Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра “Высшая математика”

Н. Д. ВЫСК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

Москва 2001 г.

Лекция 1.
Определение матрицы. Определители второго и третьего порядков, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу). Методы вычисления определителей. Понятие об определителе n-го порядка.

Определение 1.1. **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: А – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, $i-$ номер строки, в которой стоит данный элемент, $j-$ номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Определение 1.2. Числа m и n называются **размерностями** матрицы.

Определение 1.3. Матрица называется **квадратной**, если m = n. Число n в этом случае называют **порядком** квадратной матрицы.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется определителем.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение 1.4. **Определителем второго порядка** называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Примеры.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -14 & -8 \end{vmatrix} = 7\cdot(-8) - (-14)\cdot 4 = -56 + 56 = 0.$

Определение 1.5. **Определителем третьего порядка** называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того, чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Примеры.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot(-5)(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-5)\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot(-1) = 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 - 14 = 0.$$

Определение1. 6. **Транспонированием** матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате получается матрица $A`$, называемая **транспонированной** по отношению к матрице $A$, элементы которой связаны с элементами $A$ соотношением $a`_{ij} = a_{ji}$.

Основные свойства определителей.

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

<u>Свойство 1.</u> Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad .$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{13}a_{21}a_{32}+ka_{12}a_{23}a_{31}-ka_{13}a_{22}a_{31}-ka_{12}a_{21}a_{33}-ka_{11}a_{23}a_{32}=$$

$$=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})= \quad k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство этого свойства следует из свойства 2 при k = 0.

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33}+a_{13}a_{11}a_{32}+a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{12}a_{31}-a_{12}a_{11}a_{33}-a_{11}a_{13}a_{32}=0.$$

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство следует из свойств 2 и 4.

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{11}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{21}a_{13}a_{32} =$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства можно провести самостоятельно, сравнив значения левой и правой частей равенства, найденные с помощью определения 1.5.

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство следует из свойств 7 и 5.

Разложение определителя по строке.

Определение1. 7. **Минором** элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Пример. Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

Определение1. 8. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей третьего порядка – так называемое разложение по строке или столбцу. Для этого докажем следующую теорему:

Теорема 1.1. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij,} \text{ где i=1,2,3.}$$

Доказательство.

Докажем теорему для первой строки определителя, так как для любой другой строки или столбца можно провести аналогичные рассуждения и получить тот же результат.

Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Тогда $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первому столбцу.

Заметим, что A_{31} при этом искать не требуется, так как $a_{31} = 0,$ следовательно, и $a_{31}A_{31} = 0.$ Найдем A_{11} и A_{21} : $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4.$ Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) = 6.$$

Определители более высоких порядков.

Определение1. 9. **Определитель n-го порядка**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма n! членов $(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из n! упорядоченных множеств $k_1, k_2, \ldots, k_n$, полученных r попарными перестановками элементов из множества 1,2,…,n.

Замечание 1. Свойства определителей 3-го порядка справедливы и для определителей n-го порядка.

Замечание 2. На практике определители высоких порядков вычисляют с помощью разложения по строке или столбцу. Это позволяет понизить порядок вычисляемых определителей и в конечном счете свести задачу к нахождению определителей 3-го порядка.

Пример. Вычислим определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по 2-му столбцу. Для этого найдем A_{32} и A_{42}:

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15, A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15.$ Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + (-1)(-15) = 30.$$

Лекция 2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера.

Определение 2.1. **Линейными операциями** над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение 2.2. **Линейной комбинацией** переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, где a_i – числа, x_i – переменные.

Определение 2.3. **Линейным уравнением** называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \qquad (2.1)$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Определение 2.4. Линейное уравнение называется **однородным**, если b = 0. В противном случае уравнение называется **неоднородным.**

Определение 2.5. **Системой линейных уравнений (линейной системой**) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{2.2}$$

где a_{ij}, b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Определение 2.6. **Решением** линейной системы (2.2) называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Метод Гаусса решения линейных систем.

Замечание. Линейная система (2.2) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Примеры:

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$. Единственным решением является пара чисел x = 1, y = 2.
2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$. Решением этой системы будут любые два числа x и y, удовлетворяющие условию y = 3 – x. Например, x=1, y=2; x=0, y=3 и т. д.
3. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Очевидно, что эта система не имеет решений, так как разность двух чисел не может принимать двух различных значений.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Если новые коэффициенты при x_2 не все равны нулю, можно таким же образом исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = \hat{b}_n \end{cases}. \tag{2.4}$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2.4) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.
Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Примеры:

1. Решим методом Гаусса систему $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15 \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$.

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое, а из третьего – первое, умноженное на 5.
Получим: $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -7y - 3z = -23 \\ -14y + 9z = -1 \end{cases}$. Теперь вычтем из третьего уравнения удвоенное второе, а затем разделим второе уравнение на –7 (коэффициент при y), а третье – на 15 (новый коэффициент при z). Система примет вид:

$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ y + \frac{3}{7}z = \frac{23}{7} \\ z = 3 \end{cases}$. Отсюда z=3, y=2, x=1 – единственное решение системы.

2. Система $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$ после исключения x из второго и третьего уравнений примет вид: $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -y - z = -7 \\ -y - z = -7 \end{cases}$. Если затем вычесть второе уравнение из третьего, то последнее уравнение станет тождеством 0=0. В системе осталось два уравнения: $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ y + z = 7 \end{cases}$. Ее решение можно записать в виде: x = -2, y – любое число, z = 7 – y. Таким образом, система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$. Применив к этой системе метод Гаусса, получим $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ -y-z=-5 \end{cases}$,

откуда $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ 0=2 \end{cases}$. Последнее равенство является неверным при любых значениях неизвестных, следовательно, система не имеет решения.

Правило Крамера.

Рассмотрим систему (2.3). Назовем **главным определителем** этой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что $\Delta \neq 0$. Умножим каждое уравнение системы (2.3) на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ элементов j-го столбца Δ.

Сложив затем все уравнения, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj}) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}. \qquad (2.5)$$

Отметим, что $a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$.

(j-й столбец)

(Результат получен из разложения определителя по j-му столбцу). Такой определитель равен 0 при $i \neq j$ и равен Δ при $i = j$. Правая часть равенства (2.5) представляет собой определитель Δ, в котором вместо j-го столбца стоит столбец свободных членов системы (2.3). Назовем такой определитель Δ_{x_j}. Рассматривая $j = 1, 2, \dots, n$, получим систему,

эквивалентную исходной: $\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}$ (2.6) . Разделив все уравнения на Δ, найдем

единственное решение: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Предположим теперь, что $\Delta = 0$. Тогда система (2.6) примет вид: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}$.

В этом случае, если все Δ_{x_j} =0, система выглядит так: $\begin{cases} 0\cdot x_1 = 0 \\ 0\cdot x_2 = 0 \\ .... \\ 0\cdot x_n = 0 \end{cases}$ и имеет бесконечно много решений. Если же хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0,$ система решений не имеет.

Таким образом, правило Крамера позволяет найти единственное решение системы (2.3) или сделать вывод о существовании бесконечного числа решений либо об их отсутствии:

1) **Если $\Delta \neq 0,$ система (2.3) имеет единственное решение, определяемое по формулам:** $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.
2) **Если $\Delta = \Delta_{x_j}$ =0, система имеет бесконечно много решений.**
3) **Если Δ =0, а хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0,$ система не имеет решений.**

Примеры:

1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15. \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$, решенную в предыдущем разделе методом Гаусса, и применим к ней правило Крамера. Найдем все нужные определители:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -105 \neq 0,$ следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -15 & -1 & -5 \\ 19 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -105, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -15 & -5 \\ 5 & 19 & 4 \end{vmatrix} = -210, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -15 \\ 5 & 1 & 19 \end{vmatrix} = -315.$$

Отсюда $x = \dfrac{-105}{-105} = 1, y = \dfrac{-210}{-105} = 2, z = \dfrac{-315}{-105} = 3.$

2. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$. Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ поскольку имеет два одинаковых столбца.

Следовательно, система не имеет единственного решения. Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z :

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0,$ поэтому система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$. Для этой системы $\Delta = \Delta_x = 0,$ но $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ следовательно, решений нет.

Лекция 3.
Операции над матрицами, их свойства. Обратная матрица, ее вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение матричных уравнений и линейных систем с помощью обратной матрицы.

Определение 3.1. Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определение 3.2. Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0.

Определение 3.3. Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

Линейные операции над матрицами.

1. Сложение матриц.

Определение 3.4. **Суммой матриц** А и В одинаковой размерности m×n называется матрица С той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц А и В, стоящих на тех же местах: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,..., m, j = 1,..., n.$

Свойства сложения:
1. А + В = В + А.
2. (А + В) + С = А + (В + С) .
3. Если О – нулевая матрица, то А + О = О + А = А

Замечание 1. Справедливость этих свойств следует из определения операции сложения матриц.
Замечание 2. Отметим еще раз, что складывать можно только матрицы **одинаковой размерности.**

Пример.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число.

Определение 3.5. **Произведением матрицы на число** называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Свойства умножения матрицы на число:
1. (km)A=k(mA).
2. k(A + B) = kA + kB.
3. (k + m)A = kA + mA.

Замечание 1. Справедливость свойств следует из определений 3.4 и 3.5.

Замечание 2. Назовем разностью матриц А и В матрицу С, для которой С + В =А, т.е. С = А + (-1)В.

Пример.

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $-4A=\begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$.

Перемножение матриц.

Выше было указано, что сложение матриц накладывает условия на размерности слагаемых. Умножение матрицы на матрицу тоже требует выполнения определенных условий для размерностей сомножителей, а именно: число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго.

Определение 3.6. **Произведением матрицы A размерности m×p и матрицы B размерности** $p\times n$ называется матрица C размерности $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, i=1,...,m,\ j=1,...,n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. При этом существует произведение AB, но не существует произведение BA. Размерность матрицы C=AB составляет 2×3. Найдем элементы матрицы C: $c_{11}=2\cdot 3+(-1)(-2)=8, c_{12}=2\cdot 1+(-1)\cdot 1=1, c_{13}=2\cdot(-5)+(-1)\cdot 4=-14,$
$c_{21}=4\cdot 3+5\cdot(-2)=2, c_{22}=4\cdot 1+5\cdot 1=9, c_{23}=4\cdot(-5)+5\cdot 4=0.$

Итак, $C=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -14 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 3.1 (без доказательства). Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Замечание. Операция перемножения матриц некоммутативна, т.е. $AB\neq BA.$ Действительно, если существует произведение AB, то BA может вообще не существовать из-за несовпадения размерностей (см. предыдущий пример). Если существуют и AB, и BA, то они могут иметь разные размерности (если $m\neq n$).

Для квадратных матриц одного порядка произведения AB и BA существуют и имеют одинаковую размерность, но их соответствующие элементы в общем случае не равны. Однако в некоторых случаях произведения AB и BA совпадают.

Рассмотрим произведение квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка:

$$AE=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}=A.$$

Тот же результат получим и для произведения EA. Итак, для любой квадратной матрицы A **AE = EA =A.**

Обратная матрица.

Определение 3.7. Квадратная матрица А называется **вырожденной**, если $\Delta_A = 0$, и **невырожденной**, если $\Delta_A \neq 0$.

Определение 3.8. Квадратная матрица В называется **обратной** к квадратной матрице А того же порядка, если $AB = BA = E$. При этом В обозначается A^{-1}.

Рассмотрим условие существования матрицы, обратной к данной, и способ ее вычисления.

Теорема 3.2. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

Доказательство.

1) Необходимость: так как $A \cdot A^{-1} = E,$ то $\Delta_A \cdot \Delta_{A^{-1}} = \Delta_E = 1$ (теорема 3.1), поэтому $\Delta_A \neq 0.$
2) Достаточность: зададим матрицу A^{-1} в следующем виде:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix}.$$

Тогда любой элемент произведения $A \cdot A^{-1}$ (или $A^{-1} \cdot A$), не лежащий на главной диагонали, равен сумме произведений элементов одной строки (или столбца) матрицы А на алгебраические дополнения к элементам друго столбца и, следовательно, равен 0 (как определитель с двумя равными столбцами). Элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\frac{1}{\Delta_A} \cdot \Delta_A = 1.$ Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$. Теорема доказана.

Замечание. Сформулируем еще раз **способ вычисления обратной матрицы: ее элементами являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы А, деленные на ее определитель.**

Пример.

Найдем матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

$\Delta_A = -6 \neq 0,$ следовательно, матрица А невырожденная. Найдем алгебраические дополнения к ее элементам:

$A_{11} = -1, A_{12} = 7, A_{13} = 2, A_{21} = -1, A_{22} = -5, A_{23} = -4, A_{31} = -1, A_{32} = 1, A_{33} = 2.$ Не забудем, что алгебраические дополнения к элементам **строки** матрицы А образуют в обратной матрице

столбец с тем же номером. Итак, $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Можно убедиться, что найденная матрица действительно удовлетворяет определению A^{-1}. Найдем

$$A\cdot A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тот же результат получим и при перемножении в обратном порядке.

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим линейную систему (2.3): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ и введем следующие обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов. Тогда систему (2.3) можно записать в виде матричного уравнения: AX = B. (3.1)

Пусть матрица А – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}. Умножим обе части равенства (3.1) слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Но $A^{-1}A = E$, тогда $EX = A^{-1}B$, а поскольку $EX = X, X = A^{-1}B.$ (3.2)

Итак**, решением матричного уравнения (3.1) является произведение матрицы, обратной к А, на столбец свободных членов системы (2.3).**

Пример. Вернемся к системе $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y - 5z = -15. \\ 5x + y + 4z = 19 \end{cases}$

Для нее $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\Delta_A = -105$. Найдем A^{-1}:

$A_{11} = 1, A_{12} = -33, A_{13} = 7, A_{21} = -13, A_{22} = 9, A_{23} = 14, A_{31} = -16, A_{32} = 3, A_{33} = -7.$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1 & -13 & -16 \\ -33 & 9 & 3 \\ 7 & 14 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1}B = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 13(-15) - 16\cdot 19 \\ -33\cdot 4 + 9(-15) + 3\cdot 19 \\ 7\cdot 4 + 14(-15) - 7\cdot 19 \end{pmatrix} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -105 \\ -210 \\ -315 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, x = 1, y = 2, z = 3.

Лекция 4.
Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы. Совместность систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Структура общего решения однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений.

Определение 4.1. **Минором порядка k** матрицы A называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов данной матрицы.

Замечание. Таким образом, каждый элемент матрицы является ее минором 1-го порядка.

Определение 4.2. **Ранг матрицы** – это порядок ее наибольшего ненулевого минора.

Обозначения: r(A), R(A), Rang A.

Замечание. Очевидно, что значение ранга матрицы не может превышать меньшей из ее размерностей.

Примеры:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, r(A)=0.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица B содержит единственный ненулевой элемент - $b_{11} = 1$, являющийся минором 1-го порядка. Все определители более высоких порядков, составленные из элементов этой матрицы, будут содержать 0-ю строку и поэтому равны 0. Следовательно, r(B)=1.

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Единственным минором 3-го порядка является определитель матрицы C, но он равен 0, поскольку содержит пропорциональные столбцы. Следовательно, r(C)<3. Для того, чтобы доказать, что r(C)=2, достаточно указать хотя бы один минор 2-го порядка, не равный 0, например, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$ Значит, r(C)=2.

4. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta_E = 1 \neq 0,$ следовательно, r(E)=3.

Замечание. Для матриц большой размерности непосредственное вычисление всех миноров затруднительно. Поэтому в этом случае можно преобразовать матрицу к так называемому треугольному виду (когда элементы, стоящие ниже a_{ii}, равны 0), воспользовавшись операциями, не изменяющими ранг матрицы (**эквивалентными преобразованиями**). К ним относятся:

1) транспонирование
2) умножение строки на ненулевое число
3) перестановка строк
4) прибавление к элементам данной строки элементов любой другой строки, умноженных на ненулевое число
5) вычеркивание нулевой строки.

Действительно, любая из этих операций переводит нулевые миноры в нулевые, а ненулевые – в ненулевые. Матрица, полученная в результате, не равна исходной, но имеет тот же ранг.

Пример. Найдем ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Теоретически ранг этой матрицы может принимать значения от 1 до 4, так как из элементов матрицы можно создать миноры по 4-й порядок включительно. Но вместо того, чтобы вычислять все возможные миноры 4-го, 3-го и т.д. порядка, применим к матрице A эквивалентные преобразования. Вначале добьемся того, чтобы в первом столбце все элементы, кроме первого, равнялись 0. Для этого запишем вместо второй строки ее сумму с первой, а вместо третьей – разность третьей и удвоенной первой:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем из третьей строки вычтем вторую, а к четвертой прибавим вторую:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После вычеркивания нулевых строк получим матрицу размерности 2×5, для которой максимальный порядок миноров, а, следовательно, и максимально возможное значение ранга равно 2:

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ следовательно, $r(\tilde{\tilde{\tilde{A}}}) = r(A) = 2.$

Теорема о ранге.

Определение 4.3. **Базисным минором** матрицы называется любой ее ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Определение 4.4. Строки (столбцы) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, не все коэффициенты в которой равны 0, равная нулевой строке (столбцу).
В противном случае строки (столбцы) называются **линейно независимыми**.

Замечание. Можно доказать, что необходимым и достаточным условием линейной зависимости строк матрицы является то, что одна из них является линейной комбинацией остальных.
Теорема 4.1. Строки и столбцы матрицы, элементы которых входят в базисный минор, линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией этих строк (столбцов).

Доказательство (для строк).
1. Если бы базисные строки были линейно зависимыми, то с помощью эквивалентных преобразований из них можно было бы получить нулевую строку, что противоречит условию, что базисный минор не равен 0.
2. Строка, входящая в базисный минор, является линейной комбинацией его строк, в которой коэффициент при данной строке равен 1, а остальные коэффициенты равны 0. Докажем это свойство для строки, не входящей в базисный минор.
Добавим к базисному минору эту строку (пусть ее номер – k) и любой столбец матрицы (пусть его номер – j). Затем разложим полученный определитель, равный 0 (так как его порядок больше ранга матрицы) по j-му столбцу:
$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{rj}A_{rj} + a_{kj}A_{kj} = 0$. Поскольку A_{kj} является базисным минором, $A_{kj} \neq 0$, поэтому, разделив полученное равенство на A_{kj}, найдем, что

$a_{kj} = l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + ... + l_r a_{rj}$ для всех j=1,2,…,n, где $l_i = -\dfrac{A_{ij}}{A_{kj}}$. Следовательно, выбранная строка является линейной комбинацией базисных строк. Теорема доказана.

Совместность линейных систем.

Определение 4.5. Линейная система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Определение 4.6. Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Назовем расширенной матрицей системы (2.2) матрицу вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$ а матрицей системы – матрицу из коэффициентов при неизвестных.

Теорема 4.2 (теорема Кронекера-Капелли). Система (2.2) совместна тогда и только тогда, если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство.
1) Необходимость: пусть система (2.2) совместна и $c_1, c_2, ..., c_n$ – ее решение. Тогда

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}, \qquad (4.1)$$

то есть столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы и, следовательно, столбцов любого ее базисного минора. Поэтому добавление элементов этого столбца и любой строки расширенной матрицы к базисному минору даст нулевой определитель, то есть $r(A_1) = r(A)$.

2) Достаточность: если $r(A_1) = r(A)$, то любой базисный минор матрицы A является и базисным минором расширенной матрицы. Поэтому столбец свободных членов представляет собой линейную комбинацию столбцов этого базисного минора, и, следовательно, линейную комбинацию всех столбцов матрицы A. Если обозначить коэффициенты этой линейной комбинации $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то эти числа будут решением системы (2.2), т.е. эта система совместна. Теорема доказана.

Общее решение однородной линейной системы.

Рассмотрим однородную линейную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \qquad (4.2)$$

Отметим, что такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, называемое тривиальным.

Пусть ранг матрицы системы r<n. Предположим, что в базисный минор входят коэффициенты первых r уравнений. Тогда оставшиеся m – r уравнений являются линейными комбинациями, то есть следствиями предыдущих. Поэтому можно оставить в системе только первые r уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Оставим в левой части каждого уравнения неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, а остальные неизвестные перенесем направо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}. \qquad (4.3)$$

Эта система будет иметь единственное решение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, выражающее их через остальные неизвестные ($x_{r+1}, \ldots, x_n$), которым можно придавать любые произвольные значения. Таким образом, система (4.2) при r<n является неопределенной.

Определение 4.7. Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор матрицы системы, называются **базисными неизвестными**, а остальные ($x_{r+1}, ..., x_n$) – **свободными неизвестными.**

Определение 4.8. Решения системы (4.2) $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ ... \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ ... \\ x_{n2} \end{pmatrix}, ..., X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ ... \\ x_{nk} \end{pmatrix}$ (4.4)

называются **линейно независимыми**, если линейная комбинация $a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_k X_k$ дает нулевой столбец только при $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$.

Покажем, что число линейно независимых решений системы (4.2) равно n – r.
Действительно, рассмотрим столбцы вида

$$\tilde{X}_{r+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{X}_{r+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \tilde{X}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

содержащие по n-r чисел. Очевидно, что эти столбцы линейно независимы, а любой другой столбец той же размерности является их линейной комбинацией. Пусть эти столбцы задают значения свободных неизвестных системы (4.2).
Тогда базисные неизвестные будут однозначно определяться для выбранных свободных неизвестных из системы (4.3) по правилу Крамера, и все решения системы, соответствующие наборам свободных неизвестных (4.5), образуют n-r линейно независимых столбцов вида (4.4), то есть n-r линейно независимых решений системы (4.2).

Определение 4.9. Любые n – r линейно независимых решений системы (4.2) называются ее **фундаментальной системой** решений.

Определение 4.10. Фундаментальная система решений линейной однородной системы, в которой свободные неизвестные задаются по формулам (4.5), называется **нормальной фундаментальной системой решений.**

Замечание. Очевидным образом доказываются свойства решений однородной линейной системы (4.2):
Свойство 1. Сумма решений системы (4.2) является ее решением.
Свойство 2. Столбец решений (4.2), умноженный на любое число, тоже есть решение этой системы.

Следовательно, любая линейная комбинация фундаментальной системы решений системы (4.2) является ее решением. Можно доказать и обратное утверждение:

Теорема 4.3(без доказательства). Любое решение однородной линейной системы (4.2) является линейной комбинацией фундаментальной системы ее решений.

Таким образом, любое решение системы (4.2) имеет вид:
$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_{n-r} X_{n-r}$, где $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ - фундаментальная система решений.

Пример.

Решим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Найдем ранг матрицы системы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Преобразуем ее к виду: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что r(A)=2.

Пусть x_1, x_2 - базисные неизвестные, x_3, x_4 - свободные неизвестные. Заменим исходную систему системой из первых двух уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор, и перенесем базисные неизвестные в правые части уравнений:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Пусть $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда $x_1 = -1{,}4; x_2 = 0{,}4$. Если $x_3 = 0, x_4 = 1$, то $x_1 = -1, x_2 = 0$. Получена фундаментальная система решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь общее решение системы можно записать в виде: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$, где C_1 и C_2 – любые произвольные числа.

Структура общего решения неоднородной линейной системы.

Рассмотрим неоднородную линейную систему (2.2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Докажем следующие свойства ее решений:

<u>Свойство 1.</u> Сумма любого решения системы (2.2) и любого решения соответствующей однородной системы (4.2) является решением системы (2.2).

Доказательство.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – решение системы (2.2), а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – решение системы (4.2) с теми же коэффициентами при неизвестных. Подставим в систему (2.2) $x_i = c_i + d_i$:

$$\begin{cases} a_{11}(c_1 + d_1) + a_{12}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{1n}(c_n + d_n) = b_1 \\ a_{21}(c_1 + d_1) + a_{22}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{2n}(c_n + d_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}(c_1 + d_1) + a_{m2}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{mn}(c_n + d_n) = b_m \end{cases}.$$

После перегруппировки слагаемых получим:

$$\begin{cases} (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n) + (a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \ldots + a_{1n}d_n) = b_1 \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n) + (a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + \ldots + a_{2n}d_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n) + (a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \ldots + a_{mn}d_n) = b_m \end{cases}.$$

Но $a_{i1}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n = b_i, a_{i1}d_1 + \ldots + a_{in}d_n = 0.$ Следовательно, $x_i = c_i + d_i$ является решением системы (2.2).

<u>Свойство 2.</u> Разность любых двух решений неоднородной системы (2.2) является решением соответствующей однородной системы (4.2).

Доказательство.
Пусть $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$ и $d''_1, d''_2, \ldots, d''_n$ - решения системы (2.2). Тогда
$a_{i1}(d'_1 - d''_1) + a_{i2}(d'_2 - d''_2) + \ldots + a_{in}(d'_n - d''_n) = (a_{i1}d'_1 + a_{i2}d'_2 + \ldots + a_{in}d'_n) - (a_{i1}d''_1 + a_{i2}d''_2 + \ldots +$
$= b_i - b_i = 0.$
Утверждение доказано.

<u>Следствие</u>**. Общее решение неоднородной системы (2.2) представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы (4.2) и частного решения системы (2.2).**

Пример.

Общее решение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ можно записать в виде:

$X = C_1\begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$- частное решение данной системы.

Лекция 5.
Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение.

Определение 5.1. **Вектором** называется направленный отрезок.

Обозначения: **a**, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Определение 5.2. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

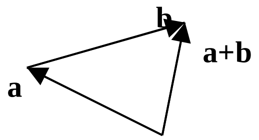
Вектор называется нулевым, если его начальная и конечная точки совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Определение 5.3. Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину (модуль) и одинаковое направление.

Замечание. Таким образом, мы изучаем так называемые **свободные** векторы, начальная точка которых может быть выбрана произвольно. Векторы, для которых важна точка приложения, называются присоединенными (связанными) и используются в некоторых разделах физики.

Линейные операции над векторами.

Определение 5.4. **Суммой *a* + *b*** векторов ***a*** и ***b*** называется вектор, идущий из начала вектора ***a*** в конец вектора ***b***, если начало вектора ***b*** совпадает с концом вектора ***a***.

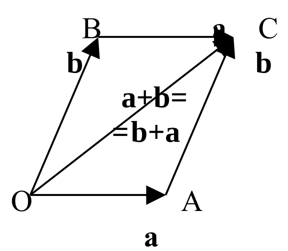


Замечание. Такое правило сложения векторов называют **правилом треугольника.**

Свойства сложения:

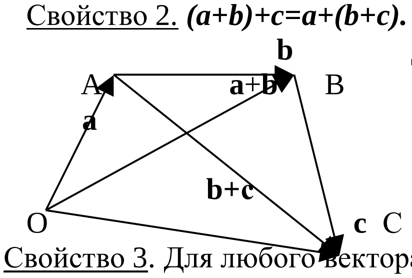
<u>Свойство 1.</u> ***a* + *b* = *b* + *a*.**

Доказательство. Приложим векторы ***a*** и ***b*** к общему началу и рассмотрим параллелограмм AOBC. Из определения 5.4 и треугольника OBC следует, что **OC=*b*+*a*,** а из треугольника OAC – **OC=*a*+*b*.** Свойство 1 доказано.



Замечание. При этом сформулировано еще одно правило сложения векторов – правило параллелограмма: сумма векторов ***a*** и ***b*** есть диагональ параллелограмма, построенного на них как на сторонах, выходящая из их общего начала.

<u>Свойство 2.</u> ***(a+b)+c=a+(b+c).***



Доказательство. Из рисунка видно, что

***(a+b)+c*=(OA+AB)+BC=OB+BC=OC,**

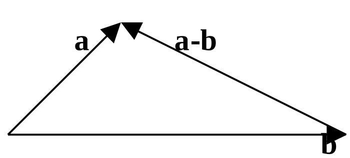
***a*+(*b*+*c*)=OA+(AB+BC)=OA+AC=OC.**

Свойство 2 доказано.

<u>Свойство 3</u>. Для любого вектора ***a*** существует нулевой вектор **O** такой, что ***a*+O=a**.
Доказательство этого свойства следует из определения 5.4.

<u>Свойство 4.</u> Для каждого вектора ***a*** существует противоположный ему вектор ***a***$^/$ такой, что ***a*+*a***$^/$**=O**.
Доказательство. Достаточно определить ***a***$^/$ как вектор, коллинеарный вектору ***a***, имеющий одинаковую с ним длину и противоположное направление.

Определение 5.5. **Разностью *a* – *b*** векторов ***a*** и ***b*** называется такой вектор ***c***, который в сумме с вектором ***b*** дает вектор ***a***.



Определение 5.6. **Произведением** $k\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число k называется вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, имеющий модуль, равный $|k||\boldsymbol{a}|$, и направление, совпадающее с направлением $\boldsymbol{a}$ при $k>0$ и противоположное $\boldsymbol{a}$ при $k<0$.

Свойства умножения вектора на число:
<u>Свойство 1.</u> $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$.
<u>Свойство 2.</u> $(k + m)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}$.
<u>Свойство 3.</u> $k(m\boldsymbol{a}) = (km)\boldsymbol{a}$.

Следствие. Если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$.

Базис и координаты вектора.

Определение 5.7. **Линейной комбинацией** векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ называется выражение вида: $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + k_n\boldsymbol{a}_n$, (5.1)
где k_i – числа.

Определение 5.8. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если найдутся такие числа $k_1, k_2,\dots, k_n$, не все равные нулю, что соответствующая линейная комбинация векторов равна нулю, т.е. $k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + k_n\boldsymbol{a}_n = 0$. (5.2)
Если же равенство (5.2) возможно только при всех $k_i = 0$, векторы называются **линейно независимыми**.

Замечание 1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Замечание 2. Если среди n векторов какие-либо (n-1) линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.

Замечание 3. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Определение 5.9. Векторы называются **компланарными**, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Замечание 4. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Замечание 5. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.

Определение 5.10. Два линейно независимых вектора на плоскости (или три линейно независимых вектора в пространстве) образуют **базис**, если любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде их линейной комбинации. Числовые коэффициенты этой линейной комбинации называются **координатами** данного вектора в рассматриваемом базисе:
если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – базис и $\boldsymbol{d} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}$, то числа k, m, p есть координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

<u>Свойства базиса:</u>
1. Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора – базис в пространстве.

2. Разложение данного вектора по данному базису единственно, т.е. его координаты в данном базисе определяются единственным образом.
3. При сложении двух векторов их координаты относительно любого базиса складываются.
4. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Определение 5.11. **Проекцией** вектора **AB** на ось u называется длина направленного отрезка $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ оси u, где A' и B' - основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось u.
Обозначение: $пр_u \mathbf{a}$.

Свойства проекции:
1. $Пр_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi$, где φ – угол между **a** и осью u.
2. При сложении двух векторов их проекции на любую ось складываются.
3. При умножении вектора на число его проекция на любую ось умножается на это число.

Замечание. Свойства 2 и 3 назовем линейными свойствами проекции.

Рассмотрим декартову систему координат, базис которой образуют в пространстве три попарно ортогональных единичных вектора ***i, j, k***. Тогда любой вектор ***d*** может быть представлен в виде их линейной комбинации:

$$\boldsymbol{d} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \qquad (5.3)$$

Определение 5.12. Числа *X, Y, Z* называются **декартовыми координатами** вектора ***d***.

Замечание. Декартовы координаты вектора равны его проекциям на оси Ox, Oy и Oz декартовой системы координат.

Определение 5.13. Косинусы углов, образованных вектором о осями декартовой системы координат, называются его **направляющими косинусами**.

Свойства направляющих косинусов:
1. $X = |\boldsymbol{d}| \cos\alpha$, $Y = |\boldsymbol{d}| \cos\beta$, $Z = |\boldsymbol{d}| \cos\gamma$.
2. $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
3. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Скалярное произведение векторов.

Определение 5.14. **Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\varphi . \qquad (5.4)$$

Обозначения скалярного произведения: ***ab, (ab), a·b*** .

Свойства скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\, пр_a \boldsymbol{b}$.

Доказательство. По свойству проекции $пр_a \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos\varphi$, следовательно, $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\, пр_a \boldsymbol{b}$.

2. $\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 3. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

4. $(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{ab})$. 5. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

6. $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$, где $\boldsymbol{a}^2$ называется скалярным квадратом вектора **a**.

7. Если векторы ***a*** и ***b*** определены своими декартовыми координатами

$$\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad (5.5)$$

то $$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 . \quad (5.6)$$

Доказательство. Используя формулу (5.3), получим:

$$\boldsymbol{ab} = (X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k})(X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}) .$$

Используя свойства 4 и 5, раскроем скобки в правой части полученного равенства:

$\boldsymbol{ab} = X_1X_2\boldsymbol{ii} + Y_1Y_2\boldsymbol{jj} + Z_1Z_2\boldsymbol{kk} + X_1Y_2\boldsymbol{ij} + X_1Z_2\boldsymbol{ik} + Y_1X_2\boldsymbol{ji} + Y_1Z_2\boldsymbol{jk} + Z_1X_2\boldsymbol{ki} + Z_1Y_2\boldsymbol{kj}$.

Но $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$ по свойству 6, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{kj} = 0$ по свойству 2, поэтому

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 .$$

8. $$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} . \quad (5.6)$$

Замечание. Свойства 2, 3, 4 доказываются из определения 5.14, свойства 5, 6 – из свойств проекции, свойство 8 – из свойства 7 и свойств направляющих косинусов.

Пример.

$\boldsymbol{a} = \{1, -5, 12\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, 5, 2\}$. Найдем скалярное произведение векторов ***a*** и ***b*** :

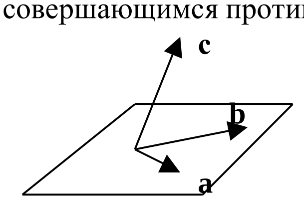
$\boldsymbol{ab} = 1\cdot1 + (-5)\cdot5 + 12\cdot2 = 1 - 25 + 24 = 0$. Следовательно, векторы ***a*** и ***b*** ортогональны.

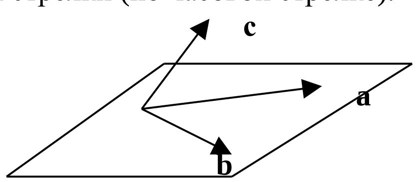
Лекция 6.

Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведения. Условия коллинеарности и компланарности векторов.

Будем называть три вектора ***a,b,c***, для которых определен порядок следования, **тройкой** (или упорядоченной тройкой) векторов.

Определение 6.1. Тройка некомпланарных векторов ***abc*** называется правой (левой), если после приведения к общему началу вектор **с** располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами ***a*** и ***b***, откуда кратчайший поворот от ***a*** к ***b*** кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).





abc – правая тройка ***abc*** – левая тройка

Замечание. В дальнейшем будем рассматривать только **правые системы координат**, т.е. системы, базисные векторы которых образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов.

Определение 6.2. Вектор ***c*** называется **векторным произведением** векторов ***a*** и ***b*,** если:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между ***a*** и ***b*.**
2) $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$.

3) Тройка векторов ***abc*** является правой.

Обозначения векторного произведения: $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Свойства векторного произведения.

1) $[\boldsymbol{ba}] = -[\boldsymbol{ab}]$.

Доказательство. Вектор $-\boldsymbol{c}$ удовлетворяет первым двум условиям определения векторного произведения и образует с векторами ***b*** и ***a*** правую тройку векторов.

2) $[\boldsymbol{ab}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Доказательство. Из первого пункта определения 6.2 следует, что модуль векторного произведения ненулевых векторов равен нулю только при $\sin\varphi = 0$, что соответствует коллинеарности векторов ***a*** и ***b***.

3) Модуль векторного произведения $|[\boldsymbol{ab}]|$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a*** и ***b***.

Доказательство следует из первого пункта определения 6.2.

Определение 6.3. **Орт $\boldsymbol{e_a}$** произвольного вектора ***a*** – это вектор единичной длины, коллинеарный ***a*** и одинаково с ним направленный ($|\boldsymbol{e_a}| = 1$, $\boldsymbol{e_a} \parallel \boldsymbol{a}$).

Следствие из свойства 3. $[\boldsymbol{ab}] = S\boldsymbol{e}$, где ***e*** – орт вектора $[\boldsymbol{ab}]$.

4) $[(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = k[\boldsymbol{ab}]$.
5) $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.
6) Если в декартовой системе координат $\boldsymbol{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$, то

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Представим векторы ***a*** и ***b*** в виде: $\boldsymbol{a} = X_a\boldsymbol{i} + Y_a\boldsymbol{j} + Z_a\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = X_b\boldsymbol{i} + Y_b\boldsymbol{j} + Z_b\boldsymbol{k}$. Отметим, что $[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{ii}] = [\boldsymbol{jj}] = [\boldsymbol{kk}] = 0$. Тогда с использованием свойств 4 и 5 получим:

$[(X_a\boldsymbol{i} + Y_a\boldsymbol{j} + Z_a\boldsymbol{k})(X_b\boldsymbol{i} + Y_b\boldsymbol{j} + Z_b\boldsymbol{k})] = (Y_aZ_b - Y_bZ_a)\boldsymbol{i} + (X_bZ_a - X_aZ_b)\boldsymbol{j} + (X_aY_b - X_bY_a)\boldsymbol{k}$,
что доказывает свойство 6.

Пример. Вычислим векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = \{3, -4, 2\}$ и $\boldsymbol{b} = \{1, 5, 1\}$.

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right\} = \{-14, -1, 19\}.$$

Смешанное произведение векторов.

Определение 6.4. **Смешанным произведением** векторов ***a***, ***b*** и ***c*** называется результат скалярного умножения векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ на вектор ***c***.

Обозначение: ***abc*** = [***ab***]***c***.

Свойства смешанного произведения.

1) Смешанное произведение [***ab***]***c*** равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a,b,c,*** если они образуют правую тройку, или числу, противоположному этому объему, если ***abc*** – левая тройка. Если ***a,b*** и ***c*** компланарны, то [***ab***]***c*** = 0.

Доказательство.

а) Если ***a,b*** и ***c*** компланарны, то вектор [***ab***] ортогонален плоскости векторов ***a*** и ***b,*** и, следовательно, [***ab***]$\perp$***c***. Поэтому [***ab***]***c*** = 0.

в) Если ***a,b,c*** не компланарны, [***ab***]***c*** = |[***ab***]||***c***| = S·|***c***|cosφ, где φ – угол между ***c*** и [***ab***]. Тогда $\pm$ |***c***|cosφ – высота рассматриваемого параллелепипеда. Таким образом, [***ab***]***c*** =$\pm$V, где выбор знака зависит от величины угла между ***c*** и [***ab***]. Утверждение доказано.

Следствие. [***ab***]***c*** = ***a***[***bc***].

Действительно, обе части равенства представляют объем одного и того же переллелепипеда. Поэтому положение векторных скобок в смешанном произведении не важно, и в его обозначении скобки не ставятся : ***abc***.

2) Если ***a*** = $\{X_a, Y_a, Z_a\}$, ***b*** = $\{X_b, Y_b, Z_b\}$, ***c*** = $\{X_c, Y_c, Z_c\}$, то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Используя координатную запись скалярного и векторного произведения, запишем:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = (Y_aZ_b - Y_bZ_a)X_c + (X_bZ_a - X_aZ_b)Y_c + (X_aY_b - X_bY_a)Z_c = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Найдем смешанное произведение векторов **a** = {-3, 2, -1}, **b** = {2, 1, 0}, **c** = {-1, 3, -1}. Для этого вычислим определитель, составленный из их коодинат:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$ следовательно, векторы компланарны.

Пример 2. Найдем объем пирамиды с вершинами в точках A(0, -3, -1), B(3, 3, 2), C(1, 0, -3) и D(2, -1, 1).

Отметим, что объем пирамиды ABCD в 6 раз меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах **AB, AC** и **AD**. Найдем координаты этих векторов:

AB = {3,6,3}, **AC** = {1,3,-2}, **AD** = {2,2,2}. Тогда **AB AC AD** = $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$

Следовательно, объем пирамиды равен 18:3 =6.