx + (x - e^y)dy = 0$, если $y(1) = 1$.

Решение.
Проверим, действительно ли перед нами уравнение в полных дифференциалах: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 -$ условие выполнено. Для поиска $U(x, y)$ зададим $x_0 = y_0 = 0$, тогда

$U = \int_0^x (e^x + y)dx + \int_0^y (0 - e^y)dy = e^x + xy - 1 - e^y + 1 = e^x + xy - e^y$. При $x = y = 1$ найдем C из равенства $e^x + xy - e^y = C$: $e + 1 - e = C$, $C = 1$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $e^x + xy - e^y = 1$.

4. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида $$y' + a(x)y = b(x) \qquad (8)$$
называется *линейным неоднородным уравнением первого порядка*, поскольку искомая функция и ее производная входят в него в виде линейной комбинации. Если $b(x) \equiv 0$, уравнение является однородным, причем однородное линейное уравнение – это уравнение с разделяющимися переменными. На этом основан способ решения неоднородных линейных уравнений – *метод вариации постоянной*. Получив решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$ в виде $y = f(x, C)$, считают, что решение уравнения (8) имеет такой же вид, но $C = C(x)$ – не постоянная, а функция от x, вид которой можно определить, подставив $y = f(x, C(x))$ в уравнение (8).

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y' + 2y = e^x$.

Решение.
Решим однородное уравнение:
$y' + 2y = 0,\ \int \frac{dy}{y} = -2\int dx,\ \ln|y| = -2x + \ln|C|,\ y = Ce^{-2x}$. Теперь будем искать решение неоднородного уравнения в виде: $y = C(x) \cdot e^{-2x}$.
$y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$. Подставим y и y' в исходное уравнение: $C' \cdot e^{-2x} - 2C \cdot e^{-2x} + 2C \cdot e^{-2x} = e^x,\ C' = e^{3x},\ C = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \tilde{C}$, где $\tilde{C}$ - произвольная постоянная. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения: $y = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)e^{-2x} = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$.

К линейному можно привести и уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \qquad (9)$$

называемое *уравнением Бернулли*. Для этого вводится новая функция $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, для которой $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y' = \frac{(1-n)y'}{y^n}$. Разделим обе части уравнения (9) на y^n: $\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} = b(x)$, или $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z = b(x)$ – линейное уравнение для z.

Пример 7. Найти общий интеграл уравнения $xy' - y = x^2y^2$.

Решение.

Разделим обе части равенства на y^2: $x\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = x^2$ и сделаем замену: $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Решим уравнение для z: $-xz' - z = x^2$, $xz' + z = -x^2$. Однородное уравнение: $xz' + z = 0$, $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, $\ln|z| = -\ln|x| + \ln|C|$, $z_{одн} = \frac{C}{x}$, $z_{неодн} = \frac{C(x)}{x}$, $z'_{неодн} = \frac{C'x - C}{x^2}$. Подставим полученные выражения в неоднородное уравнение: $C' - \frac{C}{x} + \frac{C}{x} = -x^2$, $C = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + \tilde{C}$, $z = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x} = \frac{3C - x^3}{3x}$, $y = \frac{1}{z} = \frac{3x}{3C - x^3}$.

II. Уравнения высших порядков

1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (10)$$

называется уравнением n-го порядка. Его общее решение содержит n произвольных постоянных: $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, а решение задачи Коши требует задания при $x = x_0$ значений функции y и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Если в дифференциальное уравнение не входит явным образом искомая функция y, то есть уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (11)$$

то можно понизить его порядок на k единиц, сделав замену: $p(x) = y^{(k)}$.
Тогда $y^{(k+1)} = p', ..., y^{(n)} = p^{(n-k)}$.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y^{(4)} - ctgx \cdot y''' = 0$.

Решение.
Пусть $p(x) = y'''$, $p' = y^{(4)}$. Тогда

$$p' - ctgx \cdot p = 0,\ \int \frac{dp}{p} = \int ctgx dx,\ \ln|p| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,\ y''' = C_1 \sin x.$$

Теперь трижды проинтегрируем полученное равенство по x:

$$y'' = C_1 \int \sin x dx = -C_1 \cos x + C_2;\ \ y' = \int (-C_1 \cos x + C_2) dx = -C_1 \sin x + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int (-C_1 \sin x + C_2 x + C_3) dx = C_1 \cos x + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Если дифференциальное уравнение не содержит явно независимую переменную x:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (12)$$

то можно понизить его порядок на единицу, считая, что $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$, то есть вторая производная y выражается через первую производную p и т.д.

Пример 9. Решить задачу Коши для уравнения $y'' = yy'$, если $y(1)=2$, $y'(1)=2$.

Решение.
Замена $p(y) = y'$, $y'' = pp'$ приводит к уравнению $pp' = yp$, откуда:
а) $p = 0$, $y' = 0$, $y = C$, но $y'(1)=2 \neq 0$, значит, в этом случае решения нет;
б)

$$p' = y,\ \int dp = \int y dy,\ p = \frac{y^2}{2} + C_1,\ p(2) = 2 \Rightarrow 2 = 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow p = \frac{y^2}{2}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2}, \ \int \frac{2dy}{y^2} = \int dx, \ -\frac{2}{y} = x + C_2, \ y(1) = 2 \Rightarrow -1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = \dfrac{2}{2 - x}$.

2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (13)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – постоянные. Общее решение этого уравнения можно получить, решив *характеристическое уравнение*

$$l^n + a_1 l^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (14)$$

Каждый действительный корень λ_i этого уравнения кратности k соответствует линейной комбинации фундаментальных решений уравнения (13) в форме $(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{l_k}$. Пара комплексно сопряженных корней $(l_{1,2})_j = a \pm bi$ кратности m дает комбинацию фундаментальных решений вида $e^{ax}\left((C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right)\sin bx + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \ldots + \tilde{C}_m x^{m-1})\cos bx)$.

В частности, характеристическое уравнение для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (15)$$

является квадратным: $l^2 + a_1 l + a_2 = 0$. Поэтому общее решение уравнения (15) может иметь один из трех видов:

а) если дискриминант характеристического уравнения $D = a_1^2 - 4a_2 > 0$, а l_1, l_2 $(l_1 \neq l_2)$ – его различные действительные корни, то решение уравнения (15) выглядит так:

$$y = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x}; \qquad (16)$$

б) если $D = 0$, характеристическое уравнение имеет один корень λ_0, и общее решение уравнения (15) имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{l_0 x}; \qquad (17)$$

в) при $D < 0$ характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $l_{1,2} = a \pm bi$, а общее решение уравнения (15) записывается в форме:

$$y = e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx). \qquad (18)$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение.
Составим и решим характеристическое уравнение:
$l^2 - 5l + 6 = 0,\ \ l_1 = 2,\ \ l_2 = 3.$ Значит, общее решение записывается в виде (16): $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y''' = 0.$

Решение.
Характеристическое уравнение $l^5 + 4l^4 + 13l^3 = 0$ имеет один действительный корень $\lambda = 0$ кратности 3 и два комплексно сопряженных корня: $-2 \pm 3i$. Поэтому, так как $e^{0\cdot x} = 1$, общее решение записывается в форме (17) и (18):

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-2x}\left(C_4 \sin 3x + C_5 \cos 3x\right).$$

3. Решение неоднородных линейных уравнений методом подбора частного решения

Пусть требуется найти общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \qquad (19)$$

Его решение представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. При некоторых специальных видах неоднородности это частное решение можно подобрать по известной схеме.

1) Если $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то частное решение уравнения (19)

$$y_ч = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{kx}, \qquad (20)$$

если число k не является корнем характеристического уравнения, или

$$y_ч = x^s (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{kx}, \qquad (21)$$

если k – корень характеристического уравнения кратности s. Коэффициенты $A_0,\ A_1, \ldots,\ A_n$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, подставив $y_ч$ и его производные нужных порядков в уравнение (19).

2) При $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cdot \sin bx + Q_m(x)\cdot \cos bx)$, если числа $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение имеет вид:

$$y_ч = e^{ax}\left(\widetilde{P}_l(x)\cdot \sin bx + \widetilde{Q}_l(x)\cdot \cos bx\right), \qquad (22)$$

где $\widetilde{P}_l, \widetilde{Q}_l -$ многочлены с неопределенными коэффициентами одной и той же степени $l = \max(m, n)$.
Если же $a \pm bi$ – корни характеристического уравнения кратности s,

$$y_ч = e^{ax} \cdot x^s \left(\widetilde{P}_l(x) \cdot \sin bx + \widetilde{Q}_l(x) \cdot \cos bx\right). \qquad (23)$$

Если правая часть уравнения (19) представляет собой сумму функций, для каждой из которых можно подбором найти частное решение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение такого уравнения является суммой частных решений уравнений $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x)$ и $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_2(x)$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 2e^x$.

Решение.
Найдем общее решение однородного уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$. Характеристическое уравнение $l^3 - 2l^2 + l = 0$ имеет корни 0 (кратности 1) и 1 (кратности 2). Следовательно, $y_{одн} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$.
Перейдем к поиску частного решения. Поскольку число 1 – коэффициент при x в показателе степени правой части уравнения – является корнем характеристического уравнения кратности 2, ищем $y_ч$ в виде (21) при $s = 2$, $n = 0$: $y_ч = Ax^2e^x$. Тогда
$y'_ч = A(2xe^x + x^2e^x) = Ae^x(2x + x^2)$; $y''_ч = Ae^x(2x + x^2) + Ae^x(2 + 2x) =$
$= Ae^x(2 + 4x + x^2)$; $y'''_ч = Ae^x(2 + 4x + x^2) + Ae^x(4 + 2x) = Ae^x(6 + 6x + x^2)$.
Подставим полученные выражения в исходное неоднородное уравнение:
$Ae^x(6 + 6x + x^2) - 2Ae^x(2 + 4x + x^2) + Ae^x(2x + x^2) = 2e^x$,
$A(6 + 6x + x^2 - 4 - 8x - 2x^2 + 2x + x^2) = 2$, $2A = 2$, $A = 1$, $y_ч = x^2e^x$.
Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:
$y = C_1 + (C_2 + C_3 x + x^2)e^x$.

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y'' - y' = 3x + \sin 2x$.

Решение.
Характеристическое уравнение: $l^2 - l = 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения: $y_{одн} = C_1 + C_2 e^x$. Найдем частное решение, соответствующее неоднородности $f_1(x) = 3x$. Так как $\lambda = 0$ – корень характеристического уравнения, частное решение имеет вид (21): $y_{ч1} = x(Ax + B) =$
$= Ax^2 + Bx$. Поскольку $y'_{ч1} = 2Ax + B$, $y''_{ч1} = 2A$, при подстановке в уравнение

получаем: $2A - 2Ax - B = 3x$, откуда $2A - B = 0$, $-2A = 3$. Решая полученную систему, находим: $A = -\frac{3}{2}$, $B = -3$, $y_{ч1} = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$.

Для $f_2(x) = \sin 2x$ $y_{ч2}$ задаем по формуле (22) при $a = 0$, $b = 2$, $l = 0$:

$y_{ч2} = A\sin 2x + B\cos 2x$,

$y'_{ч2} = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$, $y''_{ч2} = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$.

Подставим в уравнение:

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 2A\cos 2x + 2B\sin 2x = \sin 2x$,

$-4A + 2B = 1$, $-4B - 2A = 0$. Отсюда $B = 0{,}1$, $A = -0{,}2$,

$y_{ч2} = -0{,}2\sin 2x + 0{,}1\cos 2x$.

Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения:

$$y = y_{одн} + y_{ч1} + y_{ч2} = C_1 + C_2e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 0{,}2\sin 2x + 0{,}1\cos 2x.$$

4. Решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных

Если неоднородность в правой части уравнения (19) не позволяет использовать формулы (20)-(23) для подбора частного решения, можно воспользоваться методом вариации постоянных.

Пусть решение однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (15) записано в виде: $y_{одн} = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1, y_2 – фундаментальная система решений. Будем считать, что при этом решение неоднородного уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ имеет вид: $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ можно определить из системы уравнений для их производных:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}. \qquad (24)$$

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' + 64y = tg8x$.

Решение.

Решим однородное уравнение: $\lambda^2 + 64 = 0$, $\lambda = \pm 8i$, $y_{одн} = C_1\cos 8x + C_2\sin 8x$, $y_{неодн} = C_1(x)\cos 8x + C_2(x)\sin 8x$. Составим вариационную систему:

$$\begin{cases} C_1'\cos 8x + C_2'\sin 8x = 0 \\ -8C_1'\sin 8x + 8C_2'\cos 8x = tg8x \end{cases}.$$ Получена линейная система для C_1' и C_2'.

Для ее решения умножим первое уравнение на $8\sin 8x$, а второе – на $\cos 8x$ и сложим левые и правые части полученных равенств:

$$8C_2'(\sin^2 8x + \cos^2 8x) = \cos 8x \cdot tg8x,\ \ C_2' = \frac{1}{8}\sin 8x,\ \ C_2(x) = \frac{1}{8}\int \sin 8x dx =$$

$$= -\frac{1}{64}\cos 8x + \widetilde{C}, \text{ где } \widetilde{C} = const.$$

Теперь исключим из системы C_2'. Для этого умножим первое уравнение на $8 \cos 8x$, а второе – на $-\sin 8x$:

$$8C_1'(\sin^2 8x + \cos^2 8x) = -\sin 8x \cdot tg 8x, \quad C_1' = -\frac{\sin^2 8x}{8\cos 8x},$$

$$C_1 = -\frac{1}{8}\int \frac{\sin^2 8x}{\cos 8x}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos^2 8x}{\cos 8x}dx = \frac{1}{8}\left(\int \cos 8x dx - \int \frac{1}{\cos 8x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{8}\int \frac{\cos 8x dx}{\cos^2 8x} = \frac{1}{64}\left(\sin 8x - \int \frac{d\sin 8x}{1-\sin^2 8x}\right) = \frac{1}{64}\left(\sin 8x + \ln\sqrt{\frac{1+\sin 8x}{1-\sin 8x}}\right) + \hat{C},$$

$\hat{C} = const$. Итак, общее решение исходного уравнения:

$$y = \left(C_2 - \frac{1}{64}\cos 8x\right)\sin 8x + \left(\frac{1}{64}\sin 8x + \frac{1}{128}\ln\frac{1+\sin 8x}{1-\sin 8x} + C_1\right)\cos 8x =$$

$$= C_1\cos 8x + C_2\sin 8x + \frac{1}{128}\ln\frac{1+\sin 8x}{1-\sin 8x}.$$

III. Системы однородных линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Для решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases}, \qquad (25)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – искомые функции, $a_{1,2}$, $b_{1,2} = const$, нужно решить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1 - l & b_1 \\ a_2 & b_2 - l \end{vmatrix} = 0. \qquad (26)$$

Если корни этого уравнения $l_1 \neq l_2$ действительные, то решением системы (25) будут функции вида $x = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t}$, $y = C_3 e^{l_1 t} + C_4 e^{l_2 t}$, причем произвольные постоянные C_3 и C_4 можно выразить через C_1 и C_2, подставив полученные функции в систему.

Пример 15. Решить задачу Коши для системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}$, если $x(0) = 2$, $y(0) = -5$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-l & 4 \\ 3 & 3-l \end{vmatrix} = 0,$

$l^2 - 5l - 6 = 0,\ \ l_1 = -1,\ \ l_2 = 6.$ Следовательно, $x = C_1e^{-t} + C_2e^{6t},$

$y = C_3e^{-t} + C_4e^{6t}.$ Тогда $\dfrac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + 6C_2e^{6t}.$ Подставим полученные выражения в первое уравнение системы:

$-C_1e^{-t} + 6C_2e^{6t} = 2C_1e^{-t} + 2C_2e^{6t} + 4C_3e^{-t} + 4C_4e^{6t},\ -C_1e^{-t} + 6C_2e^{6t} =$

$= (2C_1 + 4C_2) + (2C_2 + 4C_4)e^{6t}$, откуда

$\begin{cases} -C_1 = 2C_1 + 4C_3 \\ 6C_2 = 2C_2 + 4C_4 \end{cases},\ \ C_3 = -\dfrac{3}{4}C_1,\ \ C_4 = C_2.$

Итак, общее решение системы: $x = C_1e^{-t} + C_2e^{6t},\ \ y = -\dfrac{3}{4}C_1e^{-t} + C_2e^{6t}.$ При $t = 0$ получаем: $C_1 + C_2 = 2,\ \ -\dfrac{3}{4}C_1 + C_2 = -5,$ откуда $C_1 = 4$, $C_2 = -2$, и частное решение системы: $x = 4e^{-t} - 2e^{6t}$, $y = -3e^{-t} - 2e^{6t}$.

При совпадении корней характеристического уравнения (26) решением системы (25) будут функции $x = (C_1 + C_2t)e^{lt}$ и $y = (C_3 + C_4t)e^{lt}$, где λ – корень уравнения (26). Связь между C_1, C_2 и C_3, C_4 определяется аналогично предыдущему случаю.

Если корни характеристического уравнения – комплексно сопряженные числа $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$, решение системы (25) ищется в виде: $x = e^{at}(C_1\cos bt + C_2\sin bt),\ \ y = e^{at}(C_3\cos bt + C_4\sin bt).$

Задания для курсовой работы включают по 10 задач. В №№1-5 требуется решить задачу Коши или найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка, в №6-9 – решить уравнения высших порядков, в №10 – найти общее или частное решение однородной линейной системы.

ВАРИАНТЫ КУРСОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант №1

1) $(x+xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0$

2) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$

4) $y'+2xy=xe^{-x^2}, \quad y(0)=2.$

5) $yy'ctgx-\sin x(1-y^2)=0$

6) $y^{(5)}-\frac{1}{x}y^{(4)}=0$

7) $yy''-(y')^2=y'$

8) $y'''+y''-y'-y=xe^x-\sin x$

9) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=4x-y \\ \frac{dy}{dt}=x+2y \end{cases}, \quad x(0)=-1, \quad y(0)=0.$

Вариант №2

1) $y'tgx=y^2-3y+2$

2) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$

3) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=0$

4) $y\sin x+y'\cos x=1$

5) $xy(xy^2+1)dy-dx=0$

6) $y''+(y')^2=x(y')^2$

7) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$

8) $y'''-2y''+y'=2e^x+\cos 3x$

9) $y''+25y=ctg5x$

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=6x-y \\ \frac{dy}{dt}=3x+2y \end{cases}, \quad x(0)=1, \quad y(0)=-1.$

Вариант №3

1) $y' = e^{x-y}$ 2) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

3) $(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy = 0$

4) $y' - yctgx = 2x\sin x$ 5) $xdy + ydx = y^2dx$

6) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ 7) $\frac{1}{2}y'' = e^{4y}$

8) $y^{(4)} - 2y'' + y = 3e^{2x} + 4\sin x$

9) $y'' - 2y' + y = e^x\ln x$ 10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}$, $x(0) = -2,\ \ y(0) = -1.$

Вариант №4

1) $y' = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$ 2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$

3) $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy = 0$ 4) $y' + 5y = 10x + 2$

5) $2xyy' - y^2 + x = 0$ 6) $y'' - ctgx \cdot y' = ctgx$

7) $6yy'' - 5(y')^2 = 0$ 8) $y''' + 4y' = x - 3\sin 2x$

9) $3y'' - 6y' + 3y = \frac{e^x}{x}$ 10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}$, $x(0) = 0,\ \ y(0) = -2.$

Вариант №5

1) $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$

2) $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

3) $(3x^2y-y^3)dx+(x^3-3y^2x)dy=0$

4) $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$

5) $y'+\dfrac{y}{x}=xy^2$

6) $xy''=2y'-x$

7) $yy''=(y')^2$

8) $y^{(4)}-y'''-2y''=3x+\cos 3x$

9) $2y''-4y'+2y=\dfrac{e^x}{x}$

10) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-3y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y\end{cases}$, $x(0)=0,\ \ y(0)=-1.$

Вариант №6

1) $\operatorname{tg} y dx-\operatorname{ctg} x dy=0$

2) $(y^2-x^2)y'+2xy=0$

3) $\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$

4) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$

5) $xy'-y^2\ln x+y=0$

6) $xy''+y'=1+x$

7) $2(y')^2=y''(y-1)$

8) $y^{(4)}+9y''=x^2+2\cos 3x$

9) $y''+4y=tg2x$

10) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-6x-3y\end{cases}$, $x(0)=-2,\ \ y(0)=1.$

Вариант №7

1) $(1+e^x)yy' = e^x$

2) $y' = \dfrac{3x+y-1}{x-y-7}$

3) $\left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy = 0$

4) $y' = y + \sin x$

5) $y' - \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0$

6) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$

7) $y'' + (y')^2 = 1$

8) $y'' + 4y' + y = x\left(e^{-2x} - 3\right)$

9) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 4x - 4y = 0 \end{cases}$, $x(0) = -1,\ \ y(0) = 0.$

Вариант №8

1) $(4y + 2x + 3)y' - 2y - x - 1 = 0$

2) $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$

3) $y \cdot x^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$

4) $y' + 3y = e^{2x}$

5) $y' - \dfrac{3y}{x} + x^3y^2 = 0$

6) $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$

7) $y'' - 5(y')^2 tg5y = 0$

8) $y'' - 5y' - 6y = \sin 2x - x^2e^{-x}$

9) $y'' + 16y = \sin^3 x$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$, $x(0) = 1,\ \ y(0) = -2.$

Вариант №9

1) $(1+y^2)dx - y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

2) $y' = \left(1+\dfrac{y-1}{2x}\right)^2$

3) $2x\cos^2 y dx - (x^2-3)\sin 2y dy = 0$

4) $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0$

5) $xy' + y = xy^2 \ln x$

6) $xy'' - y'\ln\dfrac{y'}{x} = 0$

7) $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$

8) $y^{(6)} - y^{(4)} = 1$

9) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{9-x^2}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$, $x(0) = -1,\ \ y(0) = 0.$

Вариант №10

1) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

2) $xy' = y\cdot\cos^2 \ln\dfrac{y}{x}$

3) $(e^y+1)dx + xe^y dy = 0$

4) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$

5) $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$

6) $y'' + \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{1}{x^3}$

7) $yy'' + (y')^2 = 0$

8) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin 2x - \cos x$

9) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -2,\ \ y(0) = 0.$

Вариант №11

1) $xyy' = 1 - x^2$

2) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

3) $2xydx + (x^2 - e^y)dy = 0$

4) $y'(x + \sin y) = 1$

5) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

6) $xy'' = 2y' - x$

7) $yy'' + (y')^2 = yy'$

8) $y^{(4)} - 16y = x^2 - e^x$

9) $y'' + y = ctgx$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Вариант №12

1) $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$

2) $y' = \dfrac{y}{x} - x\sin x ctg\dfrac{y}{x}$

3) $ydx + (x + 6y^2)dy = 0$

4) $y = x(y' - x\cos x)$

5) $y' + 2y = e^x \cdot y^2$

6) $y'' + (y')^2 = x(y')^2$

7) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$

8) $y''' - 4y' = x(3 + e^{2x})$

9) $y'' - y = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$

Вариант №13

1) $\cos^2 x \cdot yy' = x$

2) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

3) $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$

4) $y' + 3y = e^{2x}$

5) $xy' - y = y^3$

6) $x^2 y''' + 2xy'' - 1 = 0$

7) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

8) $y''' + 9y' = x^2 - \sin 3x$

9) $y'' + y = tgx$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Вариант №14

1) $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$, $y(0) = 1$.

2) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$

3) $\left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$

4) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

5) $y' - xy = -y^3 e^{x^2}$

6) $xy'' - y' = e^x \cdot x^2$

7) $y'' tgy = 2(y')^2$

8) $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$

9) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Вариант №15

1) $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ \ y(e) = 1.$

2) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$

3) $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$

4) $xy' + y = \ln x + 1$

5) $3y^2y' + y^3 = x + 1$

6) $y''x\ln x = y'$

7) $2yy'' = 1 + (y')^2$

8) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$

9) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases},\ \ x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$

Вариант №16

1) $y' = \sqrt{2y + 3}tgx$

2) $y' = \dfrac{y^2 - 4x^2}{xy}$

3) $y' - \dfrac{y}{x^2} = \sqrt{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

4) $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y^2} = 0$

5) $\dfrac{y}{x}dx + (\ln x + \cos y)dy = 0$

6) $y'' + y(y')^3 = 0$

7) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$

8) $y'' - 6y' + 9y = \sin 2x$

9) $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}ctg\dfrac{x}{2}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

Вариант №17

1) $y' = \sqrt{y^2+2y-2} \cdot \dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$

2) $y' = \dfrac{y + x\sin^2 \frac{y}{x}}{x}$

3) $y' - xy = x$

4) $y' + \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = 0$

5) $\dfrac{y^2}{2\sqrt{x}}dx + 2\sqrt{x} \cdot ydy = 0$

6) $y''(y')^2 = 2y, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2$

7) $xy'' - y' = 0$

8) $y'' + 4y' + 20y = xe^x$

9) $y'' + 4y = ctg2x$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

Вариант №18

1) $y' = \dfrac{\sqrt[4]{3x-1}}{y^3\sin(y^4)}$

2) $y' = \dfrac{x^2 + xy + 4y^2}{x^2}$

3) $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}$

4) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y}$

5) $\dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot y}dx - \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}dy = 0$

6) $y''y^2 - 4y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -4$

7) $y''' = xe^{-x}$

8) $y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$

9) $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{e^{4x}}{x^3}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$

Вариант №19

1) $y' = \sqrt[3]{(3y+1)^2} \cdot ctgx$

2) $y' = \dfrac{y\left(1 - \ln^2\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)}{x}$

3) $y' + tgx \cdot y = \cos^2 x$

4) $y' - y = y^3$

5) $(x + 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6) $y''y + (y')^2 = 0$

7) $xy'' = 2x - y'$

8) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

9) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$

Вариант №20

1) $y' = \dfrac{\sin^2 x \cos x}{\sqrt[3]{2 - 5y}}$

2) $y' = \dfrac{x(x+y) + y^2}{x^2}$

3) $y' + \dfrac{y}{x} = x^4$

4) $y' - y = \dfrac{2}{y^2}$

5) $\dfrac{2x}{y}dx - \dfrac{x^2}{y^2}dy = 0$

6) $y''y' = 18y, \quad y(5) = 1, \quad y'(5) = 3.$

7) $2xy'' - y' = 0$

8) $y'' - 6y' + 5y = \cos x$

9) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

Вариант №21

1) $y' = tgy \cdot \dfrac{\ln^3 x}{x}$

2) $y' = \dfrac{y + y\ln^3 \dfrac{y}{x}}{x}$

3) $y' - tgx \cdot y = \sin^3 x$

4) $y' + xy = xy^2$

5) $xy^2 dx + (x^2 y + \cos y)dy = 0$

6) $yy'' - 3yy' - \dfrac{(y')^2}{2}$

7) $y'' ctgx - 2y' - 2 = 0$

8) $y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$

9) $y'' - y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$

Вариант №22

1) $y' = \dfrac{\sqrt{y^2 + 4y + 1}}{\sin^2(1 - 2x)}$

2) $y' = \dfrac{x(y + 9x) - y^2}{x^2}$

3) $y' = \dfrac{y}{x} + x \cdot \sqrt[3]{x}$

4) $y' - y = y^3$

5) $\dfrac{1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy = 0$

6) $y'' = 2yy'$

7) $y'' - x\sqrt{y'} = 0$

8) $y'' + 4y' + 13y = xe^x$

9) $y'' + y = ctgx$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 5y \end{cases}$

Вариант №23

1) $y' = \sqrt[3]{2y+3} \cdot x^2 \cos(x^3)$

2) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

3) $y' + \dfrac{y}{x} = \sqrt[3]{x}$

4) $y' + 2y = \dfrac{1}{y^2}$

5) $3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = 0$

6) $y'' y = (y')^2$

7) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$

8) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^x$

9) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$

Вариант №24

1) $y' = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{1 - x^6}}$

2) $y' = \dfrac{y + x ctg \dfrac{y}{x}}{x}$

3) $y' - \dfrac{y}{x} = \sqrt{x}$

4) $y' - 3y = \sqrt{y}$

5) $2x\sqrt{y} dx + \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}} dy = 0$

6) $y'' y - 2(y')^2 = 0$

7) $y' = (x-1) y''$

8) $y'' + y' = xe^{-x}$

9) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$

Вариант №25

1) $y' = \cos^2(3y-1)\dfrac{\ln^3 x}{x}$

2) $y' = \dfrac{9x^3 + xy(x+y)}{x^3}$

3) $y' + xy = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$

4) $y' - \dfrac{y}{x} - xy^2 = 0$

5) $2xy^2dx + (3y^2 + 2x^2y)dy = 0$

6) $y'' - y\sqrt{y'} = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 9$

7) $y''(e^x + 1) + y' = 0$

8) $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$

9) $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4} ctg \dfrac{x}{2}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$

Вариант №26

1) $y' = y^3 \cos^2 x \cdot \sin x$

2) $y' = \dfrac{y + x\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}}{x}$

3) $y' - \dfrac{y}{x^2} = xe^{-\frac{1}{x}}$

4) $y' - \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2} = 0$

5) $(2x + y)dx + xdy = 0$

6) $4(y')^2 + yy'' = 0$

7) $y'' + y' = xy''$

8) $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x + \sin x$

9) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

Вариант №27

1) $y' = \sqrt{y}\,\dfrac{\ln x}{x}$

2) $y' = \dfrac{y + x\sqrt{\dfrac{2x+y}{x}}}{x}$

3) $y' + x^2 y = 3x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}$

4) $y' + y^2 x - \dfrac{y}{x} = 0$

5) $\dfrac{2x}{y^3}dx - \left(\dfrac{3x^2}{y^4} + y^3\right)dy = 0$

6) $yy'' - (y')^2 \ln\left(\dfrac{y'}{4}\right) = 0$

7) $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$

8) $y'' - 7y' + 12y = (x+1)e^{3x}$

9) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

Вариант №28

1) $y' = \dfrac{\sin^2(2-4y)}{x^2 + 4x + 8}$

2) $y' = \dfrac{16x^3 + xy(x+y)}{x^3}$

3) $y' - xy = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$

4) $y' - \dfrac{y}{x} + x^2 y^2 = 0$

5) $(2x + y^3)dx + (3xy^2 + y^3)dy = 0$

6) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

7) $y'' = \sqrt{xy'}$

8) $y'' - 4y' + 3y = \cos 2x - \sin 2x$

9) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

Вариант №29

1) $y' = \sqrt[3]{2y+1}\,\dfrac{x}{9+x^2}$

2) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}$

3) $y' + xy = \sqrt{2x+1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

4) $y' + \dfrac{y}{x} - xy^3 = 0$

5) $y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy = 0$

6) $y'' = y'e^y$

7) $y'' = \dfrac{\sqrt{y'}}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

8) $y'' + 3y' - 4y = (2x+1)e^x$

9) $y'' + p^2 y = \dfrac{p^2}{\sin px}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$

Вариант №30

1) $y' = ctgy \cdot \sqrt[3]{4x-1}$

2) $y' = \dfrac{3x^2 + y^2}{xy}$

3) $y' - x^2 y = x^2 e^{\frac{x^3}{3}}$

4) $y' + \dfrac{y}{x} + x^2 y^3 = 0$

5) $-\dfrac{y^2}{x^2} dx + \left(\dfrac{2y}{x} + y^4\right) dy = 0$

6) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

7) $y'' + \dfrac{\sqrt{y'}}{x^2} = 0$

8) $y'' + 5y' - 6y = 3\cos 2x$

9) $y'' + \dfrac{1}{p^2} y = \dfrac{1}{p^2 \cos \frac{x}{p}}$

10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$