

## Лекция 7.

**Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Их свойства и примеры.**

Закон распределения (функция распределения и ряд распределения или плотность вероятности) полностью описывают поведение случайной величины. Но в ряде задач достаточно знать некоторые числовые характеристики исследуемой величины (например, ее среднее значение и возможное отклонение от него), чтобы ответить на поставленный вопрос. Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

### Математическое ожидание.

**Определение 7.1.** Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \quad (7.1)$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ ,

если полученный ряд сходится абсолютно.

**Замечание 1.** Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

**Замечание 2.** Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

**Замечание 3.** Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина. В дальнейшем увидим, что это же справедливо и для непрерывных случайных величин.

**Пример 1.** Найдем математическое ожидание случайной величины  $X$  – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для  $X$ . Из условия задачи следует, что  $X$  может принимать

значения 1, 2, 3.  $p(1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$ ,  $p(2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$ ,  $p(3) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$ . Тогда

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{7}{15} + 3 \cdot \frac{7}{15} = 2,4.$$

**Пример 2.** Определим математическое ожидание случайной величины  $X$  – числа бросков монеты до первого появления герба. Эта величина может принимать бесконечное число значений (множество возможных значений есть множество натуральных чисел). Ряд ее распределения имеет вид:

$X$	1	2	...	$n$	...
$p$	0,5	$(0,5)^2$	...	$(0,5)^n$	...

$$\text{Тогда } M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \dots = 1 \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = 1 \cdot 2 = 2$$
 (при вычислении дважды использовалась формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:  $S = \frac{b_1}{1-q}$ , откуда  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$ ,  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$ ).

Свойства математического ожидания.

- 1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C. \quad (7.2)$$

Доказательство. Если рассматривать  $C$  как дискретную случайную величину, принимающую только одно значение  $C$  с вероятностью  $p = 1$ , то  $M(C) = C \cdot 1 = C$ .

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C M(X). \quad (7.3)$$

Доказательство. Если случайная величина  $X$  задана рядом распределения

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

то ряд распределения для  $CX$  имеет вид:

$Cx_i$	$Cx_1$	$Cx_2$	...	$Cx_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Тогда  $M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \dots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = CM(X)$ .

**Определение 7.2.** Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая. В противном случае случайные величины **зависимы**.

**Определение 7.3.** Назовем **произведением независимых случайных величин  $X$  и  $Y$**  случайную величину  $XY$ , возможные значения которой равны произведениям всех возможных значений  $X$  на все возможные значения  $Y$ , а соответствующие им вероятности равны произведениям вероятностей сомножителей.

- 3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y). \quad (7.4)$$

Доказательство. Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда  $X$  и  $Y$  принимают только по два возможных значения:

$x_i$	$x_1$	$x_2$
$p_i$	$p_1$	$p_2$

$y_i$	$y_1$	$y_2$
$g_i$	$g_1$	$g_2$

Тогда ряд распределения для  $XY$  выглядит так:

$XY$	$x_1y_1$	$x_2y_1$	$x_1y_2$	$x_2y_2$
$p$	$p_1g_1$	$p_2g_1$	$p_1g_2$	$p_2g_2$

Следовательно,  $M(XY) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_2 \cdot p_2g_2 = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (y_1g_1 + y_2g_2)(x_1p_1 + x_2p_2) = M(X) \cdot M(Y)$ .

*Замечание 1.* Аналогично можно доказать это свойство для большего количества возможных значений сомножителей.

*Замечание 2.* Свойство 3 справедливо для произведения любого числа независимых случайных величин, что доказывается методом математической индукции.

*Определение 7.4.* Определим **сумму случайных величин  $X$  и  $Y$**  как случайную величину  $X + Y$ , возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения  $X$  с каждым возможным значением  $Y$ ; вероятности таких сумм равны произведениям вероятностей слагаемых (для зависимых случайных величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго).

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \quad (7.5)$$

*Доказательство.*

Вновь рассмотрим случайные величины, заданные рядами распределения, приведенными при доказательстве свойства 3. Тогда возможными значениями  $X + Y$  являются  $x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2$ . Обозначим их вероятности соответственно как  $p_{11}, p_{12}, p_{21}$  и  $p_{22}$ . Найдем  $M(X + Y) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22} = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$ .

Докажем, что  $p_{11} + p_{21} = p_1$ . Действительно, событие, состоящее в том, что  $X + Y$  примет значения  $x_1 + y_1$  или  $x_1 + y_2$  и вероятность которого равна  $p_{11} + p_{12}$ , совпадает с событием, заключающемся в том, что  $X = x_1$  (его вероятность –  $p_1$ ). Аналогично доказывается, что  $p_{21} + p_{22} = p_2, p_{11} + p_{21} = g_1, p_{12} + p_{22} = g_2$ . Значит,

$$M(X + Y) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1g_1 + y_2g_2 = M(X) + M(Y).$$

*Замечание.* Из свойства 4 следует, что сумма любого числа случайных величин равна сумме математических ожиданий слагаемых.

*Пример.* Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Найдем математическое ожидание числа очков, выпавших при броске одной кости:

$$M(X_1) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Тому же числу равно математическое ожидание

числа очков, выпавших на любой кости. Следовательно, по свойству 4  $M(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

### Дисперсия.

Для того, чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание. Рассмотрим две случайные величины:  $X$  и  $Y$ , заданные рядами распределения вида

$X$	49	50	51	$Y$	0	100
$p$	0,1	0,8	0,1	$p$	0,5	0,5

Найдем  $M(X) = 49 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,8 + 51 \cdot 0,1 = 50, M(Y) = 0 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 50$ . Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для  $X$   $M(X)$  хорошо описывает поведение случайной величины, являясь ее наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения незначительно отличаются от 50), то значения  $Y$  существенно отстоят от  $M(Y)$ . Следовательно, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

*Определение 7.5.* **Дисперсией (рассеянием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (7.6)$$

Пример.

Найдем дисперсию случайной величины  $X$  (числа стандартных деталей среди отобранных) в примере 1 данной лекции. Вычислим значения квадрата отклонения каждого возможного значения от математического ожидания:

$(1 - 2,4)^2 = 1,96$ ;  $(2 - 2,4)^2 = 0,16$ ;  $(3 - 2,4)^2 = 0,36$ . Следовательно,

$$D(X) = 1,96 \cdot \frac{1}{15} + 0,16 \cdot \frac{7}{15} + 0,36 \cdot \frac{7}{15} = \frac{28}{75} \approx 0,373.$$

*Замечание 1.* В определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего, а его квадрат. Это сделано для того, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

*Замечание 2.* Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения.

*Замечание 3.* Существует более удобная для расчетов формула для вычисления дисперсии, справедливость которой доказывается в следующей теореме:

**Теорема 7.1.**  $D(X) = M(X^2) - M^2(X).$  (7.7)

Доказательство.

Используя то, что  $M(X)$  – постоянная величина, и свойства математического ожидания, преобразуем формулу (7.6) к виду:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Вычислим дисперсии случайных величин  $X$  и  $Y$ , рассмотренных в начале этого раздела.  $M(X) = (49^2 \cdot 0,1 + 50^2 \cdot 0,8 + 51^2 \cdot 0,1) - 50^2 = 2500,2 - 2500 = 0,2$ .

$M(Y) = (0^2 \cdot 0,5 + 100^2 \cdot 0,5) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$ . Итак, дисперсия второй случайной величины в несколько тысяч раз больше дисперсии первой. Таким образом, даже не зная законов распределения этих величин, по известным значениям дисперсии мы можем утверждать, что  $X$  мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для  $Y$  это отклонение весьма существенно.

#### Свойства дисперсии.

- 1) Дисперсия постоянной величины  $C$  равна нулю:

$$D(C) = 0. \quad (7.8)$$

Доказательство.  $D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0$ .

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X). \quad (7.9)$$

Доказательство.  $D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) = M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 D(X)$ .

- 3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \quad (7.10)$$

Доказательство.  $D(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y)$ .

*Следствие 1.* Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

*Следствие 2.* Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

- 4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \quad (7.11)$$

Доказательство.  $D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$ .

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

**Определение 7.6.** Средним квадратическим отклонением  $\sigma$  случайной величины  $X$  называется квадратный корень из дисперсии:

$$s = \sqrt{D(X)}. \quad (7.12)$$

Пример. В предыдущем примере средние квадратические отклонения  $X$  и  $Y$  равны соответственно  $s_x = \sqrt{0,2} \approx 0,447$ ;  $s_y = \sqrt{2500} = 50$ .

### Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Распространим определения числовых характеристик случайных величин на непрерывные случайные величины, для которых плотность распределения служит в некотором роде аналогом понятия вероятности.

**Определение 7.7.** Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (7.13)$$

*Замечание 1.* Общее определение дисперсии сохраняется для непрерывной случайной величины таким же, как и для дискретной (опр. 7.5), а формула для ее вычисления имеет вид:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X). \quad (7.14)$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле (7.12).

*Замечание 2.* Если все возможные значения непрерывной случайной величины не выходят за пределы интервала  $[a, b]$ , то интегралы в формулах (7.13) и (7.14) вычисляются в этих пределах.

Пример. Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ -\frac{3}{4}(x^2 - 6x + 8), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma$ .

$$\text{Решение. } M(X) = -\frac{3}{4} \int_2^4 x(x^2 - 6x + 8)dx = -\frac{3}{4} \left( \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right) \Big|_2^4 = 3;$$

$$D(X) = -\frac{3}{4} \int_2^4 x^2(x^2 - 6x + 8)dx - 9 = -\frac{3}{4} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} \right) \Big|_2^4 - 9 = 9,2 - 9 = 0,2; \quad s = \sqrt{0,2} \approx 0,447.$$

### Числовые характеристики случайных величин, имеющих некоторые стандартные законы распределения.

### 1. Биномиальное распределение.

Для дискретной случайной величины  $X$ , представляющей собой число появлений события  $A$  в серии из  $n$  независимых испытаний (см. лекцию б),  $M(X)$  можно найти, используя свойство 4 математического ожидания. Пусть  $X_1$  – число появлений  $A$  в первом испытании,  $X_2$  – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин  $X_i$  задается рядом распределения вида

$X_i$	0	1
$p_i$	$q$	$p$

Следовательно,  $M(X_i) = p$ . Тогда  $M(X) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$ .

Аналогичным образом вычислим дисперсию:  $D(X_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$ ,

откуда по свойству 4 дисперсии  $D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = np(1 - p) = npq$ .

### 2. Закон Пуассона.

Если  $p(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ , то  $M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a e^{-a} e^a = a$  (использовалось разложение в ряд Тейлора функции  $e^x$ ).

Для определения дисперсии найдем вначале  $M(X^2) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} =$   
 $= a \sum_{m=1}^{\infty} ((m-1) + 1) \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} = a \left( \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} \right) = a(a + 1)$ .

Поэтому  $D(X) = a^2 + a - a^2 = a$ .

*Замечание.* Таким образом, обнаружено интересное свойство распределения Пуассона: математическое ожидание равно дисперсии (и равно единственному параметру  $a$ , определяющему распределение).

### 3. Равномерное распределение.

Для равномерно распределенной на отрезке  $[a, b]$  непрерывной случайной величины

$$M(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \text{ то есть математическое ожидание}$$

равномерно распределенной случайной величины равно абсциссе середины отрезка  $[a, b]$ .

Дисперсия

$$D(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### 4. Нормальное распределение.

Для вычисления математического ожидания нормально распределенной случайной

величины воспользуемся тем, что *интеграл Пуассона*  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2p}$ .

$$M(X) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = (z = \frac{x-a}{s}) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} (sz + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} s z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2p}} \sqrt{2p} = a \quad (\text{первое слагаемое равно } 0, \text{ так}$$

как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля).

$$D(X) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = \frac{s^2}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (u = z, dv = z e^{-\frac{z^2}{2}}) =$$

$$= \frac{s^2}{\sqrt{2p}} \left( -z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{s^2}{\sqrt{2p}} (-0 + \sqrt{2p}) = s^2.$$

Следовательно, параметры нормального распределения ( $a$  и  $\sigma$ ) равны соответственно математическому ожиданию и среднему квадратическому отклонению исследуемой случайной величины.

## Лекция 8.

**Случайные векторы (системы нескольких случайных величин). Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения двумерной случайной величины, их свойства. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область. Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины. Равномерное распределение на плоскости.**

Наряду с одномерными случайными величинами, возможные значения которых определяются одним числом, теория вероятностей рассматривает и многомерные случайные величины. Каждое возможное значение такой величины представляет собой упорядоченный набор нескольких чисел. Геометрической иллюстрацией этого понятия служат точки  $n$ -мерного пространства, каждая координата которых является случайной величиной (дискретной или непрерывной), или  $n$ -мерные векторы. Поэтому многомерные случайные величины называют еще случайными векторами.

### Двумерные случайные величины.

#### 1. Дискретные двумерные случайные величины.

**Закон распределения** дискретной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  имеет вид таблицы с двойным входом, задающей перечень возможных значений каждой компоненты и вероятности  $p(x_i, y_j)$ , с которыми величина принимает значение  $(x_i, y_j)$ :

Y	X					
	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y_1$	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_i, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
...	...	...	...	...	...	...
$y_j$	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	...	$p(x_i, y_j)$	...	$p(x_n, y_j)$
...	...	...	...	...	...	...
$y_m$	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_i, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

При этом сумма вероятностей, стоящих во всех клетках таблицы, равна 1.

Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти законы распределения ее составляющих. Действительно, событие  $X = x_1$  представляется собой суммой несовместных событий  $(X = x_1, Y = y_1), (X = x_1, Y = y_2), \dots, (X = x_1, Y = y_m)$ , поэтому  $p(X = x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \dots + p(x_1, y_m)$  (в правой части находится сумма вероятностей, стоящих в столбце, соответствующем  $X = x_1$ ). Так же можно найти вероятности остальных возможных значений  $X$ . Для определения вероятностей возможных значений  $Y$  нужно сложить вероятности, стоящие в строке таблицы, соответствующей  $Y = y_j$ .

Пример 1. Дан закон распределения двумерной случайной величины:

Y	X		
	-2	3	6
-0,8	0,1	0,3	0,1
-0,5	0,15	0,25	0,1

Найти законы распределения составляющих.

Решение. Складывая стоящие в таблице вероятности «по столбцам», получим ряд распределения для  $X$ :

X	-2	3	6
p	0,25	0,55	0,2

Складывая те же вероятности «по строкам», найдем ряд распределения для  $Y$ :



$Y$	-0,8	-0,5
$p$	0,5	0,5

## 2. Непрерывные двумерные случайные величины.

**Определение 8.1.** **Функцией распределения**  $F(x, y)$  двумерной случайной величины  $(X, Y)$  называется вероятность того, что  $X < x$ , а  $Y < y$ :

$$F(x, y) = p(X < x, Y < y). \quad (8.1)$$

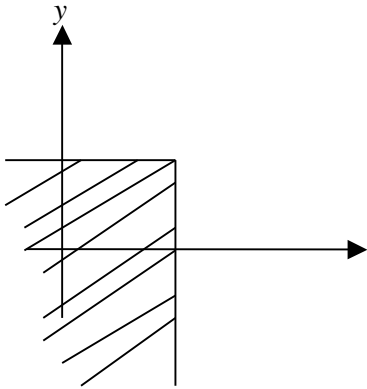


Рис.1.

Это означает, что точка  $(X, Y)$  попадет в область, заштрихованную на рис. 1, если вершина прямого угла располагается в точке  $(x, y)$ .

*Замечание.* Определение функции распределения справедливо как для непрерывной, так и для дискретной двумерной случайной величины.

Свойства функции распределения.

- 1)  $0 \leq F(x, y) \leq 1$  (так как  $F(x, y)$  является вероятностью).
- 2)  $F(x, y)$  есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

*Доказательство.*  $F(x_2, y) = p(X < x_2, Y < y) = p(X < x_1, Y < y) + p(x_1 \leq X < x_2, Y < y) \geq p(X < x_1, Y < y) = F(x_1, y)$ . Аналогично доказывается и второе утверждение.

- 3) Имеют место предельные соотношения:

$$\text{a) } F(-\infty, y) = 0; \quad \text{b) } F(x, -\infty) = 0; \quad \text{c) } F(-\infty, -\infty) = 0; \quad \text{d) } F(\infty, \infty) = 1.$$

*Доказательство.* События а), б) и с) невозможны (так как невозможно событие  $X < -\infty$  или  $Y < -\infty$ ), а событие d) достоверно, откуда следует справедливость приведенных равенств.

- 4) При  $y = \infty$  функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей  $X$ :

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

При  $x = \infty$  функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей  $Y$ :

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

Доказательство. Так как событие  $Y < \infty$  достоверно, то  $F(x, \infty) = p(X < x) = F_1(x)$ . Аналогично доказывается второе утверждение.

**Определение 8.2. Плотностью совместного распределения вероятностей (двумерной плотностью вероятности)** непрерывной двумерной случайной величины называется смешанная частная производная 2-го порядка от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (8.2)$$

*Замечание.* Двумерная плотность вероятности представляет собой предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  к площади этого прямоугольника при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Свойства двумерной плотности вероятности.

- 1)  $f(x, y) \geq 0$  (см. предыдущее замечание: вероятность попадания точки в прямоугольник неотрицательна, площадь этого прямоугольника положительна, следовательно, предел их отношения неотрицателен).
- 2)  $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$  (следует из определения двумерной плотности вероятности).
- 3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$  (поскольку это вероятность того, что точка попадет на плоскость  $Oxy$ , то есть достоверного события).

Вероятность попадания случайной точки в произвольную область.

Пусть в плоскости  $Oxy$  задана произвольная область  $D$ . Найдем вероятность того, что точка, координаты которой представляют собой систему двух случайных величин (двумерную случайную величину) с плотностью распределения  $f(x, y)$ , попадет в область  $D$ . Разобьем эту область прямыми, параллельными осям координат, на прямоугольники со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Вероятность попадания в каждый такой прямоугольник равна  $f(x_i, h_i) \Delta x \Delta y$ , где  $(x_i, h_i)$  - координаты точки, принадлежащей прямоугольнику. Тогда вероятность попадания точки в область  $D$  есть предел интегральной суммы  $\sum_{i=1}^n f(x_i, h_i) \Delta x \Delta y$ , то есть

$$p((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.3)$$

## Отыскание плотностей вероятности составляющих

двумерной случайной величины.

Выше было сказано, как найти функцию распределения каждой составляющей, зная двумерную функцию распределения. Тогда по определению плотности распределения

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{dF(x, \infty)}{dx} = \frac{d\left(\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy\right)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy. \quad (8.4)$$

Аналогично находится  $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$  (8.4')

## Условные законы распределения составляющих

**дискретной двумерной случайной величины.**

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину и найдем закон распределения составляющей  $X$  при условии, что  $Y$  примет определенное значение (например,  $Y = y_1$ ). Для этого воспользуемся формулой Байеса, считая гипотезами события  $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ , а событием  $A$  – событие  $Y = y_1$ . При такой постановке задачи нам требуется найти условные вероятности гипотез при условии, что  $A$  произошло. Следовательно,

$$p(x_i / y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)}.$$

Таким же образом можно найти вероятности возможных значений  $X$  при условии, что  $Y$  принимает любое другое свое возможное значение:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}. \quad (8.5)$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей  $Y$ :

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \quad (8.5')$$

Пример. Найдем закон распределения  $X$  при условии  $Y = -0,8$  и закон распределения  $Y$  при условии  $X = 3$  для случайной величины, рассмотренной в примере 1.

$$p(x_1 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2; \quad p(x_2 / y_1) = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad p(x_3 / y_1) = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$p(y_1 / x_2) = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11}; \quad p(y_2 / x_2) = \frac{0,25}{0,55} = \frac{5}{11}.$$

## Условные законы распределения составляющих

**дискретной двумерной случайной величины.**

**Определение 8.3.** Условной плотностью  $f(x/y)$  распределения составляющих  $X$  при данном значении  $Y = y$  называется

$$j(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}. \quad (8.6)$$

Аналогично определяется условная плотность вероятности  $Y$  при  $X = x$ :

$$y(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}. \quad (8.6')$$

### Равномерное распределение на плоскости.

Система двух случайных величин называется **равномерно распределенной на плоскости**, если ее плотность вероятности  $f(x, y) = \text{const}$  внутри некоторой области и равна 0 вне ее. Пусть данная область – прямоугольник вида  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ . Тогда из свойств  $f(x, y)$  следует, что

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_{np}} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{внутри прямоугольника,} \\ 0 & \text{вне его.} \end{cases}$$

Найдем двумерную функцию распределения:

$$F(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_c^y \int_a^x dx dy = \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)} \text{ при } a < x < b, c < y < d, F(x, y) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ или } y \leq c, F(x, y) = 1 \text{ при } x \geq b, y \geq d.$$

Функции распределения составляющих, вычисленные по формулам, приведенным в свойстве 4

$$\text{функции распределения, имеют вид: } F_1(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad F_2(y) = \frac{y-c}{d-c}.$$

## Лекция 9.

**Некоторые числовые характеристики одномерных случайных величин: начальные и центральные моменты, мода, медиана, квантиль, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Числовые характеристики двумерных случайных величин: начальные и центральные моменты. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.**

**Определение 9.1.** Начальным моментом порядка  $k$  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание величины  $X^k$ :

$$v_k = M(X^k). \quad (9.1)$$

В частности,  $v_1 = M(X)$ ,  $v_2 = M(X^2)$ . Следовательно, дисперсия  $D(X) = v_2 - v_1^2$ .

**Определение 9.2.** Центральным моментом порядка  $k$  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание величины  $(X - M(X))^k$ :

$$\mu_k = M((X - M(X))^k). \quad (9.2)$$

В частности,  $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$ ,  $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$ .

Можно получить соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

$$m_2 = n_2 - n_1^2, \quad m_3 = n_3 - 3n_2n_1 + 2n_1^2, \quad m_4 = n_4 - 4n_3n_1 + 6n_2n_1^2 - 3n_1^4.$$

Мода и медиана.

Такая характеристика случайной величины, как математическое ожидание, называется иногда *характеристикой положения*, так как она дает представление о положении случайной величины на числовой оси. Другими характеристиками положения являются мода и медиана.

**Определение 9.3.** **Модой  $M$**  дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, **модой  $M$**  непрерывной случайной величины – значение, в котором плотность вероятности максимальна.

Пример 1.

Если ряд распределения дискретной случайной величины  $X$  имеет вид:

$X$	1	2	3	4
$p$	0,1	0,7	0,15	0,05

то  $M = 2$ .

Пример 2.

Для непрерывной случайной величины, заданной плотностью распределения  $f(x) = \frac{1}{p(1+x^2)}$ ,

модой является абсцисса точки максимума:  $M = 0$ .

*Замечание 1.* Если кривая распределения имеет больше одного максимума, распределение называется **полимодалным**, если эта кривая не имеет максимума, но имеет минимум – **анти-модалным**.

*Замечание 2.* В общем случае мода и математическое ожидание не совпадают. Но, если распределение является симметричным и модалным (то есть кривая распределения симметрична относительно прямой  $x = M$ ) и имеет математическое ожидание, оно совпадает с модой.

*Определение 9.4.* **Медианой  $Me$**  непрерывной случайной величины называют такое ее значение, для которого

$$p( X < Me ) = p( X > Me ). \quad (9.3)$$

Графически прямая  $x = Me$  делит площадь фигуры, ограниченной кривой распределения, на две равные части.

*Замечание.* Для симметричного модалного распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

*Определение 9.5.* Для случайной величины  $X$  с функцией распределения  $F(X)$  **квантилью порядка  $p$**  ( $0 < p < 1$ ) называется число  $K_p$  такое, что  $F(K_p) \leq p$ ,  $F(K_p + 0) \geq p$ . В частности, если  $F(X)$  строго монотонна,  $K_p: F(K_p) = p$ .

#### Асимметрия и эксцесс.

Если распределение не является симметричным, можно оценить асимметрию кривой распределения с помощью центрального момента 3-го порядка. Действительно, для симметричного распределения все нечетные центральные моменты равны 0 (как интегралы от нечетных функций в симметричных пределах), поэтому выбран нечетный момент наименьшего порядка, не тождественно равный 0. Чтобы получить безразмерную характеристику, его делят на  $\sigma^3$  (так как  $\mu_3$  имеет размерность куба случайной величины).

*Определение 9.6.* **Коэффициентом асимметрии** случайной величины называется

$$S_k = \frac{m_3}{S^3} . \quad (9.4)$$

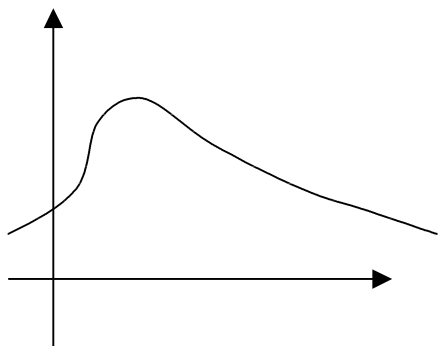


Рис.1.

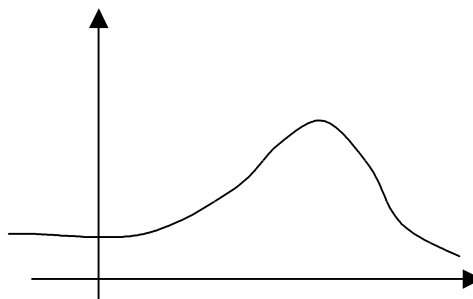


Рис.2.

В частности, для кривой, изображенной на рис.1,  $S_k > 0$ , а на рис.2 -  $S_k < 0$ .

Для оценки поведения кривой распределения вблизи точки максимума (для определения того, насколько «крутой» будет его вершина) применяется центральный момент 4-го порядка.

*Определение 9.7.* **Экссессом** случайной величины называется величина

$$Ex = \frac{m_4}{S^4} - 3. \quad (9.5)$$

*Замечание.* Можно показать, что для нормального распределения  $\frac{m_4}{S^4} = 3$ , и, соответственно,  $Ex = 0$ . Для кривых с более острой вершиной  $Ex > 0$ , в случае более плоской вершины  $Ex < 0$ .

### **Числовые характеристики двумерных случайных величин.**

Такие характеристики, как начальные и центральные моменты, можно ввести и для системы двух случайных величин.

*Определение 9.8.* **Начальным моментом порядка  $k, s$**  двумерной случайной величины  $(X, Y)$  называется математическое ожидание произведения  $X^k$  на  $Y^s$ :

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s). \quad (9.6)$$

Для дискретных случайных величин  $a_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}$ ,

для непрерывных случайных величин  $a_{k,s} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy$ .

*Определение 9.9.* **Центральным моментом порядка  $k, s$**  двумерной случайной величины  $(X, Y)$  называется математическое ожидание произведения  $(X - M(X))^k$  на  $(Y - M(Y))^s$ :

$$\mu_{k,s} = M((X - M(X))^k (Y - M(Y))^s). \quad (9.7)$$

Для дискретных случайных величин  $m_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^s p_{ij}$ ,

для непрерывных случайных величин  $m_{k,s} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k (y - M(Y))^s f(x, y) dx dy$ .

При этом  $M(X) = \alpha_{1,0}$ ,  $M(Y) = \alpha_{0,1}$ ,  $D(X) = \mu_{2,0}$ ,  $D(Y) = \mu_{0,2}$ .

### **Корреляционный момент и коэффициент корреляции.**

*Определение 9.10.* **Корреляционным моментом** системы двух случайных величин называется второй смешанный центральный момент:

$$K_{xy} = \mu_{1,1} = M((X - M(X))(Y - M(Y))). \quad (9.8)$$

Для дискретных случайных величин  $K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) p_{ij}$ , для

непрерывных случайных величин  $K_{xy} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x, y) dx dy$ .

Безразмерной характеристикой коррелированности двух случайных величин является **коэффициент корреляции**

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{s_x s_y}. \quad (9.9)$$

Корреляционный момент описывает связь между составляющими двумерной случайной величины. Действительно, убедимся, что для независимых  $X$  и  $Y$   $K_{xy} = 0$ . В этом случае  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , тогда

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))f_2(y)dy = m_1(x)m_2(y) = 0.$$

Итак, две независимые случайные величины являются и некоррелированными. Однако понятия коррелированности и зависимости не эквивалентны, а именно, величины могут быть зависимыми, но при этом некоррелированными. Дело в том, что коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только линейную. В частности, если  $Y = aX + b$ , то  $r_{xy} = \pm 1$ . Найдем возможные значения коэффициента корреляции.

**Теорема 9.1.**  $|r_{xy}| \leq 1$ .

Доказательство. Докажем сначала, что  $|K_{xy}| \leq s_x s_y$ . Действительно, если рассмотреть случайную величину  $Z_1 = s_y X - s_x Y$  и найти ее дисперсию, то получим:  $D(Z_1) = 2s_x^2 s_y^2 - 2s_x s_y K_{xy}$ .

Так как дисперсия всегда неотрицательна, то  $2s_x^2 s_y^2 - 2s_x s_y K_{xy} \geq 0$ , откуда  $|K_{xy}| \leq s_x s_y$ .

Отсюда  $\left| \frac{K_{xy}}{s_x s_y} \right| = |r_{xy}| \leq 1$ , что и требовалось доказать.



## Лекция 10.

**Функции от случайных величин. Функция одного случайного аргумента, ее распределение и математическое ожидание. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распределения.**

В предыдущих лекциях рассматривались некоторые законы распределения случайных величин. При решении задач часто удобно бывает представить исследуемую случайную величину как функцию других случайных величин с известными законами распределения, что помогает установить и закон распределения заданной случайной величины.

**Определение 10.1.** Если каждому возможному значению случайной величины  $X$  соответствует одно возможное значение случайной величины  $Y$ , то  $Y$  называют **функцией случайного аргумента  $X$** :  $Y = \varphi(X)$ .

Выясним, как найти закон распределения функции по известному закону распределения аргумента.

1) Пусть аргумент  $X$  – дискретная случайная величина, причем различным значениям  $X$  соответствуют различные значения  $Y$ . Тогда вероятности соответствующих значений  $X$  и  $Y$  равны.

Пример 1. Ряд распределения для  $X$  имеет вид:  $X$  5 6 7 8

$$p \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4$$

Найдем закон распределения функции  $Y = 2X^2 - 3$ :  $Y$  47 69 95 125

$$p \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4$$

(при вычислении значений  $Y$  в формулу, задающую функцию, подставляются возможные значения  $X$ ).

2) Если разным значениям  $X$  могут соответствовать одинаковые значения  $Y$ , то вероятности значений аргумента, при которых функция принимает одно и то же значение, складываются.

Пример 2. Ряд распределения для  $X$  имеет вид:  $X$  0 1 2 3

$$p \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4$$

Найдем закон распределения функции  $Y = X^2 - 2X$ :  $Y$  -1 0 3

$$p \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,4$$

(так как  $Y = 0$  при  $X = 0$  и  $X = 2$ , то  $p(Y = 0) = p(X = 0) + p(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$ ).

3) Если  $X$  – непрерывная случайная величина,  $Y = \varphi(X)$ ,  $\varphi(x)$  – монотонная и дифференцируемая функция, а  $\psi(y)$  – функция, обратная к  $\varphi(x)$ , то плотность распределения  $g(y)$  случайно функции  $Y$  равна:

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|. \quad (10.1)$$

Пример 3.  $f(x) = \frac{1}{p(1+x^2)}$ ,  $Y = x^3$ . Тогда  $\psi(y) = \sqrt[3]{y}$ ,  $g(y) = \frac{1}{p(1+y^{\frac{2}{3}})} \cdot \left(\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3py^{\frac{2}{3}}(1+y^{\frac{2}{3}})}$

### Математическое ожидание функции одного случайного аргумента.

Пусть  $Y = \varphi(X)$  – функция случайного аргумента  $X$ , и требуется найти ее математическое ожидание, зная закон распределения  $X$ .

1) Если  $X$  – дискретная случайная величина, то

$$M(Y) = M(j(x)) = \sum_{i=1}^n j(x_i) p_i. \quad (10.2)$$

Пример 3. Найдем  $M(Y)$  для примера 1:  $M(Y) = 47 \cdot 0,1 + 69 \cdot 0,2 + 95 \cdot 0,3 + 125 \cdot 0,4 = 97$ .

2) Если  $X$  – непрерывная случайная величина, то  $M(Y)$  можно искать по-разному. Если известна плотность распределения  $g(y)$ , то

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy. \quad (10.3)$$

Если же  $g(y)$  найти сложно, то можно использовать известную плотность распределения  $f(x)$ :

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} j(x)f(x)dx. \quad (10.4)$$

В частности, если все значения  $X$  принадлежат промежутку  $(a, b)$ , то

$$M(Y) = \int_a^b j(x)f(x)dx. \quad (10.4')$$

### Функция двух случайных величин. Распределение суммы независимых слагаемых.

**Определение 10.2.** Если каждой паре возможных значений случайных величин  $X$  и  $Y$  соответствует одно возможное значение случайной величины  $Z$ , то  $Z$  называют **функцией двух случайных аргументов**  $X$  и  $Y$ :  $Z = \varphi(X, Y)$ .

Рассмотрим в качестве такой функции сумму  $X + Y$ . В некоторых случаях можно найти ее закон распределения, зная законы распределения слагаемых.

1) Если  $X$  и  $Y$  – дискретные *независимые* случайные величины, то для определения закона распределения  $Z = X + Y$  нужно найти все возможные значения  $Z$  и соответствующие им вероятности.

Пример 4. Рассмотрим дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$ , законы распределения которых имеют вид:

$X$	-2	1	3	$Y$	0	1	2
$p$	0,3	0,4	0,3	$p$	0,2	0,5	0,3

Найдем возможные значения  $Z$ :  $-2 + 0 = -2$  ( $p = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ ),  $-2 + 1 = -1$  ( $p = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$ ),  $-2 + 2 = 0$  ( $p = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ ),  $1 + 0 = 1$  ( $p = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$ ),  $1 + 1 = 2$  ( $p = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$ ),  $1 + 2 = 3$  ( $p = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$ ),  $3 + 0 = 3$  ( $p = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ ),  $3 + 1 = 4$  ( $p = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$ ),  $3 + 2 = 5$  ( $p = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$ ). Сложив вероятности повторившегося дважды значения  $Z = 3$ , составим ряд распределения для  $Z$ :

$Z$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p$	0,06	0,15	0,09	0,08	0,2	0,18	0,15	0,09

3) Если  $X$  и  $Y$  – непрерывные *независимые* случайные величины, то, если плотность вероятности хотя бы одного из аргументов задана на  $(-\infty, \infty)$  одной формулой, то плотность суммы  $g(z)$  можно найти по формулам

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy, \quad (10.5)$$

где  $f_1(x), f_2(y)$  – плотности распределения слагаемых. Если возможные значения аргументов неотрицательны, то

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_0^z f_1(z-y)f_2(y)dy. \quad (10.6)$$

**Замечание.** Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин называют **композицией**.

### **Устойчивость нормального распределения.**

*Определение 10.3.* Закон распределения вероятностей называется **устойчивым**, если композиция таких законов есть тот же закон (возможно, отличающийся другими значениями параметров).

В частности, свойством устойчивости обладает нормальный закон распределения: композиция нормальных законов тоже имеет нормальное распределение, причем ее математическое ожидание и дисперсия равны суммам соответствующих характеристик слагаемых.

## Лекция 11.

### Нормальный закон распределения на плоскости. Линейная регрессия. Линейная корреляция.

**Определение 11.1.** Нормальным законом распределения на плоскости называют распределение вероятностей двумерной случайной величины  $(X, Y)$ , если

$$f(x, y) = \frac{1}{2ps_x s_y \sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)} \left( \frac{(x-a_1)^2}{s_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{s_y^2} - 2r_{xy} \frac{x-a_1}{s_x} \frac{y-a_2}{s_y} \right)} \quad (11.1)$$

Таким образом, нормальный закон на плоскости определяется 5 параметрами:  $a_1, a_2, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$ , где  $a_1, a_2$  – математические ожидания,  $\sigma_x, \sigma_y$  – средние квадратические отклонения,  $r_{xy}$  – коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$ .

Предположим, что  $r_{xy} = 0$ , то есть  $X$  и  $Y$  некоррелированы. Тогда из (11.1) получим:

$$f(x, y) = \frac{1}{2ps_x s_y} \cdot e^{-0,5 \left( \frac{(x-a_1)^2}{s_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{s_y^2} \right)} = \frac{1}{s_x \sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2s_x^2}} \cdot \frac{1}{s_y \sqrt{2p}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2s_y^2}} = f_1(x) f_2(y).$$

Следовательно, из некоррелированности составляющих нормально распределенной двумерной случайной величины следует их независимость, то есть для них понятия независимости и некоррелированности равносильны.

### Линейная регрессия.

Пусть составляющие  $X$  и  $Y$  двумерной случайной величины  $(X, Y)$  зависимы. Будем считать, что одну из них можно приближенно представить как линейную функцию другой, например

$$Y \approx g(X) = \alpha + \beta X, \quad (11.2)$$

и определим параметры  $\alpha$  и  $\beta$  с помощью метода наименьших квадратов.

**Определение 11.2.** Функция  $g(X) = \alpha + \beta X$  называется **наилучшим приближением**  $Y$  в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание  $M(Y - g(X))^2$  принимает наименьшее возможное значение; функцию  $g(X)$  называют **среднеквадратической регрессией**  $Y$  на  $X$ .

**Теорема 11.1.** Линейная средняя квадратическая регрессия  $Y$  на  $X$  имеет вид:

$$g(X) = m_y + r \frac{s_y}{s_x} (X - m_x), \quad (11.3)$$

где  $m_x = M(X), m_y = M(Y), s_x = \sqrt{D(X)}, s_y = \sqrt{D(Y)}, r = \frac{K_{xy}}{s_x s_y}$  – коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$ .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(\alpha, \beta) = M(Y - \alpha - \beta X)^2 \quad (11.4)$$

и преобразуем ее, учитывая соотношения  $M(X - m_x) = M(Y - m_y) = 0$ ,  $M((X - m_x)(Y - m_y)) = K_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$ :

$$F(a, b) = s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2rs_x s_y b + (m_y - a - bm_x)^2.$$

Найдем стационарные точки полученной функции, решив систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2(m_y - a - bm_x) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2bs_x^2 - 2rs_x s_y = 0. \end{cases} \quad \text{Решением системы будет } b = r \frac{s_y}{s_x}, a = m_y - r \frac{s_y}{s_x} m_x.$$

Можно проверить, что при этих значениях функция  $F(a, b)$  имеет минимум, что доказывает утверждение теоремы.

*Определение 11.3.* Коэффициент  $b = r \frac{s_y}{s_x}$  называется **коэффициентом регрессии  $Y$  на  $X$** , а

прямая 
$$y - m_y = r \frac{s_y}{s_x} (x - m_x) - \quad (11.5)$$

- **прямой среднеквадратической регрессии  $Y$  на  $X$ .**

Подставив координаты стационарной точки в равенство (11.4), можно найти минимальное значение функции  $F(a, b)$ , равное  $s_y^2(1 - r^2)$ . Эта величина называется **остаточной дисперсией  $Y$  относительно  $X$**  и характеризует величину ошибки, допускаемой при замене  $Y$  на  $g(X) = a + \beta X$ . При  $r = \pm 1$  остаточная дисперсия равна 0, то есть равенство (11.2) является не приближенным, а точным. Следовательно, при  $r = \pm 1$   $Y$  и  $X$  связаны *линейной* функциональной зависимостью. Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии  $X$  на  $Y$ :

$$x - m_x = r \frac{s_x}{s_y} (y - m_y) \quad (11.6)$$

и остаточную дисперсию  $X$  относительно  $Y$ . При  $r = \pm 1$  обе прямые регрессии совпадают. Решив систему из уравнений (11.5) и (11.6), можно найти точку пересечения прямых регрессии – точку с координатами  $(m_x, m_y)$ , называемую **центром совместного распределения величин  $X$  и  $Y$ .**

### Линейная корреляция.

Для двумерной случайной величины  $(X, Y)$  можно ввести так называемое **условное математическое ожидание  $Y$  при  $X = x$** . Для дискретной случайной величины оно определяется как

$$M(Y | X = x) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j / x), \quad (11.7)$$

для непрерывной случайной величины –

$$M(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y U(y / x) dy. \quad (11.8)$$

**Определение 11.4.** **Функцией регрессии  $Y$  на  $X$**  называется условное математическое ожидание

$$M(Y/x) = f(x).$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание  $X$  и функция регрессии  $X$  на  $Y$ .

**Определение 11.5.** Если обе функции регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$  линейны, то говорят, что  $X$  и  $Y$  связаны **линейной корреляционной зависимостью**.

При этом графики линейных функций регрессии являются прямыми линиями, причем можно доказать, что эти линии совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии.

**Теорема 11.2.** Если двумерная случайная величина  $(X, Y)$  распределена нормально, то  $X$  и  $Y$  связаны линейной корреляционной зависимостью.

Доказательство. Найдем условный закон распределения  $Y$  при  $X = x$   $\left( y(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \right)$ ,

используя формулу двумерной плотности вероятности нормального распределения (11.1) и формулу плотности вероятности  $X$ :

$$f_1(x) = \frac{1}{s_x \sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2s_x^2}}. \quad (11.9)$$

Сделаем замену  $u = \frac{x-a_1}{s_x}$ ,  $v = \frac{y-a_2}{s_y}$ . Тогда  $y(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2p}s_y} e^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}}$  =

$$= \frac{1}{s_y \sqrt{1-r^2} \sqrt{2p}} e^{-\frac{\left( y - \left( a_2 + r \frac{s_y}{s_x} (x-a_1) \right) \right)^2}{2s_y^2(1-r^2)}}.$$

Полученное распределение является нормальным, а его мате-

матическое ожидание  $M(Y/x) = a_2 + r \frac{s_y}{s_x} (x-a_1)$  есть функция регрессии  $Y$  на  $X$  (см. определение 11.4)). Аналогично можно получить функцию регрессии  $X$  на  $Y$ :

$$M(X/y) = a_1 + r \frac{s_x}{s_y} (y-a_2).$$

Обе функции регрессии линейны, поэтому корреляция между  $X$  и  $Y$  линейна, что и требовалось доказать. При этом уравнения прямых регрессии имеют вид

$$y - a_2 = r \frac{s_y}{s_x} (x - a_1), \quad x - a_1 = r \frac{s_x}{s_y} (y - a_2),$$

то есть совпадают с уравнениями прямых среднеквадратической регрессии (см. формулы (11.5), (11.6)).

## Лекция 12.

### Распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера. Связь этих распределений с нормальным распределением.

Рассмотрим некоторые распределения, связанные с нормальным и широко применяющиеся в математической статистике.

#### Распределение «хи-квадрат».

Пусть имеется несколько нормированных нормально распределенных случайных величин:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $a_i = 0, \sigma_i = 1$ ). Тогда сумма их квадратов

$$c^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (12.1)$$

является случайной величиной, распределенной по так называемому **закону «хи-квадрат»** с  $k = n$  степенями свободы; если же слагаемые связаны каким-либо соотношением (например,  $\sum X_i = n\bar{X}$ ), то число степеней свободы  $k = n - 1$ .

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0. \end{cases} \quad (12.2)$$

Здесь  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  - гамма-функция; в частности,  $\Gamma(n + 1) = n!$ .

Следовательно, распределение «хи-квадрат» определяется одним параметром – числом степеней свободы  $k$ .

*Замечание 1.* С увеличением числа степеней свободы распределение «хи-квадрат» постепенно приближается к нормальному.

*Замечание 2.* С помощью распределения «хи-квадрат» определяются многие другие распределения, встречающиеся на практике, например, распределение случайной величины  $\sqrt{c^2}$  - длины случайного вектора  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , координаты которого независимы и распределены по нормальному закону.

#### Распределение Стьюдента.

Рассмотрим две независимые случайные величины:  $Z$ , имеющую нормальное распределение и нормированную (то есть  $M(Z) = 0, \sigma(Z) = 1$ ), и  $V$ , распределенную по закону «хи-квадрат» с  $k$  степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \quad (12.3)$$

имеет распределение, называемое ***t* – распределением или распределением Стьюдента** с  $k$  степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

### Распределение ***F* Фишера – Снедекора.**

Рассмотрим две независимые случайные величины  $U$  и  $V$ , распределенные по закону «хи-квадрат» со степенями свободы  $k_1$  и  $k_2$  и образуем из них новую величину

$$F = \frac{U / k_1}{V / k_2}. \quad (12.4)$$

Ее распределение называют **распределением *F* Фишера – Снедекора** со степенями свободы  $k_1$  и  $k_2$ . Плотность его распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ C_0 \frac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0, \end{cases} \quad (12.5)$$

где  $C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}$ . Таким образом, распределение Фишера определяется двумя параметрами – числами степеней свободы.